

تمرین

۸.۱۲

۱. سری توانی چیست؟

۲. الف) شعاع همگرایی سری توانی چیست؟

ب) بازه همگرایی سری توانی چیست؟ چگونه آن را پیدا می‌کنید؟

۳. شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری مورد نظر را پیدا کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1} \quad .۴$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad .۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n \quad .۶$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^r} \quad .۵$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n \quad .۸$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad .۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^r} \quad .۱۰$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^r x^n}{r^n} \quad .۹$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5} \quad .۱۲ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt{n}} \quad .۱۱$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad .۱۴ \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{r^n \ln n} \quad .۱۳$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{r^{n+1}} \quad .۱۶ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^r + 1} \quad .۱۵$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^n} (x+1)^n \quad .۱۸ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n (x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad .۱۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(rx-2)^n}{n r^n} \quad .۲۰ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n} \quad .۱۹$$

$$b > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n \quad .۲۱$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n \quad .23$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^r+1} \quad .22$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r x^n}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \quad .24$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^r} \quad .26$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^r} \quad .25$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \quad .27$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \quad .28$$

۲۹. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ همگرا باشد، آیا نتیجه می‌شود که سریهای زیر نیز همگرا هستند؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-4)^n \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-2)^n \quad (\text{الف})$$

۳۰. فرض کنید که $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ وقتی که $x = -4$ همگرا باشد و وقتی که $x = 6$ واگرا. درباره همگرایی یا واگرایی سریهای زیر چه می‌توانید بگویید؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n \quad (\text{د})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n \quad (\text{ج})$$

۳۱. اگر k عددی طبیعی باشد، شعاع همگرایی سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

را پیدا کنید.

۱. اگر شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ برابر با 1^0 باشد، شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ چقدر است؟ چرا؟
 ۲. فرض کنید که می‌دانید سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ به ازای $|x| < 2$ همگراست. درباره سری زیر چه چیزی می‌توانید بگویید؟ چرا؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

۱۰.۳ نمایش تابع موردنظر را به شکل سری توانی پیدا کنید و بازه همگرایی آن را مشخص کنید.

۴. $f(x) = \frac{3}{1-x^2}$

۳. $f(x) = \frac{1}{1+x}$

۶. $f(x) = \frac{1}{x+1^0}$

۵. $f(x) = \frac{2}{3-x}$

۸. $f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$

۷. $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$

۱۰. $f(x) = \frac{x^2}{a^2-x^2}$

۹. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

۱۲-۱۱ تابع موردنظر را با استفاده از کسرهای جزئی به شکل مجموع سری توانی بنویسید. بازه همگرایی را پیدا کنید.

۱۱. $f(x) = \frac{3}{x^2-x-2}$ ۱۲. $f(x) = \frac{x+2}{2x^2-x-1}$

۱۳. الف) با استفاده از مشتق‌گیری نمایشی برای

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

به شکل سری توانی پیدا کنید. شعاع همگرایی این سری چقدر است؟

ب) با استفاده از قسمت (الف) سری توانی برای

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

پیدا کنید.

ج) با استفاده از قسمت (ب) سری توانی برای

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

پیدا کنید.

۱۴. الف) نمایشی برای $f(x) = \ln(1+x)$ به شکل سری توانی پیدا

کنید. شعاع همگرایی اش چقدر است؟

ب) با استفاده از قسمت (الف) سری توانی برای

$$f(x) = x \ln(1+x)$$

پیدا کنید.

ج) با استفاده از قسمت (الف) سری توانی برای

$$f(x) = \ln(x^2+1)$$

پیدا کنید.

۱۵-۱۸ نمایشی برای تابع موردنظر به شکل سری توانی پیدا کنید و شعاع

همگرایی آن را مشخص کنید.

۱۶. $f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2}$

۱۵. $f(x) = \ln(5-x)$

۱۸. $f(x) = \arctan \frac{x}{3}$

۱۷. $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$

ب) $\int_0^1 J_0(x) dx$ را با دقت سه رقم اعشار حساب کنید.

۳۴. تابع بسل از مرتبه ۱ به شکل

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)! 2^{2n+1}}$$

تعریف شده است.

الف) نشان دهید که J_1 در معادله دیفرانسیل

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2 - 1) J_1(x) = 0$$

صدق می‌کند.

ب) نشان دهید که $J_0'(x) = -J_1(x)$.

۳۵. الف) نشان دهید که تابع

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

جوابی برای معادله دیفرانسیل زیر است.

$$f'(x) = f(x)$$

ب) نشان دهید که $f(x) = e^x$.

۳۶. فرض کنید $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$. نشان دهید که سری $\sum f_n(x)$

به ازای هر مقداری از x همگراست اما سری مشتقها، $\sum f_n'(x)$

وقتی که $x = 2n\pi$ و n عددی صحیح است، واگراست. به ازای

چه مقدارهایی از x سری $\sum f_n''(x)$ همگراست؟

۳۷. فرض کنید

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

بازه‌های همگرایی f ، f' و f'' را پیدا کنید.

۳۸. الف) با در نظر گرفتن سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ، مجموع سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x| < 1$$

را پیدا کنید.

ب) مجموع هر یک از سریهای زیر را پیدا کنید.

$$|x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad (i)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \quad (ii)$$

۱۹-۲۲ نمایشی برای f به شکل سری توانی پیدا کنید، و f و چند تا از مجموعه‌های جزئی مانند $s_n(x)$ را روی یک صفحه نمایش رسم کنید.

$$f(x) = \ln(x^2 + 4) \quad ۲۰ \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 16} \quad ۱۹$$

$$f(x) = \tan^{-1}(2x) \quad ۲۲ \quad f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad ۲۱$$

۲۳-۲۶ انتگرال نامعین موردنظر را به شکل سری توانی بنویسید. شعاع همگرایی این سری چقدر است؟

$$\int \frac{\ln(1-t)}{t} dt \quad ۲۴ \quad \int \frac{t}{1-t^8} dt \quad ۲۳$$

$$\int \tan^{-1}(x^2) dx \quad ۲۶ \quad \int \frac{x - \tan^{-1} x}{x^2} dx \quad ۲۵$$

۲۷-۳۰ با استفاده از سری توانی انتگرال معین موردنظر را تا شش رقم اعشار تقریب بزنید.

$$\int_0^{0.4} \ln(1+x^2) dx \quad ۲۸ \quad \int_0^{0.2} \frac{1}{1+x^5} dx \quad ۲۷$$

$$\int_0^{0.3} \frac{x^2}{1+x^2} dx \quad ۳۰ \quad \int_0^{0.1} x \arctan(3x) dx \quad ۲۹$$

۳۱. با استفاده از نتیجه مثال ۶، $\ln 1/11$ را با دقت پنج رقم اعشار حساب کنید.

۳۲. نشان دهید که تابع

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

جوابی برای معادله دیفرانسیل

$$f''(x) + f(x) = 0$$

است.

۳۳. الف) نشان دهید که J_0 (تابع بسل از مرتبه ۰ که در مثال ۴ معرفی کردیم) در معادله دیفرانسیل

$$x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

صدق می‌کند.

ج) مجموع هر یک از سریهای زیر را پیدا کنید.

$$|x| < 1, \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n \quad \text{(i)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n} \quad \text{(ii)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \quad \text{(iii)}$$

۳۹. با استفاده از سری توانی برای $\tan^{-1} x$ عبارت زیر برای π به شکل مجموع سری نامتناهی را ثابت کنید.

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

۴۰. الف) با مربع درست کردن نشان دهید که

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

ب) با تجزیه کردن $x^3 + 1$ که مجموع دو مکعب کامل است، انتگرال قسمت (الف) را بازنویسی کنید. سپس $\frac{1}{x^3 + 1}$ را به شکل مجموع سری توانی بنویسید و با استفاده از آن دستور زیر برای π را ثابت کنید:

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$