

۱۱-۲۰ دامنه تابع موردنظر را پیدا کنید.

۱۱. $f(x, y) = \sqrt{x+y}$

۱۲. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

۱۳. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

۱۴. $f(x, y) = \sqrt{y-x} \ln(y+x)$

۱۵. $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$

۱۶. $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

۱۷. $f(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

۱۸. $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2)$

۱۹. $f(x, y, z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

۲۰. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

۲۱-۲۹ نمودار تابع موردنظر را رسم کنید.

۲۱. $f(x, y) = 3$ ۲۲. $f(x, y) = y$

۲۳. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

۲۴. $f(x, y) = \cos x$

۲۵. $f(x, y) = y^2 + 1$

۲۶. $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

۲۷. $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

۲۸. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

۲۹. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

۳۰. تابع داده شده را با نمودارش (که از I تا VI شماره خورده است) مقایسه کنید. دلیل انتخابتان را بگویید.

الف) $f(x, y) = |x| + |y|$

ب) $f(x, y) = |xy|$

ج) $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

د) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

ه) $f(x, y) = (x - y)^2$

و) $f(x, y) = \sin(|x| + |y|)$

ج) معنی تابع $h = f(v, 30)$ چیست؟ رفتار این تابع را توصیف کنید.

جدول ۴

مدت (ساعت)

$t \backslash v$	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
۱۰	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲
۱۵	۴	۴	۵	۵	۵	۵	۵
۲۰	۵	۷	۸	۸	۹	۹	۹
۳۰	۹	۱۳	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۱۹
۴۰	۱۴	۲۱	۲۵	۲۸	۳۱	۳۳	۳۳
۵۰	۱۹	۲۹	۳۶	۴۰	۴۵	۴۸	۵۰
۶۰	۲۴	۳۷	۴۷	۵۴	۶۲	۶۷	۶۹

سرعت باد (گره)

۶. فرض کنید $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$

الف) $f(1, 1)$ را حساب کنید.

ب) $f(e, 1)$ را حساب کنید.

ج) دامنه f را پیدا و رسم کنید.

د) برد f را پیدا کنید.

۷. فرض کنید $f(x, y) = x^2 e^{xy}$

الف) $f(2, 0)$ را حساب کنید.

ب) دامنه f را پیدا کنید.

ج) برد f را پیدا کنید.

۸. دامنه تابع $f(x, y) = \sqrt{1+x-y^2}$ را پیدا و رسم کنید. برد f چیست؟

۹. فرض کنید $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}$

الف) $f(2, -1, 6)$ را حساب کنید.

ب) دامنه f را پیدا کنید.

ج) برد f را پیدا کنید.

۱۰. فرض کنید $g(x, y, z) = \ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$

الف) $g(2, -2, 4)$ را حساب کنید.

ب) دامنه g را پیدا کنید.

ج) برد g را پیدا کنید.

۶۴-۶۱ رویه‌های تراز تابع موردنظر را توصیف کنید.

$$f(x, y, z) = x + 3y + 5z \quad .۶۱$$

$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2 \quad .۶۲$$

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 \quad .۶۳$$

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 \quad .۶۴$$

۶۶-۶۵ توضیح دهید که چگونه نمودار g از روی نمودار f به دست می‌آید.

$$g(x, y) = 2f(x, y) \quad \text{الف} \quad g(x, y) = f(x, y) + 2 \quad \text{ب}$$

$$g(x, y) = 2 - f(x, y) \quad \text{د} \quad g(x, y) = -f(x, y) \quad \text{ج}$$

$$g(x, y) = f(x - 2, y) \quad \text{الف} \quad .۶۶$$

$$g(x, y) = f(x, y + 2) \quad \text{ب}$$

$$g(x, y) = f(x + 3, y - 4) \quad \text{ج}$$

ج) هزینه تاکسی سواری بر حسب تابعی از مسافت طی شده و $۲۴-۲۳$ با استفاده از نمودار کامپیوتری تابع توضیح دهید که چرا حد مورد نظر وجود ندارد.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2} \quad ۲۳$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^6} \quad ۲۴$$

۴-۳ با استفاده از جدولی از مقدارهای عددی $f(x, y)$ به ازای (x, y) های نزدیک مبدأ مقدار حد $f(x, y)$ را وقتی که $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ حدس بزنید.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 + x^2 y^2 - 5}{2 - xy} \quad ۳$$

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + 2y^2} \quad ۴$$

۲۶-۲۵ تابع $h(x, y) = g(f(x, y))$ و مجموعه‌ای را که h روی آن پیوسته است پیدا کنید.

$$f(x, y) = 2x + 3y - 6, \quad g(t) = t^2 + \sqrt{t} \quad ۲۵$$

$$f(x, y) = \frac{1 - xy}{1 + x^2 y^2}, \quad g(t) = t + \ln t \quad ۲۶$$

۲۲-۵ حد مورد نظر را، در صورت وجود، پیدا کنید یا نشان دهید که این حد وجود ندارد.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (\Delta x^2 - x^2 y^2) \quad ۵$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} e^{-xy} \cos(x+y) \quad ۶$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2} \quad ۷$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \ln \left(\frac{1 + y^2}{x^2 + xy} \right) \quad ۸$$

۲۸-۲۷ \square تابع مورد نظر را رسم کنید و ببینید در کجاها ناپیوسته است. سپس با استفاده از دستورش مشاهداتان را توضیح دهید.

$$f(x, y) = e^{1/(x-y)} \quad ۲۷$$

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2} \quad ۲۸$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + \sin^2 y}{2x^2 + y^2} \quad ۱۰$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x^2 + 3y^2} \quad ۹$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^2 y}{2x^2 + y^2} \quad ۱۲$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2} \quad ۱۱$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad ۱۴$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ۱۳$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2 + 2y^2} \quad ۱۶$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y e^y}{x^2 + 4y^2} \quad ۱۵$$

۳۸-۲۹ مجموعه نقطه‌هایی را که تابع مورد نظر در آنها پیوسته است مشخص کنید.

$$F(x, y) = \frac{\sin(xy)}{e^x - y^2} \quad ۲۹$$

$$F(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2} \quad ۳۰$$

$$F(x, y) = \arctan(x + \sqrt{y}) \quad ۳۱$$

$$F(x, y) = e^{x^2 y} + \sqrt{x + y^2} \quad ۳۲$$

$$G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4) \quad ۳۳$$

$$G(x, y) = \tan^{-1}((x + y)^{-2}) \quad ۳۴$$

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{y}}{x^2 - y^2 + z^2} \quad ۳۵$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z} \quad ۳۶$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \quad ۱۷$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad ۱۸$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,0,1)} e^{-xy} \sin \frac{\pi z}{2} \quad ۱۹$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad ۲۰$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad ۲۱$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2} \quad ۲۲$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ۳۷$$

۴۳. نمودار تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{xy} & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$$

را رسم کنید و درباره پیوستگی اش بحث کنید.

۴۴. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & y \geq x^4 \text{ یا } y \leq 0 \\ 1 & 0 < y < x^4 \end{cases}$$

الف) نشان دهید که وقتی روی هر مسیری به شکل $y = mx^a$ با شرط $a < 4$ که از $(0, 0)$ می‌گذرد $(0, 0) \rightarrow (x, y)$ ، $f(x, y) \rightarrow 0$.

ب) نشان دهید که علی‌رغم درستی حکم قسمت الف)، f در $(0, 0)$ ناپیوسته است.

ج) نشان دهید که f روی کل دو منحنی ناپیوسته است.

۴۵. نشان دهید که تابع f که با $f(x) = |x|$ روی \mathbb{R}^n مشخص شده است پیوسته است. (راهنمایی: تساوی $|x-a|^2 = (x-a) \cdot (x-a)$ را در نظر بگیرید.)

۴۶. اگر $c \in V_n$ ، نشان دهید که تابع f که با $f(x) = c \cdot x$ مشخص شده است روی \mathbb{R}^n پیوسته است.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ۳۸$$

۳۹-۴۱ با استفاده از مختصات قطبی حد موردنظر را پیدا کنید. (توجه کنید که اگر (r, θ) مختصات قطبی نقطه (x, y) باشد و $r \geq 0$ ، وقتی که $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، $r \rightarrow 0^+$.)

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \quad ۳۹$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) \quad ۴۰$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{-x^2 - y^2} - 1}{x^2 + y^2} \quad ۴۱$$

۴۲. در ابتدای این بخش تابع

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

را در نظر گرفتیم و بر اساس مستندات عددی حدس زدیم که وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، $f(x, y) \rightarrow 1$. با استفاده از مختصات قطبی ثابت کنید که مقدار این حد همین است. سپس نمودار تابع را رسم کنید.