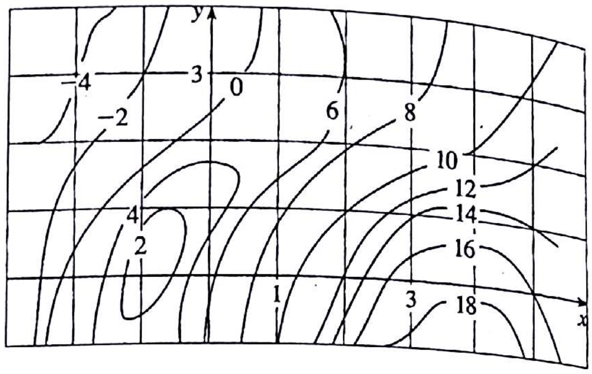
۱۰. نقشهٔ ارتفاعی تابع f داده شده است. با استفاده از آن $f_x(۲,۱)$ و $f_y(۲,۱)$ را تخمین بزنید.



۱۱. اگر $f(x,y)=۱۶-۴x^۲-y^۲$، $f_x(۱,۲)$ و $f_y(۱,۲)$ را پیدا کنید و تعبیر آنها به‌شکل شیب را بگویید. درستی پاسخ‌تان را با نمودار دستی یا کامپیوتری روشن کنید.

۱۲. اگر $f(x,y)=\sqrt{۴-x^۲-۴y^۲}$، $f_x(۱,۰)$ و $f_y(۱,۰)$ را پیدا کنید و تعبیر این عددها را به‌شکل شیب بگویید. درستی پاسخ‌تان را با نمودار دستی یا کامپیوتری روشن کنید.

۱۳-۱۴ f_x و f_y را پیدا کنید و f، f_x و f_y را با دامنه و منظرهایی که به‌کمک آنها بتوانید رابطهٔ میانشان را پیدا کنید رسم کنید.

۱۳. $f(x,y)=x^۲+y^۲+x^۲y$

۱۴. $f(x,y)=xe^{-x^۲-y^۲}$

۱۵-۳۸ مشتقهای جزئی اول تابع موردنظر را پیدا کنید.

۱۵. $f(x,y)=y^۵-۳xy$ ۱۶. $f(x,y)=x^۴y^۳+۸x^۲y$

۱۷. $f(x,t)=e^{-t}\cos \pi x$ ۱۸. $f(x,t)=\sqrt{x}\ln t$

۱۹. $z=(۲x+۳y)^{۱۰}$ ۲۰. $z=\tan xy$

۲۱. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ ۲۲. $f(x,y)=x^y$

۲۳. $w=\sin\alpha\cos\beta$ ۲۴. $w=\dfrac{e^v}{u+v^۲}$

۲۵. $f(r,s)=r\ln(r^۲+s^۲)$ ۲۶. $f(x,t)=\arctan(x\sqrt{t})$

۲۷. $u=te^{w/t}$

۲۸. $f(x,y)=\displaystyle\int_y^x \cos(t^۲)\,dt$

۲۹. $f(x,y,z)=xz-۵x^۲y^۳z^۴$

۳۰. $f(x,y,z)=x\sin(y-z)$

۳۱. $w=\ln(x+۲y+۳z)$ ۳۲. $w=ze^{xyz}$

۳۳. $u=xy\sin^{-۱}(yz)$ ۳۴. $u=x^{y/z}$

۳۵. $f(x,y,z,t)=xyz^۲\tan(yt)$

۳۶. $f(x,y,z,t)=\dfrac{xy^۲}{t+۲z}$

۳۷. $u=\sqrt{x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲}$

۳۸. $u=\sin(x_۱+۲x_۲+\cdots+nx_n)$

۳۹-۴۲ مشتق جزئی مشخص‌شده را پیدا کنید.

۳۹. $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^۲+y^۲})$؛ $f_x(۳,۴)$

۴۰. $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$؛ $f_x(۲,۳)$

۴۱. $f(x,y,z)=\dfrac{y}{x+y+z}$؛ $f_y(۲,۱,-۱)$

۴۲. $f(x,y,z)=\sqrt{\sin^۲ x+\sin^۲ y+\sin^۲ z}$؛ $f_z\left(۰,۰,\frac{\pi}{۴}\right)$

۴۳-۴۴ با استفاده از تعریف مشتقهای جزئی به‌شکل حدهای (۴)، $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ را پیدا کنید.

۴۳. $f(x,y)=xy^۲-x^۳y$

۴۴. $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y^۲}$

۴۵-۴۸ با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ را پیدا کنید.

۴۵. $x^۲+y^۲+z^۲=۳xyz$ ۴۶. $yz=\ln(x+z)$

۴۷. $x-z=\arctan(yz)$ ۴۸. $\sin(xyz)=x+۲y+۳z$

۴۹-۵۰ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ را پیدا کنید.

۴۹. الف) $z=f(x)+g(y)$ ب) $z=f(x+y)$

۵۰. الف) $z=f(x)g(y)$ ب) $z=f(xy)$
ج) $z=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$

۵۱-۵۶ همهٔ مشتقهای جزئی دوم را پیدا کنید.

۵۱. $f(x,y) = x^۳y^۵ + ۲x^۴y$

۵۲. $f(x,y) = \sin^۲(mx+ny)$

۵۳. $w = \sqrt{u^۲+v^۲}$ ۵۴. $v = \dfrac{xy}{x-y}$

۵۵. $z = \arctan\dfrac{x+y}{۱-xy}$ ۵۶. $v = e^{xe^y}$

۵۷-۶۰ ثابت کنید که نتیجهٔ قضیهٔ کلرو برقرار است، یعنی، $u_{xy} = u_{yx}$.

۵۷. $u = x\sin(x+۲y)$ ۵۸. $u = x^۴y^۲ - ۲xy^۵$

۵۹. $u = \ln\sqrt{x^۲+y^۲}$ ۶۰. $u = xye^y$

۶۱-۶۸ مشتق جزئی مشخص‌شده را پیدا کنید.

۶۱. $f(x,y) = ۳xy^۴ + x^۳y^۲$؛ f_{xxy}، f_{yyy}

۶۲. $f(x,t) = x^۲e^{-ct}$؛ f_{ttt}، f_{txx}

۶۳. $f(x,y,z) = \cos(۴x+۳y+۲z)$؛ f_{xyz}، f_{yzz}

۶۴. $f(r,s,t) = r\ln(rs^۲t^۳)$؛ f_{rss}؛ f_{rst}

۶۵. $u = e^{r\theta}\sin\theta$؛ $\dfrac{\partial^۳ u}{\partial r^۲\,\partial\theta}$

۶۶. $z = u\sqrt{v-w}$؛ $\dfrac{\partial^۳ z}{\partial u\,\partial v\,\partial w}$

۶۷. $w = \dfrac{x}{y+۲z}$؛ $\dfrac{\partial^۳ w}{\partial z\,\partial y\,\partial x}$، $\dfrac{\partial^۳ w}{\partial x^۲\,\partial y}$

۶۸. $u = x^ay^bz^c$؛ $\dfrac{\partial^۶ u}{\partial x\,\partial y^۲\,\partial z^۳}$

۶۹. با استفاده از جدول مقدارهای $f(x,y)$ مقدار $f_x(۳,۲)$، $f_x(۳,۲٫۲)$ و $f_{xy}(۳,۲)$ را تخمین بزنید.

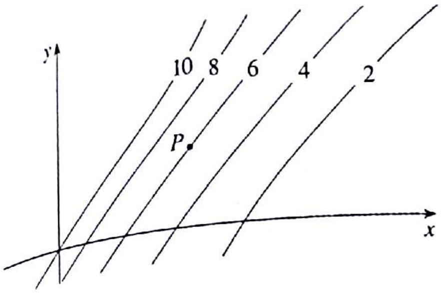
x \ y	۱٫۸	۲٫۰	۲٫۲
۲٫۵	۱۲٫۵	۱۰٫۲	۹٫۳
۳٫۰	۱۸٫۱	۱۷٫۵	۱۵٫۹
۳٫۵	۲۰٫۰	۲۲٫۴	۲۶٫۱

۷۰. منحنیهای تراز تابع f نشان داده شده‌اند. مشخص کنید که مشتقهای جزئی زیر در نقطهٔ P مثبت‌اند یا منفی.

الف) f_x ب) f_y

ج) f_{xx} د) f_{xy}

ه) f_{yy}



۷۱. ثابت کنید که تابع $u = e^{-\alpha^۲k^۲t}\sin kx$ جوابی برای معادلهٔ انتقال حرارت $u_t = \alpha^۲u_{xx}$ است.

۷۲. مشخص کنید که کدام‌یک از تابعهای زیر جوابی برای معادلهٔ لاپلاس $u_{xx}+u_{yy}=۰$ است.

الف) $u = x^۲+y^۲$

ب) $u = x^۲-y^۲$

ج) $u = x^۳+۳xy^۲$

د) $u = \ln\sqrt{x^۲+y^۲}$

ه) $u = \sin x\cosh y + \cos x\sinh y$

و) $u = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

۷۳. ثابت کنید که تابع

$$u = \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}$$

جوابی برای معادلهٔ لاپلاس سه‌بعدی $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=۰$ است.

۷۴. نشان دهید که هر یک از تابعهای زیر جوابی برای معادلهٔ موج $u_{tt} = a^۲u_{xx}$ است.

الف) $u = \sin(kx)\,\sin(akt)$

ب) $u = \dfrac{t}{a^۲t^۲-x^۲}$

ج) $u = (x-at)^۶ + (x+at)^۶$

د) $u = \sin(x-at) + \ln(x+at)$

۷۵. اگر f و g تابعهایی یک‌متغیره و دو بار مشتق‌پذیر باشند، نشان دهید که تابع

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$$

جوابی برای معادلهٔ موجی است که در تمرین ۷۴ داده شده است.

۷۶. اگر $u = e^{a_۱x_۱+a_۲x_۲+\cdots+a_nx_n}$، که در اینجا

$$a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲ = ۱$$

نشان دهید که

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x_۱^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial x_۲^۲} + \cdots + \frac{\partial^۲ u}{\partial x_n^۲} = u$$

۷۷. ثابت کنید که تابع $z = \ln(e^x + e^y)$ جوابی برای معادله‌های دیفرانسیل

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = ۱$$

و

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} - \left(\frac{\partial^۲ z}{\partial x\,\partial y}\right)^۲ = ۰$$

است.

۷۸. نشان دهید که تابع تولید کاب_داگلاس، $P = bL^\alpha K^\beta$، در معادلهٔ

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

صدق می‌کند.

۷۹. با حل‌کردن معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L}$$

نشان دهید که تابع تولید کاب_داگلاس در $P(L, K_۰) = C_۱(K_۰)L^\alpha$ صدق می‌کند (معادلهٔ ۵ را ببینید).

۸۰. دما در نقطهٔ (x, y) روی نوعی صفحهٔ فلزی تخت با $T(x, y) = \frac{۶۰}{۱ + x^۲ + y^۲}$ مشخص می‌شود، که در اینجا T برحسب $^\circ C$ است و x و y برحسب مترند. آهنگ تغییر دما نسبت به فاصله را در نقطهٔ $(۲, ۱)$، (الف) در جهت x و (ب) در جهت y پیدا کنید.

۸۱. مقاومت کل، R، سه مادهٔ رسانا با مقاومتهای $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ که در مداری الکتریکی به‌طور موازی بسته شده‌اند با دستور

$$\frac{۱}{R} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} + \frac{۱}{R_۳}$$

مشخص می‌شود. $\frac{\partial R}{\partial R_۱}$ را پیدا کنید.

۸۲. قانون گازها برای گاز ایده‌آل با جرم ثابت m در دمای مطلق T، فشار P و حجم V، $PV = mRT$ است، که در اینجا R ثابت گازهاست. نشان دهید که

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -۱$$

۸۳. برای گاز ایده‌آل تمرین ۸۲ نشان دهید که

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

۸۴. شاخص باد_سرما با تابع

$$W = ۱۳٫۱۲ + ۰٫۶۲۱۵T - ۱۱٫۳۷v^{۰٫۱۶} + ۰٫۳۹۶۵Tv^{۰٫۱۶}$$

مدل‌سازی شده است، که در اینجا T دما $(^\circ C)$ و v سرعت باد (km/h) است؛ وقتی که $T = -۱۵^\circ C$ و $v = ۳۰\ km/h$، اگر دمای واقعی $۱^\circ C$ کاهش یابد انتظار دارید که دمای ظاهری، W، چقدر افت کند؟ اگر سرعت باد $۱\ km/h$ افزایش یابد چطور؟

۸۵. انرژی جنبشی جسمی به جرم m و سرعت v برابر است با $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$. نشان دهید که

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^۲ K}{\partial v^۲} = K$$

۸۶. اگر a، b و c طول ضلعهای مثلث و A و B و C زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای نظیر آنها باشند، با مشتق‌گیری ضمنی از قاعدهٔ کسینوسها $\frac{\partial A}{\partial a}$، $\frac{\partial A}{\partial b}$، $\frac{\partial A}{\partial c}$ را پیدا کنید.

۸۷. به شما می‌گویند تابعی مانند f وجود دارد که مشتقهای جزئی‌اش $f_x(x, y) = x + ۴y$ و $f_y(x, y) = ۳x - y$ اند. آیا باورتان می‌شود؟

۸۸. سهمی‌وار $z = ۶ - x - x^۲ - ۲y^۲$ صفحهٔ $x = ۱$ را در یک سهمی قطع می‌کند. معادله‌های پارامتری خط مماس بر این سهمی در نقطهٔ $(۱, ۲, -۴)$ را پیدا کنید. با استفاده از کامپیوتر این سهمی‌وار، سهمی و خط مماس را روی یک صفحه نمایش رسم کنید.

۸۹. بیضی‌وار $۴x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ = ۱۶$ صفحهٔ $y = ۲$ را در یک بیضی قطع می‌کند. معادله‌های پارامتری خط مماس بر این بیضی در نقطهٔ $(۱, ۲, ۲)$ را پیدا کنید.

۹۰. در مطالعهٔ ضریب نفوذ سرما معلوم شده است که دما، T، در زمان t (برحسب روز) در عمق x (برحسب متر) را می‌توان با تابع

$$T(x, t) = T_۰ + T_۱e^{-\lambda x}\sin(\omega t - \lambda x)$$

۴.۱۵ تمرین

۱-۶ معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ داده‌شده در نقطهٔ مشخص‌شده را پیدا کنید.

۱. $z = ۴x^{۲} - y^{۲} + ۲y$، $(-۱, ۲, ۴)$

۲. $z = ۳(x - ۱)^{۲} + ۲(y + ۳)^{۲} + ۷$، $(۲, -۲, ۱۲)$

۳. $z = \sqrt{xy}$، $(۱, ۱, ۱)$

۴. $z = y \ln x$، $(۱, ۴, ۰)$

۵. $z = y \cos(x - y)$، $(۲, ۲, ۲)$

۶. $z = e^{x^{۲} - y^{۲}}$، $(۱, -۱, ۱)$

۷-۸ نمودار رویهٔ موردنظر و صفحهٔ مماس بر آن در نقطهٔ داده‌شده را رسم کنید. (دامنه و منظر را طوری پیدا کنید که تصویر خوبی هم از رویه هم از صفحهٔ مماس به‌دست آورید.) سپس آنقدر زوم کنید که رویه و صفحهٔ مماس از یکدیگر غیرقابل تشخیص شوند.

۷. $z = x^{۲} + xy + ۳y^{۲}$، $(۱, ۱, ۵)$

۸. $z = \arctan(xy^{۲})$، $\left(۱, ۱, \frac{\pi}{۴}\right)$

۹-۱۰ نمودار f و صفحهٔ مماسش در نقطهٔ داده‌شده را بکشید. (از سیستم جبری کامپیوتری‌تان هم برای محاسبهٔ مشتقهای جزئی هم برای ترسیم رویه و صفحهٔ مماسش استفاده کنید.) سپس آنقدر زوم کنید که رویه و صفحهٔ مماس از یکدیگر غیرقابل تشخیص شوند.

۹. $f(x, y) = \dfrac{xy \sin(x - y)}{۱ + x^{۲} + y^{۲}}$، $(۱, ۱, ۰)$

۱۰. $f(x, y) = e^{-xy/۱۰}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy})$، $(۱, ۱, ۳e^{-۰/۱})$

۱۱-۱۶ توضیح دهید که تابع موردنظر چرا در نقطهٔ داده‌شده مشتق‌پذیر است. سپس خطی‌سازی $L(x, y)$ تابع در این نقطه را پیدا کنید.

۱۱. $f(x, y) = x\sqrt{y}$، $(۱, ۴)$

۱۲. $f(x, y) = x^{۳}y^{۴}$، $(۱, ۱)$

۱۳. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$، $(۲, ۱)$

۱۴. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{۴y}}$، $(۳, ۰)$

۱۵. $f(x, y) = e^{-xy} \cos y$، $(\pi, ۰)$

۱۶. $f(x, y) = \sin(۲x + ۳y)$، $(-۳, ۲)$

۱۷-۱۸ تقریب خطی داده‌شده در $(۰, ۰)$ را ثابت کنید.

۱۷. $\dfrac{۲x + ۳}{۴y + ۱} \approx ۳ + ۲x - ۱۲y$

۱۸. $\sqrt{y + \cos^{۲} x} \approx ۱ + \frac{۱}{۲}y$

۱۹. تقریب خطی تابع $f(x,y)=\sqrt{۲۰-x^۲-۷y^۲}$ در $(۲,۱)$ را پیدا کنید و با استفاده از آن $f(۱/۹۵,۱/۰۸)$ را تخمین بزنید.

۲۰. تقریب خطی تابع $f(x,y)=\ln(x-۳y)$ در $(۷,۲)$ را پیدا کنید و با استفاده از آن $f(۶/۹,۲/۰۶)$ را تخمین بزنید. درستی پاسختان را با ترسیم f و صفحهٔ مماس روشن کنید.

۲۱. تقریب خطی تابع

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$$

در $(۳,۲,۶)$ را پیدا کنید و با استفاده از آن عدد

$$\sqrt{(۳/۰۲)^۲+(۱/۹۷)^۲+(۵/۹۹)^۲}$$

را تخمین بزنید.

۲۵-۳۰ دیفرانسیل تابع موردنظر را پیدا کنید.

۲۵. $z = x^{۳} \ln(y^{۲})$

۲۶. $v = y \cos xy$

۲۷. $m = p^{۵} q^{۳}$

۲۸. $T = \dfrac{v}{۱ + uvw}$

۲۹. $R = \alpha\beta^{۲} \cos \gamma$

۳۰. $w = xye^{xz}$