

تمرین

۱.۱۱

۴-۱ با استفاده از معادله‌های پارامتری داده شده برای ترسیم نقطه‌ها منحنی موردنظر را رسم کنید. با پیکان جهتی را که منحنی با زیاد شدن t در این امتداد رسم می‌شود مشخص کنید.

$$0 \leq t \leq 5, \quad y = t^2 - 4t, \quad x = 1 + \sqrt{t} \quad 1.$$

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad y = t - \cos t, \quad x = 2 \cos t \quad 2.$$

$$-\pi \leq t \leq \pi, \quad y = t^2, \quad x = 5 \sin t \quad 3.$$

$$-2 \leq t \leq 2, \quad y = e^t - t, \quad x = e^{-t} + t \quad 4.$$

ب) پارامتر را حذف کنید تا معادله دکارتی منحنی را به دست آورید.

$$5. \quad y = 2t + 1, \quad x = 3t - 5$$

$$6. \quad y = 5 - 2t, \quad x = 1 + t, \quad -2 \leq t \leq 3$$

$$7. \quad y = 5 - 2t, \quad x = t^2 - 2, \quad -2 \leq t \leq 4$$

$$8. \quad y = 2 - t^2, \quad x = 1 + 3t$$

$$9. \quad y = 1 - t, \quad x = \sqrt{t}$$

$$10. \quad y = t^2, \quad x = t^2$$

۱۱-۱۸

الف) پارامتر را حذف کنید تا معادله دکارتی منحنی را به دست آورید.

ب) منحنی را رسم کنید و با پیکان جهتی را که منحنی با زیاد شدن پارامتر

در این جهت رسم می‌شود مشخص کنید.

الف) با استفاده از معادله‌های پارامتری داده شده برای ترسیم نقطه‌ها منحنی موردنظر را رسم کنید. با پیکان جهتی را که منحنی با زیاد شدن t در این امتداد رسم می‌شود مشخص کنید.

۱۰-۱

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad ,y = \cos \theta \quad ,x = \sin \theta \quad .11$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad ,y = 5 \sin \theta \quad ,x = 4 \cos \theta \quad .12$$

$$0 < t < \frac{\pi}{2} \quad ,y = \csc t \quad ,x = \sin t \quad .13$$

$$y = e^{2t} \quad ,x = e^t - 1 \quad .14$$

$$y = t + 1 \quad ,x = e^{2t} \quad .15$$

$$t \geq 1 \quad ,y = \sqrt{t} \quad ,x = \ln t \quad .16$$

$$y = \cosh t \quad ,x = \sinh t \quad .17$$

$$y = 5 \sinh t \quad ,x = 2 \cosh t \quad .18$$

۱۹-۲۲ حرکت ذره‌ای را که موقعیتش (x, y) است، وقتی که t در بازه داده شده تغییر می‌کند، توصیف کنید.

$$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \quad ,y = 1 + 2 \sin t \quad ,x = 3 + 2 \cos t \quad .19$$

$$0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \quad ,y = 4 + \cos t \quad ,x = 2 \sin t \quad .20$$

$$-\pi \leq t \leq 5\pi \quad ,y = 2 \cos t \quad ,x = 5 \sin t \quad .21$$

$$-2\pi \leq t \leq 2\pi \quad ,y = \cos^2 t \quad ,x = \sin t \quad .22$$

۳۷-۳۸ منحنیهایی را که معادله‌های پارامتری داده شده نشان می‌دهند مقایسه کنید. چه فرقی با هم دارند؟

$$۳۷. \text{ الف) } x = t^3, y = t^2$$

$$\text{ب) } x = t^6, y = t^4$$

$$\text{ج) } x = e^{-3t}, y = e^{-2t}$$

$$۳۸. \text{ الف) } x = t, y = t^{-2}$$

$$\text{ب) } x = \cos t, y = \sec^2 t$$

$$\text{ج) } x = e^t, y = e^{-2t}$$

۲-۱ $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

$$y = t^2 + t \quad x = t \sin t \quad ۱$$

$$y = \sqrt{t}e^{-t} \quad x = \frac{1}{t} \quad ۲$$

۳-۶ معادله مماس بر منحنی موردنظر را در نقطه متناظر با مقدار داده شده پارامتر پیدا کنید.

$$t = -1 \quad y = t^3 + t \quad x = t^2 + 1 \quad ۳$$

$$t = 1 \quad y = 1 + t^2 \quad x = t - t^{-1} \quad ۴$$

$$t = 1 \quad y = t - \ln t^2 \quad x = e^{\sqrt{t}} \quad ۵$$

$$\theta = 0 \quad y = \sin \theta + \cos 2\theta \quad x = \cos \theta + \sin 2\theta \quad ۶$$

۷-۸ معادله خط مماس بر منحنی موردنظر در نقطه داده شده را به دو روش پیدا کنید: (الف) بدون حذف کردن پارامتر و (ب) ابتدا پارامتر را حذف کردن.

$$(1, 3) \quad y = t^2 + 2 \quad x = 1 + \ln t \quad ۷$$

$$(1, \sqrt{2}) \quad y = \sec \theta \quad x = \tan \theta \quad ۸$$

۹-۱۰ معادله مماس (های) بر منحنی موردنظر در نقطه داده شده را پیدا کنید. سپس منحنی و مماس (ها) را رسم کنید.

$$(0, 0) \quad y = t^2 + t \quad x = 6 \sin t \quad ۹$$

$$(-1, 1) \quad y = \sin t + \sin 2t \quad x = \cos t + \cos 2t \quad ۱۰$$

۱۱-۱۶ $\frac{d^2y}{dx^2}$ و $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید. به ازای چه مقدارهایی از t تقعر منحنی رو به بالاست؟

$$y = t^2 + t^3 \quad x = 4 + t^2 \quad ۱۱$$

$$y = t^2 - 1 \quad x = t^3 - 12t \quad ۱۲$$

$$y = t + e^{-t} \quad x = t - e^t \quad ۱۳$$

$$y = t - \ln t \quad x = t + \ln t \quad ۱۴$$

$$0 < t < 2\pi \quad y = 3 \cos t \quad x = 2 \sin t \quad ۱۵$$

$$0 < t < \pi \quad y = \cos t \quad x = \cos 2t \quad ۱۶$$

۱۷-۲۰ نقطه‌هایی را روی منحنی موردنظر پیدا کنید که در آنها مماس افقی یا قائم است. اگر ابزار رسامی دارید، منحنی را رسم کنید تا از پاسختان مطمئن شوید.

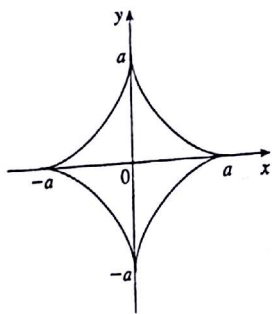
۳۰. معادله مماسهای بر منحنی $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t^2 + 1$ را که از نقطه $(4, 3)$ می‌گذرند پیدا کنید.

۳۱. با استفاده از معادله‌های پارامتری بیضی، $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، مساحت ناحیه محصور به آن را پیدا کنید.

۳۲. مساحت ناحیه محصور به منحنی $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$ و محور y را پیدا کنید.

۳۳. مساحت ناحیه محصور به محور x و منحنی $x = 1 + e^t$, $y = t - t^2$ را پیدا کنید.

۳۴. مساحت ناحیه محصور به ستاره‌وار $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ را پیدا کنید. (ستاره‌وار را در پروژه آزمایشگاهی در صفحه ۸۲۵ بررسی کرده‌ایم.)



۳۵. مساحت ناحیه زیر یک هلال چرخه‌زاد تمرین ۴۰ بخش ۱.۱۱ را در حالتی که $d < r$ پیدا کنید.

۳۶. فرض کنید R ناحیه محصور به حلقه منحنی مثال ۱ باشد.

(الف) مساحت R را پیدا کنید.

(ب) اگر R را حول محور x دوران دهیم، حجم جسم سه‌بعدی حاصل را پیدا کنید.

(ج) مرکزوار R را پیدا کنید.

۳۷-۴۰. انتگرالی بنویسید که طول منحنی موردنظر را نشان دهد. سپس با استفاده از ماشین‌حسابان این طول را با دقت چهار رقم اعشار پیدا کنید.

۳۷. $1 \leq t \leq 2$ $y = \frac{4}{3}t^{3/2}$, $x = t - t^2$

۳۸. $-2 \leq t \leq 2$ $y = t^2$, $x = 1 + e^t$

۳۹. $0 \leq t \leq 2\pi$ $y = t - \sin t$, $x = t + \cos t$

۴۰. $1 \leq t \leq 5$ $y = \sqrt{t+1}$, $x = \ln t$

۱۷. $y = t^3 - 12t$, $x = 10 - t^2$

۱۸. $y = 2t^3 + 3t^2 + 1$, $x = 2t^3 + 3t^2 - 12t$

۱۹. $y = \sin 2\theta$, $x = 2 \cos \theta$

۲۰. $y = 2 \sin \theta$, $x = \cos 3\theta$

۲۱. با استفاده از نمودار مختصات نقطه انتهاییه راست منحنی $y = e^t$, $x = t - t^4$ را تخمین بزنید. سپس با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال مختصات دقیق را پیدا کنید.

۲۲. با استفاده از نمودار مختصات پایین‌ترین نقطه و نقطه انتهاییه چپ منحنی $y = t + t^4$, $x = t^4 - 2t$ را تخمین بزنید. سپس مختصات دقیق را پیدا کنید.

۲۳-۲۴. منحنی موردنظر را در کادری که همه خصیصه‌های مهم منحنی را نشان می‌دهد رسم کنید.

۲۳. $y = t^3 - t$, $x = t^4 - 2t^3 - 2t^2$

۲۴. $y = 2t^2 - t$, $x = t^4 + 4t^3 - 8t^2$

۲۵. نشان دهید که منحنی $x = \cos t$, $y = \sin t \cos t$ دو مماس در $(0, 0)$ دارد و معادله‌هایشان را پیدا کنید. منحنی را رسم کنید.

۲۶. منحنی $x = \cos t + 2 \cos 2t$, $y = \sin t + 2 \sin 2t$ را رسم کنید تا مشخص شود کجا خودش را قطع می‌کند. سپس معادله هر دو مماس در این نقطه را پیدا کنید.

۲۷. (الف) شیب خط مماس بر چرخه‌زاد $x = r\theta - d \sin \theta$, $y = r - d \cos \theta$ را بر حسب θ پیدا کنید. (تمرین ۴۰ بخش ۱.۱۱ را ببینید.)

(ب) نشان دهید که اگر $d < r$ ، آن وقت چرخه‌زاد مماس قائم ندارد.

۲۸. (الف) شیب مماس بر ستاره‌وار $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ را بر حسب θ پیدا کنید. (ستاره‌وار را در پروژه آزمایشگاهی در صفحه ۸۲۵ بررسی کرده‌ایم.)

(ب) در چه نقطه‌هایی مماس افقی یا قائم است؟

(ج) در چه نقطه‌هایی شیب مماس ۱ یا -۱ است؟

۲۹. در چه نقطه‌هایی روی منحنی $x = 2t^3$, $y = 1 + 4t - t^2$ شیب خط مماس ۱ است؟

۴۱-۴۴ طول دقیق منحنی موردنظر را پیدا کنید.

$$\circ \leq t \leq 1 \quad ; y = 4 + 2t^3 \quad , x = 1 + 3t^2 \quad .41$$

$$\circ \leq t \leq 3 \quad ; y = 5 - 2t \quad , x = e^t + e^{-t} \quad .42$$

$$\circ \leq t \leq 2 \quad ; y = \ln(1 + t) \quad , x = \frac{t}{1+t} \quad .43$$

$$; y = 3 \sin t - \sin 3t \quad , x = 3 \cos t - \cos 3t \quad .44$$

$$\circ \leq t \leq \pi$$