۷.۱۵ تمرین

۱. فرض کنید $(۱,۱)$ نقطهٔ بحرانی تابع f که مشتقهای دومش پیوسته‌اند باشد. در هر مورد دربارهٔ f چه می‌توانید بگویید؟

الف) $f_{xx}(۱,۱)=۴$، $f_{xy}(۱,۱)=۱$، $f_{yy}(۱,۱)=۲$

ب) $f_{xx}(۱,۱)=۴$، $f_{xy}(۱,۱)=۳$، $f_{yy}(۱,۱)=۲$

۲. فرض کنید $(۰,۲)$ نقطهٔ بحرانی تابع g که مشتقهای دومش پیوسته‌اند باشد. در هر مورد دربارهٔ g چه می‌توانید بگویید؟

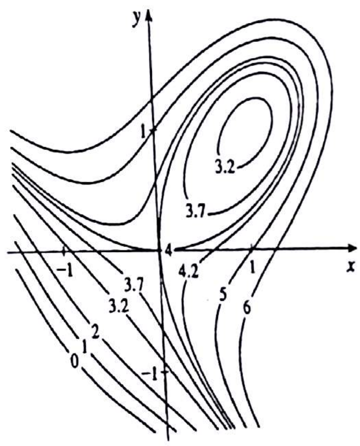
الف) $g_{xx}(۰,۲)=-۱$، $g_{xy}(۰,۲)=۶$، $g_{yy}(۰,۲)=۱$

ب) $g_{xx}(۰,۲)=-۱$، $g_{xy}(۰,۲)=۲$، $g_{yy}(۰,۲)=-۸$

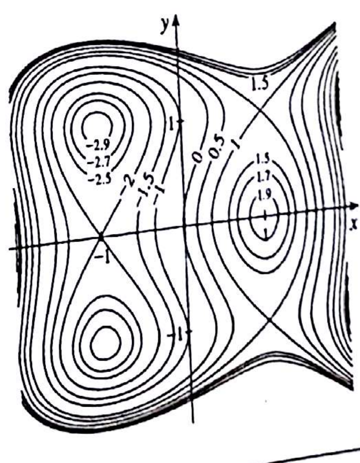
ج) $g_{xx}(۰,۲)=۴$، $g_{xy}(۰,۲)=۶$، $g_{yy}(۰,۲)=۹$

۳-۴ با استفاده از منحنیهای تراز در شکل جای نقطه‌های بحرانی f را حدس بزنید و حدس بزنید که در هر نقطهٔ بحرانی f نقطهٔ زینی دارد یا ماکسیمم یا مینیمم موضعی. دلیلتان را توضیح دهید. با استفاده از آزمون مشتق دوم درستی حدستان را نشان دهید.

۳. $f(x,y)=۴+x^۳+y^۳-۳xy$



۴. $f(x,y)=۳x-x^۳-۲y^۲+y^۴$



۵-۱۸ مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی و نقطه (یا نقطه‌های) زینی تابع موردنظر را پیدا کنید. اگر نرم‌افزار رسامی سه‌بعدی دارید، تابع موردنظر را با دامنه و منظری ترسیم کنید که همهٔ خصلتهای مهم این تابع را نشان دهد.

۵. $f(x,y)=۹-۲x+۴y-x^۲-۴y^۲$

۶. $f(x,y)=x^۳y+۱۲x^۲-۸y$

۷. $f(x,y)=x^۴+y^۴-۴xy+۲$

۸. $f(x,y)=e^{۴y-x^۲-y^۲}$

۹. $f(x,y)=(۱+xy)(x+y)$

۱۰. $f(x,y)=۲x^۳+xy^۲+۵x^۲+y^۲$

۱۱. $f(x,y)=x^۳-۱۲xy+۸y^۳$

۱۲. $f(x,y)=xy+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$

۱۳. $f(x,y)=e^x\cos y$

۱۴. $f(x,y)=y\cos x$

۱۵. $f(x,y)=(x^۲+y^۲)e^{y^۲-x^۲}$

۱۶. $f(x,y)=e^y(y^۲-x^۲)$

۱۷. $f(x,y)=y^۲-۲y\cos x$، $۱\le x\le ۷$

۱۸. $f(x,y)=\sin x\sin y$، $-\pi<x<\pi$، $-\pi<y<\pi$

---

۱۹. نشان دهید که $f(x,y)=x^۲+۴y^۲-۴xy+۲$ بی‌نهایت نقطهٔ بحرانی دارد و در هر یک از آنها $D=۰$. سپس نشان دهید که f در هر نقطهٔ بحرانی مینیمم موضعی (و مطلق) دارد.

۲۰. نشان دهید که $f(x,y)=x^۲ye^{-x^۲-y^۲}$ در $\left(\pm۱,\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$ مقدار ماکسیمم و در $\left(\pm۱,-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$ مقدار مینیمم دارد. همچنین نشان دهید که f بی‌نهایت نقطهٔ بحرانی دیگر دارد و در هر یک از آنها $D=۰$. کدام‌یک از آنها مقدار ماکسیمم می‌دهند؟ کدام‌یک مقدار مینیمم می‌دهند؟ نقطه‌های زینی چطور؟

۲۱-۲۴ با استفاده از نمودار و/یا منحنیهای تراز مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی و نقطه (یا نقطه‌های) زینی تابع موردنظر را تخمین بزنید. سپس با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال این مقدارها را دقیق پیدا کنید.

۲۱. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

۲۲. $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$

۲۳. $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$، $0 \le x \le 2\pi$، $0 \le y \le 2\pi$

۲۴. $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$، $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$، $0 \le y \le \frac{\pi}{4}$

۲۵-۲۸ مانند مثال ۴ با استفاده از ابزار رسامی (یا روش نیوتن یا ریشه‌یاب) نقطه‌های بحرانی f را با دقت سه رقم اعشار پیدا کنید. سپس نوع این نقطه‌های بحرانی را مشخص کنید و بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌های روی نمودار را پیدا کنید.

۲۵. $f(x,y) = x^4 - 5x^2 + y^2 + 3x + 2$

۲۶. $f(x,y) = 5 - 10xy - 4x^2 + 3y - y^4$

۲۷. $f(x,y) = 2x + 4x^2 - y^2 + 2xy^2 - x^4 - y^4$

۲۸. $f(x,y) = e^x + y^4 - x^3 + 4\cos y$

۲۹-۳۶ مقدارهای ماکسیمم و مینیمم مطلق f روی مجموعهٔ D را پیدا کنید.

۲۹. $f(x,y) = 1 + 4x - 5y$، D ناحیهٔ مثلثی بسته با رأسهای $(0,0)$، $(2,0)$ و $(0,3)$ است.

۳۰. $f(x,y) = 3 + xy - x - 2y$، D ناحیهٔ مثلثی بسته با رأسهای $(1,0)$، $(5,0)$ و $(1,4)$ است.

۳۱. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$، $D = \{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$

۳۲. $f(x,y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$، $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 5\}$

۳۳. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$، $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$

۳۴. $f(x,y) = xy^2$، $D = \{(x,y) \mid x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 3\}$

۳۵. $f(x,y) = 2x^3 + y^4$، $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

۳۶. $f(x,y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$، D چهارضلعی با رأسهای $(-2,3)$، $(2,3)$، $(2,2)$ و $(-2,-2)$ است.

---

۳۷. در مورد تابعهای یک‌متغیره نمی‌شود که تابع پیوسته دو ماکسیمم موضعی داشته باشد اما مینیمم موضعی نداشته باشد. اما در مورد تابعهای دومتغیره چنین تابعهایی وجود دارند. نشان دهید که تابع

$$f(x,y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

فقط دو نقطهٔ بحرانی دارد، اما در هر دو اینها ماکسیمم موضعی دارد. سپس با استفاده از کامپیوتر نموداری را با انتخاب دقیق دامنه و منظر بکشید که ببینید چطور چنین چیزی ممکن است.

۳۸. اگر تابعی یک‌متغیره روی بازه‌ای پیوسته باشد و فقط یک نقطهٔ بحرانی داشته باشد، آن‌وقت ماکسیمم موضعی باید ماکسیمم مطلق باشد. اما این مطلب در مورد تابعهای دومتغیره درست نیست. نشان دهید که تابع

$$f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و f در آنجا ماکسیمم موضعی دارد که ماکسیمم مطلق نیست. سپس با استفاده از کامپیوتر نموداری را با انتخاب دقیق دامنه و منظر رسم کنید تا ببینید چطور چنین چیزی ممکن است.

۳۹. کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ $(2,1,-1)$ تا صفحهٔ $x + y - z = 1$ را پیدا کنید.

۴۰. نقطه‌ای را روی صفحهٔ $x - y + z = 4$ پیدا کنید که به نقطهٔ $(1,2,3)$ نزدیکترین است.

۴۱. نقطه‌هایی را روی مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ پیدا کنید که به نقطهٔ $(4,2,0)$ نزدیکترین‌اند.

۴۲. نقطه‌هایی را روی رویهٔ $y^2 = 9 + xz$ پیدا کنید که به مبدأ نزدیکترین‌اند.

۴۳. سه عدد مثبت پیدا کنید که مجموعشان ۱۰۰ باشد و حاصل‌ضربشان ماکسیمم.

۴۴. سه عدد مثبت پیدا کنید که مجموعشان ۱۲ باشد و مجموع مربعهایشان

تا جایی که ممکن است کوچک.

۴۵. ماکسیمم حجم جعبه‌ای مستطیلی را که در کره‌ای به شعاع r محاط شده است پیدا کنید.

۴۶. ابعاد جعبه‌ای به حجم $1000\ \mathrm{cm}^3$ را پیدا کنید که مساحت جانبی‌اش مینیمم باشد.

۴۷. حجم بزرگترین جعبهٔ مستطیلی در ربع اول را پیدا کنید که سه وجهش روی صفحهٔ مختصات باشند و یک رأسش روی صفحهٔ $x + 2y + 3z = 6$ باشد.

۴۸. ابعاد جعبه‌ای مستطیلی با بیشترین حجم را که مساحت جانبی کلش $64\ \mathrm{cm}^2$ است پیدا کنید.

۴۹. ابعاد جعبه‌ای مستطیلی با حجم ماکسیمم را که مجموع طولهای ۱۲ یالش مقدار ثابت c است پیدا کنید.

۵۰. کف آکواریومی به حجم مفروض V از سنگ ساخته شده است و کناره‌هایش از شیشه. اگر قیمت سنگ (مساحت هر واحدش) پنج برابر قیمت شیشه باشد، ابعاد آکواریوم را برای اینکه هزینهٔ مواد سازنده‌اش مینیمم باشد پیدا کنید.

۵۱. حجم جعبه‌ای مقوایی و سرباز باید $32000\ \mathrm{cm}^3$ باشد. ابعاد را طوری پیدا کنید که مقدار مقوای مصرفی را مینیمم کند.

۵۲. ساختمانی مستطیلی باید طوری طراحی شود که هدررفتن حرارت مینیمم باشد. دیوارهای شرقی و غربی حرارت را با آهنگ 10 واحد$/\mathrm{m}^2$ در روز هدر می‌دهند و دیوارهای شمالی و جنوبی با آهنگ 8 واحد$/\mathrm{m}^2$ در روز، کف با آهنگ 1 واحد$/\mathrm{m}^2$ در روز و سقف با آهنگ 5 واحد$/\mathrm{m}^2$ در روز. هر دیوار باید دست‌کم $30\ \mathrm{m}$ طول داشته باشد و ارتفاع باید دست‌کم $4\ \mathrm{m}$ باشد و حجم باید دقیقاً $4000\ \mathrm{m}^3$ باشد.

الف) دامنهٔ هدررفتن حرارت برحسب تابعی از ابعاد وجه‌ها را پیدا و رسم کنید.

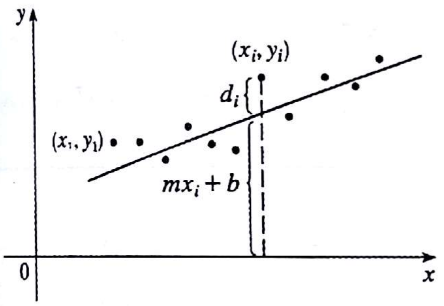
ب) ابعادی را که هدررفتن حرارت را مینیمم می‌کنند پیدا کنید. (هم نقطه‌های بحرانی را بررسی کنید هم نقطه‌های روی مرز دامنه را).

ج) اگر محدودیت روی ابعاد دیواره‌ها را برداریم می‌توانید ساختمانی را طراحی کنید که هدررفتن حرارت در آن حتی کمتر باشد؟

۵۳. اگر طول قطر جعبه‌ای مستطیل برابر با L باشد، بیشترین حجم ممکنش چقدر است؟

۵۴. سه آلل (ژنهای همردیف) A، B و O چهار نوع گروه خونی A (AA یا AO)، B (BB یا BO)، O (OO) و AB را مشخص می‌کنند. بنابر قانون هاردی-واینبرگ درصد افراد ناقل دو آلل مختلف در جامعه برابر است با $P = 2pq + 2pr + 2rq$، که در اینجا p، q و r نسبتهای A، B و O در این جامعه‌اند. با استفاده از اینکه $p + q + r = 1$ نشان دهید که P حداکثر $\frac{2}{3}$ است.

۵۵. فرض کنید که دانشمندی دلایلی دارد که بر مبنای آنها دو کمیت x و y نسبت خطی دارند، یعنی، به‌ازای مقدارهایی از m و b، دست‌کم به‌طور تقریبی، $y = mx + b$. این دانشمند آزمایشی انجام می‌دهد و داده‌هایی را به‌شکل نقطه‌های (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، ...، و (x_n, y_n) جمع‌آوری می‌کند و سپس این نقطه‌ها را رسم می‌کند. این نقطه‌ها دقیقاً روی یک خط راست قرار ندارند، درنتیجه این دانشمند می‌خواهد عددهای ثابت m و b را طوری پیدا کند که خط $y = mx + b$ تا جایی که ممکن است با این نقطه‌ها «انطباق داشته باشد». (شکل را ببینید.)



فرض کنید $d_i = y_i - (mx_i + b)$ انحراف قائم نقطهٔ (x_i, y_i) از خط موردنظر باشد. با **روش کمترین مربعها** m و b را طوری تعیین می‌کنند که $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$، مجموع مربعهای این انحرافها، مینیمم باشد. نشان دهید که، مطابق این روش، خطی که بیشترین انطباق را دارد وقتی به‌دست می‌آید که

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

به این ترتیب، این خط با پیدا کردن مجهولهای m و b از این دو معادله پیدا می‌شود. (بخش ۲.۱ را برای بحث بیشتر و آشنایی بیشتر با کاربردهای روش کمترین مربعها ببینید.)

۵۶. معادلهٔ صفحه‌ای را پیدا کنید که از نقطهٔ $(1, 2, 3)$ می‌گذرد و از یک‌هشتم اول کمترین حجم را جدا می‌کند.