

تمرین ۱.۸

۲-۱ انتگرال موردنظر را با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء و انتخابی‌های مشخص شده برای u و dv پیدا کنید.

۱. $\int x^2 \ln x \, dx$; $u = \ln x$, $dv = x^2 \, dx$

۲. $\int \theta \cos \theta \, d\theta$; $u = \theta$, $dv = \cos \theta \, d\theta$

۳-۲ انتگرال موردنظر را پیدا کنید.

۴. $\int x e^{-x} \, dx$

۳. $\int x \cos 5x \, dx$

۶. $\int t \sin 2t \, dt$

۵. $\int r e^{r/2} \, dr$

۸. $\int x^2 \cos mx \, dx$

۷. $\int x^2 \sin \pi x \, dx$

۱۰. $\int \sin^{-1} x \, dx$

۹. $\int \ln(2x+1) \, dx$

۱۲. $\int p^5 \ln p \, dp$

۱۱. $\int \arctan 4t \, dt$

۱۴. $\int s^2 s \, ds$

۱۳. $\int t \sec^2 2t \, dt$

۱۶. $\int t \sinh mt \, dt$

۱۵. $\int (\ln x)^2 \, dx$

۱۸. $\int e^{-\theta} \cos 2\theta \, d\theta$

۱۷. $\int e^{2\theta} \sin 3\theta \, d\theta$

۲۰. $\int_0^1 (x^2 + 1)e^{-x} \, dx$

۱۹. $\int_0^\pi t \sin 3t \, dt$

۲۲. $\int_1^4 \frac{\ln y}{\sqrt{y}} \, dy$

۲۱. $\int_0^1 t \cosh t \, dt$

۲۴. $\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$

۲۳. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

۲۶. $\int_1^{\sqrt{e}} \arctan \frac{1}{x} \, dx$

۲۵. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}} \, dy$

۲۸. $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^2} \, dx$

۲۷. $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x \, dx$

۳۰. $\int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{4+r^2}} \, dr$

۲۹. $\int \cos x \ln(\sin x) \, dx$

۳۲. $\int_0^t e^s \sin(t-s) \, ds$

۳۱. $\int_1^2 x^2 (\ln x)^2 \, dx$

۳۳-۳۸ ابتدا جانشینی انجام دهید و سپس با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء انتگرال موردنظر را حساب کنید.

۳۴. $\int t^2 e^{-t^2} \, dt$

۳۳. $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

۳۶. $\int_0^\pi e^{\cos t} \sin 2t \, dt$

۳۵. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^2 \cos(\theta^2) \, d\theta$

۳۸. $\int \sin(\ln x) \, dx$

۳۷. $\int x \ln(1+x) \, dx$

۳۹-۴۲ انتگرال نامعین موردنظر را پیدا کنید. با ترسیم تابع و بادشنتی نشان دهید که پاسختان قابل قبول است (فرض کنید $C=0$).

۴۴. الف) دستور تحویل

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

را ثابت کنید.

ب) با استفاده از قسمت (الف)، $\int \cos^2 x dx$ را پیدا کنید.

ج) با استفاده از قسمت‌های (الف) و (ب)، $\int \cos^4 x dx$ را پیدا کنید.

۴۵. الف) با استفاده از دستور تحویل مثال ۶ نشان دهید

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx$$

که در اینجا n عددی طبیعی است و $n \geq 2$.

ب) با استفاده از قسمت (الف)،

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$$

را پیدا کنید.

ج) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که، برای توانهای با نمای فرد سینوس،

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1)}$$

۴۶. ثابت کنید که، برای توانهای با نمای زوج سینوس،

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} \frac{\pi}{2}$$

۴۷-۵۰ با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء دستور تحویل مورد نظر را ثابت کنید.

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx \quad .۴۷$$

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad .۴۸$$

$$(n \neq 1) \int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx \quad .۴۹$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx \quad .۵۰$$

(n \neq 1)

۵۱. با استفاده از تمرین ۴۷، $\int (\ln x)^3 dx$ را پیدا کنید.

۵۲. با استفاده از تمرین ۴۸، $\int x^4 e^x dx$ را پیدا کنید.

۵۳-۵۴ مساحت ناحیه محدود به منحنیهای داده شده را پیدا کنید.

$$x = 5 \quad , y = 0 \quad , y = x e^{-0,4x} \quad .۵۳$$

$$y = x \ln x \quad , y = 5 \ln x \quad .۵۴$$

تمرین ۲.۸

۴۹-۱ انتگرال موردنظر را پیدا کنید.

- | | | | |
|---|--|--|---|
| $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \tan^{\circ} x \sec^{\circ} x dx$.۳۰ | $\int \tan^{\circ} x \sec x dx$.۲۹ | $\int \sin^{\circ} x \cos^{\circ} x dx$.۲ | $\int \sin^{\circ} x \cos^{\circ} x dx$.۱ |
| $\int \tan^{\circ}(ay) dy$.۳۲ | $\int \tan^{\circ} x dx$.۳۱ | $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^{\circ} x dx$.۴ | $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \sin^{\circ} x \cos^{\circ} x dx$.۳ |
| $\int \tan^{\circ} x \sec x dx$.۳۴ | $\int \frac{\tan^{\circ} \theta}{\cos^{\circ} \theta} d\theta$.۳۳ | $\int \frac{\sin^{\circ}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$.۶ | $\int \sin^{\circ}(\pi x) \cos^{\circ}(\pi x) dx$.۵ |
| $\int \frac{\sin \phi}{\cos^{\circ} \phi} d\phi$.۳۶ | $\int x \sec x \tan x dx$.۳۵ | $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{\circ}(\theta) d\theta$.۸ | $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^{\circ} \theta d\theta$.۷ |
| $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^{\circ} x dx$.۳۸ | $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^{\circ} x dx$.۳۷ | $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^{\circ} \theta d\theta$.۱۰ | $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{\circ}(\theta) dt$.۹ |
| $\int \csc^{\circ} x \cot^{\circ} x dx$.۴۰ | $\int \cot^{\circ} \alpha \csc^{\circ} \alpha d\alpha$.۳۹ | $\int x \cos^{\circ} x dx$.۱۲ | $\int (1 + \cos \theta)^{\circ} d\theta$.۱۱ |
| $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc^{\circ} x dx$.۴۲ | $\int \csc x dx$.۴۱ | $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{\circ} t \cos^{\circ} t dt$.۱۴ | $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{\circ} x \cos^{\circ} x dx$.۱۳ |
| $\int \cos \pi x \cos^{\circ} \pi x dx$.۴۴ | $\int \sin \lambda x \cos \delta x dx$.۴۳ | $\int \cos \theta \cos^{\circ}(\sin \theta) d\theta$.۱۶ | $\int \frac{\cos^{\circ} \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} d\alpha$.۱۵ |
| $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin^{\circ} x} dx$.۴۶ | $\int \sin \delta \theta \sin \theta d\theta$.۴۵ | $\int \cot^{\circ} \theta \sin^{\circ} \theta d\theta$.۱۸ | $\int \cos^{\circ} x \tan^{\circ} x dx$.۱۷ |
| $\int \frac{dx}{\cos x - 1}$.۴۸ | $\int \frac{1 - \tan^{\circ} x}{\sec^{\circ} x} dx$.۴۷ | $\int \cos^{\circ} x \sin^{\circ} x dx$.۲۰ | $\int \frac{\cos x + \sin^{\circ} x}{\sin x} dx$.۱۹ |
| | $\int t \sec^{\circ}(t^{\circ}) \tan^{\circ}(t^{\circ}) dt$.۴۹ | $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec^{\circ} \frac{t}{\sqrt{t}} dt$.۲۲ | $\int \sec^{\circ} x \tan x dx$.۲۱ |
| | | $\int (\tan^{\circ} x + \tan^{\circ} x) dx$.۲۴ | $\int \tan^{\circ} x dx$.۲۳ |
| | | $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec^{\circ} \theta \tan^{\circ} \theta d\theta$.۲۶ | $\int \sec^{\circ} t dt$.۲۵ |
| | | $\int \tan^{\circ}(\sqrt{x}) \sec^{\circ}(\sqrt{x}) dx$.۲۸ | $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \tan^{\circ} x \sec^{\circ} x dx$.۲۷ |

۵۰. اگر $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \tan^{\circ} x \sec x dx = I$ مقدار $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \tan^{\circ} x \sec x dx$ را بر حسب I بنویسید.

۵۱-۵۴ انتگرال نامعین موردنظر را پیدا کنید و با ترسیم انتگرالده و پاداشتی تحقیق کنید که پاسختان قابل قبول است (فرض کنید $C = 0$).

۶۱-۶۴ حجمی را که از دوران دادن ناحیه محدود به منحنیهای داده شده حول محور مشخص شده به دست می آید پیدا کنید.

$$۶۱. \quad y = \sin x, \quad y = 0, \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi \quad \text{حول محور } x$$

$$۶۲. \quad y = \sin^2 x, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \text{حول محور } x$$

$$۶۳. \quad y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{حول } y = 1$$

$$۶۴. \quad y = \sec x, \quad y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{حول } y = -1$$

تمرین ۳.۸

۳-۱ انتگرال موردنظر را با استفاده از جانشینی مثلثاتی مشخص شده پیدا کنید. مثلث قائم الزاویه موردنظر را رسم کنید و علامت‌گذاری کنید.

$$x = 3 \sec \theta \quad ; \quad \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} dx \quad .1$$

$$x = 3 \sin \theta \quad ; \quad \int x^2 \sqrt{9 - x^2} dx \quad .2$$

$$x = 3 \tan \theta \quad ; \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx \quad .3$$

۳-۴ انتگرال موردنظر را پیدا کنید.

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx \quad .4$$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx \quad .6 \quad \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^2 \sqrt{t^2 - 1}} dt \quad .5$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 100}} dx \quad .8 \quad \int \frac{1}{x^2 \sqrt{25 - x^2}} dx \quad .7$$

$$\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 2}} dt \quad .10 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}} \quad .9$$

$$\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 4} dx \quad .12 \quad \int \sqrt{1 - 2x^2} dx \quad .11$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{5 - u^2}} \quad .14 \quad \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} dx \quad .13$$

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{2/2} \frac{dx}{\sqrt{2} x^2 \sqrt{9x^2 - 1}} \quad .16 \quad \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad .15$$

$$\int \frac{dx}{((ax)^2 - b^2)^{3/2}} \quad .18 \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx \quad .17$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{25 - t^2}} dt \quad .20 \quad \int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} dx \quad .19$$

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx \quad .22 \quad \int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{9 - 25x^2}} dx \quad .21$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}} \quad .24 \quad \int \sqrt{5 + 4x - x^2} dx \quad .23$$

$$\int \frac{x^2}{(3 + 4x - 4x^2)^{3/2}} dx \quad .26 \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx \quad .25$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx \quad .28 \quad \int \sqrt{x^2 + 2x} dx \quad .27$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \sin^2 t}} dt \quad .30 \quad \int x \sqrt{1 - x^2} dx \quad .29$$

۳.۱ الف) با استفاده از جانشینی مثلثاتی نشان دهید که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

ب) با استفاده از جانشینی هذلولوی $x = a \sinh t$ نشان دهید که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

۶-۱ شکل تجزیه شده تابع موردنظر به کسرهای جزئی را بنویسید (مانند مثال ۷). مقدار عددی ضریبها را مشخص نکنید.

$$\int \frac{x^2 - 4x - 10}{x^2 - x - 6} dx \quad .16 \quad \int_2^4 \frac{x^2 - 2x^2 - 4}{x^2 - 2x^2} dx \quad .15$$

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - x} dx \quad .18 \quad \int_1^2 \frac{4y^2 - 7y - 12}{y(y+2)(y-2)} dy \quad .17$$

$$\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)} dx \quad .19$$

$$\int \frac{x^2 - 5x + 16}{(2x+1)(x-2)^2} dx \quad .20$$

$$\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2} \quad .22 \quad \int \frac{x^2 + 4}{x^2 + 4} dx \quad .21$$

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} dx \quad .24 \quad \int \frac{5x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x^2} dx \quad .23$$

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx \quad .26 \quad \int \frac{1}{(x-1)(x^2 + 9)} dx \quad .25$$

$$\int \frac{x^2 + x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} dx \quad .27$$

$$\int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2 + 1)} dx \quad .28$$

$$\int \frac{3x^2 + x + 4}{x^2 + 2x^2 + 2} dx \quad .30 \quad \int \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 5} dx \quad .29$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 4x + 13} dx \quad .32 \quad \int \frac{1}{x^2 - 1} dx \quad .31$$

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \quad .34 \quad \int \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x^2 + 3} dx \quad .33$$

$$\int \frac{x^2 + 2x^2 + 1}{x^2 + 5x^2 + 5x} dx \quad .36 \quad \int \frac{dx}{x(x^2 + 4)^2} \quad .35$$

$$\frac{1}{x^2 + 2x^2 + x} \quad (ب)$$

$$\frac{2x}{(x+3)(3x+1)} \quad (الف)$$

$$\frac{x^2}{x^2 + x + 2} \quad (ب)$$

$$\frac{x}{x^2 + x - 2} \quad (الف)$$

$$\frac{1}{(x^2 - 9)^2} \quad (ب)$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + 4x^2} \quad (الف)$$

$$\frac{2x + 1}{(x+1)^2(x^2 + 4)^2} \quad (ب)$$

$$\frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} \quad (الف)$$

$$\frac{t^2 + t^2 + 1}{(t^2 + 1)(t^2 + 4)^2} \quad (ب)$$

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} \quad (الف)$$

$$\frac{x^2}{(x^2 + x)(x^2 - x + 3)} \quad (الف)$$

$$\frac{1}{x^2 - x^2} \quad (ب)$$

۳۸-۷ انتگرال موردنظر را پیدا کنید.

$$\int \frac{r^2}{r + 4} dr \quad .8$$

$$\int \frac{x}{x - 6} dx \quad .7$$

$$\int \frac{1}{(t+4)(t-1)} dt \quad .10$$

$$\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)} dx \quad .9$$

$$\int \frac{x-1}{x^2 + 3x + 2} dx \quad .12$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2 - 1} dx \quad .11$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx \quad .14$$

$$\int \frac{ax}{x^2 - bx} dx \quad .13$$

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx \quad .38 \quad \int \frac{x^2 - 3x + 7}{(x^2 - 4x + 6)^2} dx \quad .37$$

۳۹-۵۰ جانشینی‌ای انجام دهید تا انتگرالده به شکل تابعی گویا درآید و سپس انتگرال موردنظر را پیدا کنید.

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x} \quad .40 \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx \quad .39$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \quad .42 \quad \int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx \quad .41$$

$$\int_{1/3}^2 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x} dx \quad .44 \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad .43$$

(راهنمایی: قرار دهید $u = \sqrt{x}$) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx \quad .45$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2} dx \quad .47 \quad \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} dx \quad .46$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x} dx \quad .48$$

$$\int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t + 3 \tan t + 2} dt \quad .49$$

$$\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)} dt \quad .50$$

۵۱-۵۲ با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء، به همراه تکنیکهای این بخش، انتگرال موردنظر را پیدا کنید.

$$\int x \tan^{-1} x dx \quad .52 \quad \int \ln(x^2 - x + 2) dx \quad .51$$

۸۰-۱ انتگرال موردنظر را پیدا کنید.

- | | | | |
|--|--|---|--|
| $\int \sin \sqrt{at} dt \quad .28$ | $\int \frac{dx}{1+e^x} \quad .27$ | $\int \frac{\sin^r x}{\cos x} dx \quad .2$ | $\int \cos x(1 + \sin^r x) dx \quad .1$ |
| $\int_{-r}^r x^r - rx dx \quad .30$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 w - 1}{w + r} dw \quad .29$ | $\int \tan^r \theta d\theta \quad .4$ | $\int \frac{\sin x + \sec x}{\tan x} dx \quad .3$ |
| $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3} dx \quad .32$ | $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \quad .31$ | $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}} dx \quad .6$ | $\int_0^r \frac{2t}{(t-3)^2} dt \quad .5$ |
| $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{1+r \cot x}{r - \cot x} dx \quad .34$ | $\int \sqrt{r-2x-x^2} dx \quad .33$ | $\int x \csc x \cot x dx \quad .8$ | $\int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan y}}{1+y^2} dy \quad .7$ |
| $\int \sin^r x \cos^r x dx \quad .36$ | $\int_{-1}^1 x^r \sin x dx \quad .35$ | $\int_0^r \frac{x-1}{x^2-4x-5} dx \quad .10$ | $\int_1^r r^r \ln r dr \quad .9$ |
| $\int_0^{\pi/2} \tan^{\frac{1}{2}} \theta \sec^r \theta d\theta \quad .38$ | $\int_0^{\pi/2} \cos^r \theta \tan^r \theta d\theta \quad .37$ | $\int \frac{x}{x^2+x^2+1} dx \quad .12$ | $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx \quad .11$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}} dy \quad .40$ | $\int \frac{\sec \theta \tan \theta}{\sec^r \theta - \sec \theta} d\theta \quad .39$ | $\int \frac{x^r}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad .14$ | $\int \sin^r \theta \cos^{\frac{1}{2}} \theta d\theta \quad .13$ |
| $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx \quad .42$ | $\int \theta \tan^r \theta d\theta \quad .41$ | $\int_0^{\sqrt{r}/2} \frac{x^r}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad .16$ | $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{r/2}} \quad .15$ |
| $\int \sqrt{1+e^x} dx \quad .44$ | $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx \quad .43$ | $\int \frac{e^{rt}}{1+e^{rt}} dt \quad .18$ | $\int x \sin^r x dx \quad .17$ |
| $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x} dx \quad .46$ | $\int x^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \quad .45$ | $\int e^r dx \quad .20$ | $\int e^{x+e^x} dx \quad .19$ |
| $\int \frac{x}{x^2-a^2} dx \quad .48$ | $\int x^r(x-1)^{-r} dx \quad .47$ | $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}} dx \quad .22$ | $\int \arctan \sqrt{x} dx \quad .21$ |
| $\int \frac{1}{x^r \sqrt{rx+1}} dx \quad .50$ | $\int \frac{1}{x\sqrt{rx+1}} dx \quad .49$ | $\int \ln(x^r-1) dx \quad .24$ | $\int_0^1 (1+\sqrt{x})^r dx \quad .23$ |
| $\int \frac{dx}{x(x^r+1)} \quad .52$ | $\int \frac{1}{x\sqrt{rx^2+1}} dx \quad .51$ | $\int \frac{rx^r-2}{x^r-2x-1} dx \quad .26$ | $\int \frac{rx^r-2}{x^r-2x-1} dx \quad .25$ |
| $\int (x+\sin x)^r dx \quad .54$ | $\int x^r \sinh mx dx \quad .53$ | | |

س ... تکنیکهای انتگرال گیری

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx \quad .70$$

$$\int \frac{4^x + 10^x}{2^x} dx \quad .72$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^4} \quad .74$$

$$\int (x^2 - bx) \sin 2x dx \quad .76$$

$$\int \frac{\sec x \cos 2x}{\sin x + \sec x} dx \quad .78$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \quad .80$$

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx \quad .69$$

$$\int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad .71$$

$$\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)} dx \quad .73$$

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx \quad .75$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \quad .77$$

$$\int x \sin^2 x \cos x dx \quad .79$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}} \quad .56$$

$$\int \frac{x \ln x}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad .58$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4x^2-1}} \quad .60$$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx \quad .62$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x} dx \quad .64$$

$$\int_1^2 \frac{u^2+1}{u^2-u^4} du \quad .66$$

$$\int \frac{1}{1+2e^x - e^{-x}} dx \quad .68$$

$$\int \frac{dx}{x+x\sqrt{x}} \quad .55$$

$$\int x\sqrt{x+c} dx \quad .57$$

$$\int \cos x \cos^2(\sin x) dx \quad .59$$

$$\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} dx \quad .61$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx \quad .63$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} dx \quad .65$$

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx \quad .67$$

۸۱. تابعهای $y = x^2 e^{x^2}$ و $y = e^{x^2}$ یادمشته. مقادیر: \dots

۱. توضیح دهید که چرا هر یک از انتگرالهای زیر ناسره است.

الف) $\int_1^{\infty} x^x e^{-x^x} dx$ (ب) $\int_0^{\pi/2} \sec x dx$

ج) $\int_0^2 \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx$ (د) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 5} dx$

۲. کدام یک از انتگرالهای زیر ناسره است؟ چرا؟

الف) $\int_1^2 \frac{1}{2x-1} dx$ (ب) $\int_0^1 \frac{1}{2x-1} dx$

ج) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ (د) $\int_1^2 \ln(x-1) dx$

۳. مساحت زیر منحنی $y = \frac{1}{x^2}$ از $x = 1$ تا $x = t$ را پیدا کنید و اگر $t = 10, 100, 1000$ مقدار این مساحت را حساب کنید. سپس به ازای $x \geq 1$ مساحت کل زیر این منحنی را پیدا کنید.

۴. الف) نمودار تابعهای $f(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ را در کادرهای $[0, 10]$ در $[0, 1]$ و $[0, 100]$ در $[0, 1]$ رسم کنید.

ب) مساحت زیر نمودارهای f و g از $x = 1$ تا $x = t$ را پیدا کنید و اگر $t = 10, 100, 10^4, 10^6, 10^{10}, 10^{20}$ مقدار این مساحتها را حساب کنید.

ج) مساحت کل زیر این منحنی به ازای $x \geq 1$ را، به شرطی که وجود داشته باشد، حساب کنید.

۵-۴۰ مشخص کنید که هر یک از انتگرالهای زیر همگراست یا واگرا. آنهایی را که همگرا هستند حساب کنید.

۵. $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2} dx$ ۶. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2x-5} dx$

۷. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}} dw$

۹. $\int_2^{\infty} e^{-y/2} dy$

۱۱. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

۱۳. $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

۱۵. $\int_{2\pi}^{\infty} \sin \theta d\theta$

۱۷. $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x} dx$

۱۹. $\int_0^{\infty} s e^{-5s} ds$

۲۱. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

۲۳. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6} dx$

۲۵. $\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

۲۷. $\int_0^1 \frac{3}{x^5} dx$

۲۹. $\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$

۳۱. $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$

۸. $\int_1^{\infty} \frac{x}{(x^2+2)^2} dx$

۱۰. $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t} dt$

۱۲. $\int_{-\infty}^{\infty} (2-v^2) dv$

۱۴. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

۱۶. $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t dt$

۱۸. $\int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2+2z+2}$

۲۰. $\int_{-\infty}^{\infty} r e^{r/2} dr$

۲۲. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

۲۴. $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+3} dx$

۲۶. $\int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$

۲۸. $\int_2^2 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$

۳۰. $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^2} dx$

۳۲. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(ب) با استفاده از قضیه مقایسه وقتی که $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ نشان دهید که $\int_1^{\infty} g(x) dx$ واگراست.

(ج) درستی قسمت (ب) را با ترسیم f و g به ازای $2 \leq x \leq 20$ روی یک صفحه نمایش نشان دهید. با استفاده از نمودارتان از نظر شهودی توضیح دهید که چرا $\int_1^{\infty} g(x) dx$ واگراست.

۴۹-۵۴ با استفاده از قضیه مقایسه مشخص کنید که انتگرال موردنظر همگراست یا واگرا.

$$\int_1^{\infty} \frac{2 + e^{-x}}{x} dx \quad .50 \quad \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx \quad .49$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{2 + e^x} dx \quad .52 \quad \int_1^{\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x}} dx \quad .51$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx \quad .54 \quad \int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}} dx \quad .53$$

۵۵. انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

به دو دلیل ناسره است: بازه $[0, \infty)$ نامتناهی است و انتگرالده در 0 ناپیوستگی نامتناهی دارد. این انتگرال را با نوشتن آن به شکل مجموعی از انتگرالهای ناسره نوع دوم و نوع اول به شکل زیر حساب کنید:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx \\ = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx \end{aligned}$$

۵۶. مقدار

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

را به همان روش تمرین ۵۵ حساب کنید.

۵۷-۵۹ مقدرهایی از p را پیدا کنید که انتگرال موردنظر به ازای آنها همگراست و این انتگرال را به ازای این مقدرهای p حساب کنید.

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx \quad .58 \quad \int_1^1 \frac{1}{x^p} dx \quad .57$$

$$\int_1^1 x^p \ln x dx \quad .59$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{y-1}} dy \quad .34 \quad \int_0^{2\pi} (x-1)^{-1/5} dx \quad .33$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \csc x dx \quad .36 \quad \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} \quad .35$$

$$\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \quad .38 \quad \int_{-1}^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \quad .37$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad .40 \quad \int_0^2 z^2 \ln z dz \quad .39$$

۴۱-۴۶ ناحیه موردنظر را رسم کنید و مساحتش را (به شرطی که متناهی باشد) حساب کنید.

$$S = \{(x, y) \mid x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x\} \quad .41$$

$$S = \{(x, y) \mid x \geq -2, 0 \leq y \leq e^{-x/2}\} \quad .42$$

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{x^2 + 9}\} \quad .43$$

$$S = \{(x, y) \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq \frac{x}{x^2 + 9}\} \quad .44$$

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \sec^2 x\} \quad .45$$

$$S = \{(x, y) \mid -2 < x \leq 0, 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x+2}}\} \quad .46$$

۴۷ الف) اگر $g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ با استفاده از ماشین حساب یا کامپیوترتان جدولی از مقدرهای تقریبی $\int_1^t g(x) dx$ به ازای

$$t = 2, 5, 10, 100, 1000, 10000$$

درست کنید. آیا به نظر می رسد که $\int_1^{\infty} g(x) dx$ همگراست؟

(ب) با استفاده از قضیه مقایسه وقتی که $f(x) = \frac{1}{x^2}$ نشان دهید که $\int_1^{\infty} g(x) dx$ همگراست.

(ج) درستی قسمت (ب) را با ترسیم f و g به ازای $1 \leq x \leq 10$ روی یک صفحه نمایش نشان دهید. با استفاده از نمودارتان از نظر شهودی توضیح دهید که چرا $\int_1^{\infty} g(x) dx$ همگراست.

۴۸ الف) اگر $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ با استفاده از ماشین حساب یا کامپیوترتان جدولی از مقدرهای تقریبی $\int_2^t g(x) dx$ به ازای $t = 5, 10, 100, 1000, 10000$ به نظر می رسد که $\int_1^{\infty} g(x) dx$ همگراست یا واگرا؟

$$\int x e^{-x} dx$$

$$\int (\ln x)^2 dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\int \cos x \ln(\sin x) dx$$

$$\int (\ln x)^n dx$$

$$\int x^n e^n dx$$

$$\int \tan^n x dx$$

$$\int x \ln(1+x) dx$$

$$\int \sin(\ln x) dx$$

$$\int e^{\cos x} \sin x dx$$

$$\int x^n (\ln x)^2 dx$$

$$\int \frac{\sin^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int (1 + \cos x)^2 dx$$

$$\int t \sec^2(t^2) \tan^2(t^2) dt$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$\int \cos x \cos^2(\sin x) dx$$

$$\int \tan^2 x \sec x dx$$

$$\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$\int x \cos^2 x dx$$