

تمرین

۳.۱۲

۱. شکلی بکشید که نشان دهد

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/3}} dx$$

چه نتیجه‌ای درباره سری مورد نظر می‌توانید بگیرید؟

۲. فرض کنید f به ازای $x \geq 1$ تابعی پیوسته، مثبت و نزولی باشد و $a_n = f(n)$. با کشیدن شکل مقدارهای زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید:

$$\int_1^6 f(x) dx, \quad \sum_{i=1}^5 a_i, \quad \sum_{i=2}^6 a_i$$

۳. با استفاده از آزمون انتگرال مشخص کنید که سری مورد نظر همگراست یا واگرا.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \quad .۴$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \quad .۳$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}} \quad .۶$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad .۵$$

۵. $\sum a_n$ در نتیجه n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} \quad .۸$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} \quad .۷$$

۹-۲۶ مشخص کنید که سری مورد نظر همگراست یا واگرا.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1/2} + 2n^{-1/2}) \quad .۱۰$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2/10}} \quad .۹$$

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \dots \quad .۱۱$$

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \dots \quad .۱۲$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \dots \quad .۱۳$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \dots \quad .۱۴$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \quad .۱۶$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-2\sqrt{n}}{n^2} \quad .۱۵$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{n(n+1)} \quad .۱۸$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4} \quad .۱۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5} \quad .20$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \quad .19$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \quad .22$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad .21$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{e^n} \quad .24$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2} \quad .23$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} \quad .26$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} \quad .25$$

۲۷-۳۰ مقدارهایی از p را پیدا کنید که به ازای آنها سری مورد نظر همگراست.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^p} \quad .28$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad .27$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p} \quad .30$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p \quad .29$$

۳۱. ...

تمرین ۴.۱۲

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5n}{n^2 + n + 1}$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 2n}{(1 + n^2)^2}$

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 5}{\sqrt{n^2 + n^2}}$

۲۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n + n^2}{\sqrt{1 + n^2 + n^6}}$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

۳۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

۲۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

۳۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

۳۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

۱. فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سربهایی با جمله‌های مثبت باشند و می‌دانیم $\sum b_n$ همگراست.

الف) اگر به‌ازای هر n , $a_n > b_n$ در مورد $\sum a_n$ چه چیزی می‌توانید بگویید؟ چرا؟

ب) اگر به‌ازای هر n , $a_n < b_n$ در مورد $\sum a_n$ چه چیزی می‌توانید بگویید؟ چرا؟

۲. فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سربهایی با جمله‌های مثبت باشند و می‌دانیم $\sum b_n$ واگراست.

الف) اگر به‌ازای هر n , $a_n > b_n$ در مورد $\sum a_n$ چه چیزی می‌توانید بگویید؟ چرا؟

ب) اگر به‌ازای هر n , $a_n < b_n$ در مورد $\sum a_n$ چه چیزی می‌توانید بگویید؟ چرا؟

۳۳-۳۶ با استفاده از مجموع ۱۰ جمله اول سری موردنظر مجموع این سری را تقریب بزنید. خطا را تخمین بزنید.

۳۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$

۳۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$

۳۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^{3n}}$

۳۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$

۳۲-۳۴ مشخص کنید که سری موردنظر همگراست یا واگرا.

۴. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 - 1}$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2 + 1}$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2 \sqrt{n}}$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \sqrt{n}}$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$

۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$

۱۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{3n^2 + 1}$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 1}$

۱۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{10^n}$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4 n}$

۱۴. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1/2}}$

۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n \sqrt{n}}$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n+6^n}$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

۲۲. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2}$

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2 + n + 1}$

۳۷. معنی نمایش ده‌دهی عدد $0.1d_1d_2d_3\dots$ (در اینجا رقم d_i یکی از عدد‌های ۰، ۱، ۲، ... و ۹ است) این است که

$$0.1d_1d_2d_3d_4\dots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \dots$$

نشان دهید که این سری همواره همگراست.

۳۸. به‌ازای چه مقدارهایی از p سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$$

همگراست؟

۳۹. ثابت کنید که اگر $a_n \geq 0$ و $\sum a_n$ همگرا باشد، آن وقت $\sum a_n^2$ نیز همگراست.

۴۰. الف) فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سربهایی با جمله‌های مثبت باشند و $\sum b_n$ همگرا باشد. ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

آنوقت $\sum a_n$ نیز همگراست.

(ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که سری مورد نظر همگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \quad (i)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{ne^n}} \quad (ii)$$

(الف) فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سریهایی با جمله‌های مثبت باشند و $\sum b_n$ همگرا باشد. ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

آنوقت $\sum a_n$ نیز همگراست.

(ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که سری مورد نظر همگراست.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \quad (i)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \quad (ii)$$

۴۲. مثالی از دو سری مانند $\sum a_n$ و $\sum b_n$ با جمله‌های مثبت بیاورید که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ و $\sum b_n$ واگرا باشد، اما $\sum a_n$ همگرا باشد. (با تمرین ۴۰ مقایسه کنید.)

۴۳. نشان دهید که اگر $a_n > 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \neq 0$ ، آنوقت $\sum a_n$ واگراست.

۴۴. نشان دهید که اگر $a_n > 0$ و $\sum a_n$ همگرا باشد، آنوقت $\sum \ln(1 + a_n)$ همگراست.

۴۵. اگر $\sum a_n$ سری همگرا با جمله‌های مثبت باشد، آیا درست است که $\sum \sin a_n$ نیز همگراست؟

۴۶. اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو سریهایی همگرا با جمله‌های مثبت باشند، آیا درست است که $\sum a_n b_n$ نیز همگراست؟