## ۵.۱۵ تمرین

۱-۵ با استفاده از قاعدهٔ زنجیری $\frac{dz}{dt}$ یا $\frac{dw}{dt}$ را پیدا کنید.

۱. $z = x^۲ + y^۲ + xy$، $x = \sin t$، $y = e^t$

۲. $z = \cos(x + ۴y)$، $x = ۵t^۴$، $y = \frac{۱}{t}$

۳. $z = \sqrt{۱ + x^۲ + y^۲}$، $x = \ln t$، $y = \cos t$

۴. $z = \tan^{-۱}\frac{y}{x}$، $x = e^t$، $y = ۱ - e^{-t}$

۵. $w = xe^{y/z}$، $x = t^۲$، $y = ۱ - t$، $z = ۱ + ۲t$

۶. $w = \ln\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$، $x = \sin t$، $y = \cos t$، $z = \tan t$

۷-۱۲ با استفاده از قاعدهٔ زنجیری $\frac{\partial z}{\partial s}$ و $\frac{\partial z}{\partial t}$ را پیدا کنید.

۷. $z = x^۲y^۳$، $x = s\cos t$، $y = s\sin t$

۸. $z = \arcsin(x - y)$، $x = s^۲ + t^۲$، $y = ۱ - ۲st$

۹. $z = \sin\theta\cos\phi$، $\theta = st^۲$، $\phi = s^۲t$

۱۰. $z = e^{x+۲y}$، $x = \frac{s}{t}$، $y = \frac{t}{s}$

۱۱. $z = e^r\cos\theta$، $r = st$، $\theta = \sqrt{s^۲ + t^۲}$

۱۲. $z = \tan\frac{u}{v}$، $u = ۲s + ۳t$، $v = ۳s - ۲t$

۱۳. اگر $z = f(x, y)$، که در اینجا $f$ مشتق‌پذیر است، و

$$x = g(t), \quad y = h(t)$$
$$g(۳) = ۲, \quad h(۳) = ۷$$
$$g'(۳) = ۵, \quad h'(۳) = -۴$$
$$f_x(۲, ۷) = ۶, \quad f_y(۲, ۷) = -۸$$

$\frac{dz}{dt}$ را وقتی که $t = ۳$ پیدا کنید.

۱۴. فرض کنید $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$، که در اینجا $F$، $u$ و $v$ مشتق‌پذیرند و

$$u(۱, ۰) = ۲, \quad v(۱, ۰) = ۳$$
$$u_s(۱, ۰) = -۲, \quad v_s(۱, ۰) = ۵$$
$$u_t(۱, ۰) = ۶, \quad v_t(۱, ۰) = ۴$$
$$F_u(۲, ۳) = -۱, \quad F_v(۲, ۳) = ۱۰$$

$W_s(۱, ۰)$ و $W_t(۱, ۰)$ را پیدا کنید.

۱۵. فرض کنید $f$ تابعی مشتق‌پذیر از $x$ و $y$ باشد و

$$g(u, v) = f(e^u + \sin v, e^u + \cos v)$$

با استفاده از جدول مقدارهای زیر $g_u(۰, ۰)$ و $g_v(۰, ۰)$ را حساب کنید.

| | $f$ | $g$ | $f_x$ | $f_y$ |
|---|---|---|---|---|
| $(۰, ۰)$ | ۳ | ۶ | ۴ | ۸ |
| $(۱, ۲)$ | ۶ | ۳ | ۲ | ۵ |

۱۶. فرض کنید $f$ تابعی مشتق‌پذیر از $x$ و $y$ باشد و

$$g(r, s) = f(۲r - s, s^۲ - ۴r)$$

با استفاده از جدول مقدارهای تمرین ۱۵، $g_r(۱, ۲)$ و $g_s(۱, ۲)$ را حساب کنید.

۱۷-۲۰ با استفاده از نمودار درختی قاعدهٔ زنجیری را برای مورد داده‌شده بنویسید. فرض کنید همهٔ تابعها مشتق‌پذیرند.

۱۷. $u = f(x, y)$، که در اینجا $x = x(r, s, t)$، $y = y(r, s, t)$

۱۸. $R = f(x, y, z, t)$، که در اینجا $x = x(u, v, w)$، $y = y(u, v, w)$، $z = z(u, v, w)$، $t = t(u, v, w)$

۱۹. $w = f(r, s, t)$، که در اینجا $r = r(x, y)$، $s = s(x, y)$، $t = t(x, y)$

۲۰. $t = f(u, v, w)$، که در اینجا $u = u(p, q, r, s)$، $v = v(p, q, r, s)$، $w = w(p, q, r, s)$

۲۱-۲۶ با استفاده از قاعدهٔ زنجیری مشتقهای جزئی مشخص‌شده را پیدا کنید.

۲۱. $z = x^۲ + xy^۳$، $x = uv^۲ + w^۳$، $y = u + ve^w$؛ $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$ وقتی که $u = ۲$، $v = ۱$، $w = ۰$

۲۲. $u = \sqrt{r^۲ + s^۲}$، $r = y + x\cos t$، $s = x + y\sin t$؛ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}$ وقتی که $x = ۱$، $y = ۲$، $t = ۰$

۲۳. $R = \ln(u^۲ + v^۲ + w^۲)$، $u = x + ۲y$، $v = ۲x - y$، $w = ۲xy$؛
$\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$ وقتی که $x = y = ۱$

۲۴. $M = xe^{y-z^۲}$، $x = ۲uv$، $y = u - v$، $z = u + v$؛
$\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}$ وقتی که $u = ۳$، $v = -۱$

۲۵. $u = x^۲ + yz$، $x = pr\cos\theta$، $y = pr\sin\theta$، $z = p + r$؛
$\frac{\partial u}{\partial p}, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$ وقتی که $p = ۲$، $r = ۳$، $\theta = ۰$

۲۶. $Y = w\tan^{-۱}(uv)$، $u = r + s$، $v = s + t$، $w = t + r$؛
$\frac{\partial Y}{\partial r}, \frac{\partial Y}{\partial s}, \frac{\partial Y}{\partial t}$ وقتی که $r = ۱$، $s = ۰$، $t = ۱$

---

۲۷-۳۰ با استفاده از تساوی ۶، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

۲۷. $\sqrt{xy} = ۱ + x^۲y$

۲۸. $y^۵ + x^۲y^۳ = ۱ + ye^{x^۲}$

۲۹. $\cos(x - y) = xe^y$

۳۰. $\sin x + \cos y = \sin x \cos y$

---

۳۱-۳۴ با استفاده از تساوی ۷، $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را پیدا کنید.

۳۱. $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۳xyz$

۳۲. $xyz = \cos(x + y + z)$

۳۳. $x - z = \arctan(yz)$

۳۴. $yz = \ln(x + z)$

۴۱. فشار یک مول از گازی ایده‌آل با آهنگ ۰٫۰۵ kPa/s افزایش می‌یابد و دمایش با آهنگ ۰٫۱۵ K/s کاهش می‌یابد. با استفاده از معادلهٔ حالت مثال ۲ آهنگ تغییر حجم را وقتی که فشار ۲۰ kPa و دما ۳۲۰ K است پیدا کنید.

۴۲. اتومبیل A به‌سمت شمال در بزرگراه ۱۶ و اتومبیل B به‌سمت غرب در بزرگراه ۸۳ حرکت می‌کند. هر یک از این اتومبیلها به تقاطع این بزرگراهها نزدیک می‌شود. در لحظه‌ای، فاصلهٔ اتومبیل A از تقاطع بزرگراهها ۰٫۳ km است و با سرعت ۹۰ km/h حرکت می‌کند و فاصلهٔ اتومبیل B از تقاطع بزرگراهها ۰٫۴ km است و با سرعت ۸۰ km/h حرکت می‌کند. فاصلهٔ این اتومبیلها در آن لحظه با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

۴۳. یک ضلع مثلثی با آهنگ ۳ cm/s بزرگ می‌شود و ضلع دیگری با آهنگ ۲ cm/s کوچک می‌شود. اگر مساحت این مثلث ثابت بماند، وقتی که طول ضلع اول ۲۰ cm است، طول ضلع سوم ۳۰ cm است و زاویهٔ میان این ضلعها $\frac{\pi}{6}$، زاویهٔ میان ضلعها با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

۴۴. اگر صوتی با فرکانس $f_s$ را منبعی تولید کند که روی خطی با سرعت $v_s$ حرکت می‌کند و ناظری با سرعت $v_o$ روی همین خط در جهت مخالف رو به منبع صوتی حرکت کند، آن‌وقت فرکانس صوتی که ناظر می‌شنود برابر است با

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_s}\right) f_s$$

که در اینجا $c$ سرعت صوت، حدود ۳۳۲ m/s، است. (این موضوع را اثر دوپلر می‌نامند.) فرض کنید که، در لحظه‌ای خاص، در قطاری هستید که با سرعت ۳۴ m/s و شتاب ۱٫۲ m/s$^2$ در حرکت است. قطاری از سمت مخالف روی ریل دیگر با سرعت ۴۰ m/s و شتاب ۱٫۴ m/s$^2$ به شما نزدیک می‌شود و سوتش را، که فرکانسش ۴۶۰ Hz است، به صدا درمی‌آورد. در آن لحظه، فرکانسی که به گوشتان می‌رسد چقدر است و با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

۴۵-۴۸ فرض کنید که همهٔ تابعهای داده‌شده مشتق‌پذیرند.

۴۵. اگر $z = f(x, y)$، که در اینجا $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، (الف) $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ را پیدا کنید و (ب) نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

۴۶. اگر $u = f(x, y)$، که در اینجا $x = e^s\cos t$ و $y = e^s\sin t$، نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)$$

۴۷. اگر $z = f(x - y)$، نشان دهید که $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

۴۸. اگر $z = f(x, y)$، که در اینجا $x = s + t$ و $y = s - t$، نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

---

۴۹-۵۴ فرض کنید که همهٔ تابعهای داده‌شده مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته دارند.

۴۹. نشان دهید که هر تابع به‌شکل

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

جوابی برای معادلهٔ موج

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

است. (راهنمایی: فرض کنید $u = x + at$، $v = x - at$.)

۵۰. اگر $z = f(x, y)$، که در اینجا $x = e^s\cos t$ و $y = e^s\sin t$، نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

۵۱. اگر $z = f(x, y)$، که در اینجا $x = r^2 + s^2$ و $y = 2rs$، $\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial s}$ را پیدا کنید. (با مثال ۷ مقایسه کنید.)

۵۲. اگر $z = f(x, y)$، که در اینجا $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، (الف) $\frac{\partial z}{\partial r}$، (ب) $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ و (ج) $\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial \theta}$ را پیدا کنید.

۵۳. اگر $z = f(x, y)$، که در اینجا $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

۵۴. فرض کنید $z = f(x, y)$، که در اینجا $x = g(s, t)$ و $y = h(s, t)$.

الف) نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

ب) دستوری مشابه برای $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t}$ پیدا کنید.

---

**۵۵.** تابع $f$ را **همگن از درجهٔ $n$** می‌نامند، به‌شرطی که به‌ازای هر $t$، $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$، که در اینجا $n$ عددی طبیعی است و $f$ مشتق جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته دارد.

الف) ثابت کنید که $f(x,y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ همگن از درجهٔ ۳ است.

ب) نشان دهید که اگر $f$ همگن از درجهٔ $n$ باشد، آن‌وقت

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y)$$

(راهنمایی: با استفاده از قاعدهٔ زنجیری از $f(tx,ty)$ نسبت به $t$ مشتق بگیرید.)

**۵۶.** اگر $f$ همگن از درجهٔ $n$ باشد، نشان دهید که

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f(x,y)$$

**۵۷.** اگر $f$ همگن از درجهٔ $n$ باشد، نشان دهید که

$$f_x(tx,ty) = t^{n-1}f_x(x,y)$$

**۵۸.** فرض کنید معادلهٔ

$$F(x,y,z) = 0$$

هر یک از سه متغیر $x$، $y$ و $z$ را به‌طور ضمنی برحسب تابعهایی از دوتای دیگر تعریف می‌کند: $z = f(x,y)$، $y = g(x,z)$، $x = h(y,z)$. اگر $F$ مشتق‌پذیر باشد و $F_x$، $F_y$ و $F_z$ همگی غیرصفر باشند، نشان دهید که

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$