

تمرین *۲.۷

۴-۱ با استفاده از قاعده‌های لگاریتم عبارت موردنظر را بسط دهید.

۲. $\ln \sqrt{a(b^2 + c^2)}$

۱. $\ln \frac{r^2}{3\sqrt{s}}$

۴. $\ln \frac{3x^2}{(x+1)^5}$

۳. $\ln(uv)^{10}$

۸-۵ عبارت داده شده را به شکل تک لگاریتم بنویسید.

۶. $\ln 2 + \frac{1}{3} \ln 8$

۵. $\ln 5 + 5 \ln 3$

۷. $\ln(1+x^2) + \frac{1}{4} \ln x - \ln \sin x$

۸. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2 \ln c$

۹-۱۲ نمودار حدودی هر یک از تابعهای زیر را رسم کنید. از ماشین حساب استفاده نکنید. فقط از نموداری که در شکل ۴ داده شده است و اگر لازم بود از تبدیلهای بخش ۳.۱ استفاده کنید.

۱۰. $y = \ln |x|$

۹. $y = -\ln x$

۱۲. $y = 1 + \ln(x-2)$

۱۱. $y = \ln(x+3)$

۱۳-۱۴ حد موردنظر را پیدا کنید.

۱۳. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x^2 - 9)$

۱۴. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2+x) - \ln(1+x))$

۱۵-۳۴ از تابع موردنظر مشتق بگیرید.

۱۶. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$

۱۵. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

۱۸. $f(x) = \ln(\sin^2 x)$

۱۷. $f(x) = \sin(\ln x)$

۲۰. $f(x) = \ln \sqrt[3]{x}$

۱۹. $f(x) = \sqrt[3]{\ln x}$

۲۲. $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

۲۱. $f(x) = \sin x \ln(5x)$

۲۴. $f(t) = \frac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

۲۳. $g(x) = \ln \frac{a-x}{a+x}$

۲۶. $H(z) = \ln \sqrt{\frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

۲۵. $F(t) = \ln \frac{(2t+1)^2}{(3t-1)^2}$

۲۷. $g(x) = \ln(x\sqrt{x^2 - 1})$

۲۸. $y = \ln(x^r \sin^2 x)$

۳۰. $y = (\ln \tan x)^2$

۳۲. $y = \ln \tan^2 x$

۳۴. $y = \ln |\cos(\ln x)|$

۳۶-۳۵ y' و y'' را پیدا کنید.

۳۶. $y = \ln(\sec x + \tan x)$

۳۵. $y = x^2 \ln(2x)$

۳۷-۴۰ از f مشتق بگیرید و دامنه f را پیدا کنید.

۳۷. $f(x) = \frac{x}{1 - \ln(x-1)}$

۳۸. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

۳۹. $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

۴۱. اگر $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ ، $f'(1)$ را پیدا کنید.

۴۲. اگر $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، $f''(e)$ را پیدا کنید.

۴۳-۴۴ $f'(x)$ را پیدا کنید. با مقایسه نمودارهای f و f' تحقیق کنید پاسختان قابل قبول است.

۴۳. $f(x) = \sin x + \ln x$

۴۴. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

۴۵-۴۶ معادله خط مماس بر منحنی داده شده را در نقطه مشخص شده پیدا کنید.

۴۵. $(1, 0)$ ، $y = \sin(2 \ln x)$

۴۶. $(2, 0)$ ، $y = \ln(x^2 - 7)$

۴۷. اگر $y = \ln(x^2 + y^2)$ ، y' را پیدا کنید.

۴۸. اگر $\ln xy = y \sin x$ ، y' را پیدا کنید.

۴۹. اگر $f(x) = \ln(x-1)$ ، دستوری برای $f^{(n)}(x)$ پیدا کنید.

۵۰. $\frac{d^n}{dx^n} (x^x \ln x)$ را پیدا کنید.

۷۳. (الف) با مشتق گرفتن از دو طرف تساوی و (ب) با استفاده از روش مثال ۱۳، نشان دهید که $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$.

۷۴. مساحت ناحیه بالای هذلولی $y = \frac{2}{x-2}$ ، زیر محور x و بین خطهای $x = -4$ و $x = -1$ را، با دقت سه رقم اعشار، پیدا کنید.

۷۵. حجم جسمی سه بعدی را که از دوران دادن ناحیه زیر منحنی

$$y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

از 0° تا 1° حول محور x به دست می آید پیدا کنید.

۷۶. حجم جسمی سه بعدی را که از دوران دادن ناحیه زیر منحنی

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

از 0° تا 3° حول محور y به دست می آید پیدا کنید.

۷۷. وقتی که گازی از حجم V_1 به حجم V_2 منبسط می شود کاری که انجام می دهد برابر است با $W = \int_{V_1}^{V_2} P dV$ ، که در اینجا $P = P(V)$ فشار بر حسب تابعی از حجم، V ، است. (مثال ۲۷ در بخش ۴.۶ را ببینید). قانون بویل این است که وقتی مقداری گاز تحت فشار ثابت منبسط می شود، $PV = C$ ، که در آن C مقداری ثابت است. اگر حجم اولیه 600 cm^3 باشد و فشار اولیه 150 kPa ، کار انجام شده توسط گاز را وقتی که تحت دمای ثابت تا 1000 cm^3 منبسط می شود پیدا کنید.

۷۸. اگر $f''(x) = x^{-2}$ ، $x > 0$ ، $f(1) = 0$ و $f(2) = 0$ ، f را پیدا کنید.

۷۹. اگر g تابع وارون $f(x) = 2x + \ln x$ باشد، $g'(2)$ را پیدا کنید.

۸۰. (الف) تقریب خطی $f(x) = \ln x$ در نزدیکی ۱ را پیدا کنید.

(ب) با ترسیم f و خطی سازی آن درستی پاسختان برای قسمت (الف) را روشن کنید.

(ج) به ازای چه مقدارهایی از x این تقریب خطی در حد 0.1 دقیق است؟

۸۱. (الف) با مقایسه مساحتها نشان دهید که

$$\frac{1}{3} < \ln 1.5 < \frac{5}{12}$$

(ب) با استفاده از قاعده میانگاهی وقتی که $n = 10$ ، $\ln 1.5$ را تخمین بزنید.

۵۲. تابع لگاریتم طبیعی از نمودار ریشه های معادله داده شده را با تقریب یک رقم اعشار تخمین بزنید. سپس با استفاده از این تخمینها به عنوان تقریب اولیه در روش نیوتن ریشه ها را با دقت شش رقم اعشار پیدا کنید.

$$\ln(4 - x^2) = x \quad 52$$

$$(x-4)^2 = \ln x \quad 51$$

۵۳. منحنی داده شده را بر اساس الگوی بخش ۵.۴ بررسی کنید.

$$y = \ln(\tan^2 x) \quad 54$$

$$y = \ln(\sin x) \quad 53$$

$$y = \ln(x^2 - 3x + 2) \quad 56$$

$$y = \ln(1 + x^2) \quad 55$$

۵۷. اگر $f(x) = \ln(2x + x \sin x)$ ، با استفاده از نمودارهای f ، f' و f'' بازه های صعودی بودن و نقطه های عطف f روی بازه $[0, 1.5]$ را تخمین بزنید.

۵۸. خانواده منحنیهای $f(x) = \ln(x^2 + c)$ را بررسی کنید. با تغییر c نقطه های عطف و مجانبها چه تغییری می کنند؟ چند عضو این خانواده را رسم کنید تا نشان دهید آنچه به دست آورده اید درست است.

۵۹-۶۲. مشتق تابع مورد نظر را با استفاده از مشتق گیری لگاریتمی پیدا کنید.

$$y = \frac{(x^2+1)^2 \sin^2 x}{\sqrt{x}} \quad 60 \quad y = (2x+1)^5 (x^2-3)^2 \quad 59$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \quad 62 \quad y = \frac{\sin^2 x \tan^2 x}{(x^2+1)^2} \quad 61$$

۶۲-۷۲. انتگرال مورد نظر را پیدا کنید.

$$\int_1^2 \frac{4+u^2}{u^3} du \quad 64$$

$$\int_2^4 \frac{x}{x} dx \quad 63$$

$$\int_2^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx \quad 66$$

$$\int_1^2 \frac{dt}{8-3t} \quad 65$$

$$\int_e^6 \frac{dx}{x \ln x} \quad 68$$

$$\int_1^e \frac{x^2+x+1}{x} dx \quad 67$$

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin x} dx \quad 70$$

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx \quad 69$$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \quad 72$$

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx \quad 71$$

تمرین *۳.۷

۱. نمودار تابع $f(x) = e^x$ را با توجه خاص به اینکه چگونه محور y را قطع می‌کند دستی رسم کنید. با استفاده از کدام مطلب این کار را می‌کنید؟

۴-۲ هر یک از عبارتها را ساده کنید.

۲. الف) $e^{\ln 15}$ ب) $\ln \frac{1}{e}$

۳. الف) $e^{-2 \ln 5}$ ب) $\ln(\ln e^{e^1})$

۴. الف) $\ln e^{\sin x}$ ب) $e^{x + \ln x}$

۱۲-۵ هر یک از معادله‌ها را برحسب x حل کنید.

۵. الف) $2 \ln x = 1$ ب) $e^{-x} = 5$

۶. الف) $e^{2x+3} - 7 = 0$ ب) $\ln(5 - 2x) = -3$

۷. الف) $e^{2x+1} = k$ ب) $\ln x + \ln(x-1) = 1$

۸. الف) $\ln(\ln x) = 1$ ب) $e^{e^x} = 10$

۹. $3xe^x + x^2e^x = 0$ ۱۰. $10(1 + e^{-x})^{-1} = 3$

۱۱. $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ ۱۲. $\ln(2x+1) = 2 - \ln x$

۱۴-۱۳ جواب معادله موردنظر را با دقت چهار رقم اعشار پیدا کنید.

۱۳. الف) $e^{2+5x} = 100$ ب) $\ln(e^x - 2) = 3$

۱۴. الف) $\ln(1 + \sqrt{x}) = 2$ ب) $e^{1/(x-2)} = 7$

۱۶-۱۵ هر یک از نامعادله‌ها را برحسب x حل کنید.

۱۵. الف) $e^x < 10$ ب) $\ln x > -1$

۱۶. الف) $2 < \ln x < 9$ ب) $e^{2-3x} > 4$

۲۰-۱۷ نمودار حدودی تابع موردنظر را رسم کنید. از ماشین حساب استفاده نکنید. فقط از نمودار داده شده در شکل ۲ و اگر لازم بود از تبدیلهای بخش ۳.۱ استفاده کنید.

۱۷. $y = e^{-x}$

۱۹. $y = 1 - \frac{1}{4}e^{-x}$

۱۸. $y = 1 + 2e^x$

۲۰. $y = 2(1 - e^x)$

۲۲-۲۱ الف) دامنه تابع f و f^{-1} (ب) و دامنه‌اش را پیدا کنید.

۲۱. $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$ ۲۲. $f(x) = \ln(2 + \ln x)$

۲۶-۲۳ تابع وارون را پیدا کنید.

۲۳. $y = \ln(x+3)$ ۲۴. $y = (\ln x)^2, x \geq 1$

۲۵. $f(x) = e^{x^2}$ ۲۶. $y = \frac{e^x}{1 + 2e^x}$

۳۲-۲۷ حد موردنظر را پیدا کنید.

۲۷. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$ ۲۸. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2}$

۲۹. $\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{x/(2-x)}$ ۳۰. $\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{x/(2-x)}$

۳۱. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-2x} \cos x)$ ۳۲. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} e^{\tan x}$

۴۸-۳۳ از تابع داده شده مشتق بگیرید.

۳۳. $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$ ۳۴. $y = \frac{e^x}{1+x}$

۳۵. $y = e^{ax^2}$ ۳۶. $y = e^u(\cos u + cu)$

۳۷. $f(u) = e^{1/u}$ ۳۸. $g(x) = \sqrt{x}e^x$

۳۹. $F(t) = e^{t \sin 2t}$ ۴۰. $f(t) = \sin(e^t) + e^{\sin t}$

۴۱. $y = \sqrt{1 + 2e^{2x}}$ ۴۲. $y = e^{k \tan \sqrt{x}}$

۴۳. $y = e^{e^x}$ ۴۴. $y = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$

۴۵. $y = \frac{ae^x + b}{ce^x + d}$ ۴۶. $y = \sqrt{1 + xe^{-2x}}$

۴۷. $y = \cos \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$ ۴۸. $f(t) = \sin^2(e^{\sin t})$

ج) نمودار p را در حالتی که $a = 10$ و $k = 0.5$ و t بر حسب ساعت است رسم کنید. با استفاده از این نمودار مدت زمانی را که طول می‌کشد 8% افراد این شایعه را بشنوند تخمین بزنید.

۶۲) در دوره زمانی 1980 تا 2000 ، درصد خانواده‌هایی در ایالات متحده که دست‌کم دستگاه ضبط کاست ویدئو داشته‌اند با تابع

$$V(t) = \frac{85}{1 + 53e^{-0.15t}}$$

که در اینجا t بر حسب سال از نیمه 1980 است، و در نتیجه $0 \leq t \leq 20$ ، مدل‌سازی شده است. با استفاده از نمودار زمانی را تخمین بزنید که سرعت ازدیاد تعداد دستگاه‌های ضبط کاست ویدئو بیشترین بوده است. با استفاده از مشتق تخمین بهتری پیدا کنید.

۶۳) مقدار ماکسیمم مطلق تابع $f(x) = x - e^x$ را پیدا کنید.

۶۴) مقدار مینیمم مطلق تابع $g(x) = \frac{e^x}{x}$ ، $x > 0$ ، را پیدا کنید.

۶۵-۶۶) مقدارهای ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق f را روی بازه داده شده پیدا کنید.

۶۵) $f(x) = xe^{-x^2/8}$ ، $[-1, 4]$

۶۶) $f(x) = x^2e^{-x/2}$ ، $[-1, 6]$

۶۷-۶۸) الف) بازه‌های صعودی بودن یا نزولی بودن، ب) بازه‌های تقعر و عطف‌های عطف را پیدا کنید.

۶۷) $f(x) = (1-x)e^{-x}$ ۶۸) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

۶۹-۷۰) منحنی داده شده را با استفاده از الگوی بخش ۵.۴ بررسی کنید.

۶۹) $y = e^{-1/(x+1)}$ ۷۰) $y = e^{2x} - e^x$

۷۱) منحنی واکنش دارویی میزان دارو در سیستم گردش خون را پس از خوراندن دارو نشان می‌دهد. اغلب از تابع سیلانی مانند $S(t) = At^pe^{-kt}$ برای مدل‌سازی منحنی واکنش استفاده می‌شود، که نشان‌دهنده سیلان اولیه در میزان داروست و پس از آن افتی تدریجی. اگر در مورد دارویی خاص $A = 0.1$ ، $p = 4$ ، $k = 0.07$ و t بر حسب دقیقه باشد، زمانهای متناظر با نقطه‌های عطف را تخمین بزنید و معنی آنها را بگویید. اگر ابزار رسامی دارید، با استفاده از آن منحنی واکنش دارویی را رسم کنید.

۳۷) تابع نامی طبیعی
۴۹-۵۰) معادله خط مماس بر منحنی در نقطه داده شده را پیدا کنید.

۴۹) $y = e^{1/x} \cos \pi x$ ، $(0, 1)$

۵۰) $y = \frac{e^x}{x}$ ، $(1, e)$

۵۱) اگر $y = x + y e^{x^2}$ ، y' را پیدا کنید.

۵۲) معادله خط مماس بر منحنی $1 = xe^y + ye^x$ در نقطه $(0, 1)$ را پیدا کنید.

۵۳) نشان دهید که تابع $y = e^x + e^{-x/2}$ در معادله دیفرانسیل $y'' - y' - y = 0$ صدق می‌کند.

۵۴) نشان دهید که تابع $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ در معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + y = 0$ صدق می‌کند.

۵۵) به ازای چه مقدارهایی از r تابع $y = e^{rx}$ در معادله $6y'' + 6y' + 8y = 0$ صدق می‌کند.

۵۶) مقدارهایی از λ را پیدا کنید که به ازای آنها $y = e^{\lambda x}$ در معادله $y'' = y' + y$ صدق می‌کند.

۵۷) اگر $f(x) = e^{2x}$ ، دستوری برای $f^{(n)}(x)$ پیدا کنید.

۵۸) مشتق هزارم $f(x) = xe^{-x}$ را پیدا کنید.

۵۹) الف) با استفاده از قضیه مقدار میانی نشان دهید که معادله $e^x + x = 0$ ریشه دارد.

ب) با استفاده از روش نیوتن ریشه معادله قسمت الف) را با دقت شش رقم اعشار پیدا کنید.

۶۰) با استفاده از نمودار تقریبی اولیه (تا یک رقم اعشار) برای ریشه معادله $x^2 - x + 1 = e^{-x} \sin x$ پیدا کنید. سپس با استفاده از روش نیوتن این ریشه را با دقت هشت رقم اعشار پیدا کنید.

۶۱) در شرایطی شایعه‌ای مطابق دستور

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

بخش می‌شود، که در اینجا $p(t)$ نسبتی از جمعیتی است که در زمان t از شایعه اطلاع دارند و a و k عددهایی ثابت و مثبت‌اند. (در بخش ۴.۱۰ خواهیم دید که این مدل برای $p(t)$ منطقی است.)

الف) $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$ را پیدا کنید.

ب) آهنگ بخش شدن شایعه را پیدا کنید.

۸۶. اگر $f''(x) = 3e^x + 5 \sin x$ ، $f(0) = 1$ و $f'(0) = 2$ ، $f(x)$ را پیدا کنید.

۸۷. حجم جسمی سه بعدی را که با دوران دادن ناحیه محدود به منحنیهای $y = e^x$ ، $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = 1$ حول محور x به دست می آید پیدا کنید.

۸۸. حجم جسمی سه بعدی را که با دوران دادن ناحیه محدود به منحنیهای $y = e^{-x^2}$ ، $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = 1$ حول محور y به دست می آید پیدا کنید.

۸۹. از تابع خطا
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

در احتمال، آمار و مهندسی استفاده می شود.

الف) نشان دهید که $\int_a^b e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} (\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a))$

ب) نشان دهید که تابع $y = e^{x^2} \operatorname{erf}(x)$ در معادله دیفرانسیل $y' = 2xy + \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ صدق می کند.

۹۰. جمعیتی از باکتریها در ابتدا ۴۰۰ باکتری است و با آهنگ $r(t) = (450, 268)e^{1/12567t}$ باکتری در هر ساعت رشد می کند. پس از سه ساعت چند باکتری وجود دارد؟

۹۱. اگر $f(x) = 3 + x + e^x$ ، $(f^{-1})'(4)$ را پیدا کنید.

۹۲. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin x} - 1}{x - \pi}$ را حساب کنید.

۹۳. اگر نمودار تابع

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

را رسم کنید، به نظر می رسد که f تابعی فرد است. این حکم را ثابت کنید.

۹۴. چند عضو خانواده تابعهای

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^{bx}}$$

را که در آنها $a > 0$ ، رسم کنید. اگر b تغییر کند، نمودارها چگونه تغییر می کنند. اگر a تغییر کند چگونه؟

۹۵. قاعده دوم نماها را ثابت کنید (۷ را ببینید).

۹۶. قاعده سوم نماها را ثابت کنید (۷ را ببینید).

۷۲-۷۳ نموداری برای f رسم کنید که همه ویژگیهای مهم منحنی را نشان دهد. مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی را تخمین بزنید و سپس با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدارهای دقیقشان را حساب کنید. با استفاده از نمودار f'' نقطه های عطف را تخمین بزنید.

۷۳. $f(x) = e^{x^2-x}$ ۷۲. $f(x) = e^{\cos x}$

۷۴. به خانواده منحنیهای زنگوله ای شکل

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

در احتمال و آمار برمی خوریم، که در آنجا این تابع را تابع چگالی نرمال می نامند. عدد ثابت μ را میانگین و عدد ثابت مثبت σ را انحراف معیار می نامند. برای ساده کردن کار اندازه گیری را طوری تغییر می دهیم که عامل $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ حذف شود و حالت خاصی را بررسی می کنیم که $\mu = 0$. به این ترتیب تابع

$$f(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}$$

را بررسی می کنیم.

الف) مجانب، مقدار ماکسیمم و نقطه های عطف f را پیدا کنید.

ب) σ چه نقشی در تعیین شکل این منحنی دارد؟

ج) با ترسیم چهار عضو از این خانواده روی یک صفحه نمایش درستی پاسختان را روشن کنید.

۷۵-۸۴ انتگرال مورد نظر را پیدا کنید.

۷۶. $\int_1^1 xe^{-x^2} dx$ ۷۵. $\int_0^0 e^{-2x} dx$

۷۸. $\int \frac{(1+e^x)^2}{e^x} dx$ ۷۷. $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$

۸۰. $\int e^x (4 + e^x)^5 dx$ ۷۹. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

۸۲. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$ ۸۱. $\int \sin x e^{\cos x} dx$

۸۴. $\int e^x \sin(e^x) dx$ ۸۳. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

۸۵. مساحت محدود به منحنیهای $y = e^x$ ، $y = e^{2x}$ و $x = 1$ با دقت سه رقم اعشار پیدا کنید.

*۴.۷ تابعهای لگاریتمی و نمایی کلی

۹۷. الف) اگر $x \geq 0$ ، نشان دهید $e^x \geq 1 + x$.
(راهنمایی: نشان دهید که $f(x) = e^x - (1 + x)$ به ازای $x > 0$ صعودی است.)

ب) نتیجه بگیرید $\frac{4}{3} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$

۹۸. الف) با استفاده از نابرابری تمرین ۹۷ (الف) نشان دهید که، به ازای $x \geq 0$

$$e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$



۱. الف) تساوی بنویسید که تابع نمایی با پایه a ، $a > 0$ ، را تعریف می‌کند.

ب) دامنه این تابع چیست؟

ج) اگر $a \neq 1$ ، برد این تابع چیست؟

د) شکل کلی نمودار تابع نمایی را در هر یک از حالت‌های زیر رسم کنید.

(i) $a > 1$ (ii) $a = 1$ (iii) $0 < a < 1$

۲. الف) اگر a عددی مثبت باشد و $a \neq 1$ ، $\log_a x$ چگونه تعریف می‌شود؟

ب) دامنه تابع $f(x) = \log_a x$ چیست؟

ج) برد این تابع چیست؟

د) اگر $a > 1$ ، شکل کلی نمودارهای $y = a^x$ و $y = \log_a x$ را در یک دستگاه مختصات بکشید.

۳. عبارت داده شده را به شکل توانی از e بنویسید.

۲. $5\sqrt{2}$

۴. $10x^2$

۵. $(\cos x)^x$

۶. $x^{\cos x}$

۷-۱۰ عبارت موردنظر را حساب کنید.

۷. الف) $\log_5 125$ ب) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$

۸. الف) $\log_{10} \sqrt{10}$ ب) $\log_8 320 - \log_8 5$

۹. الف) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$

ب) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

۱۰. الف) $\log_a \frac{1}{a}$ ب) $10(\log_{10} 4 + \log_{10} 7)$

۱۱-۱۲ با معادله‌های داده شده را روی یک صفحه نمایش رسم کنید. این نمودارها چه ربطی به هم دارند؟

۱۱. $y = 2^x$ ، $y = 5^x$ ، $y = e^x$ ، $y = 20^x$

۱۲. $y = 3^x$ ، $y = 10^x$ ، $y = (\frac{1}{3})^x$ ، $y = (\frac{1}{10})^x$

۱۳. با استفاده از دستور ۶ هر یک از لگاریتم‌های زیر را با دقت شش رقم اعشار حساب کنید.

الف) $\log_{12} e$ ب) $\log_6 13,54$ ج) $\log_2 \pi$

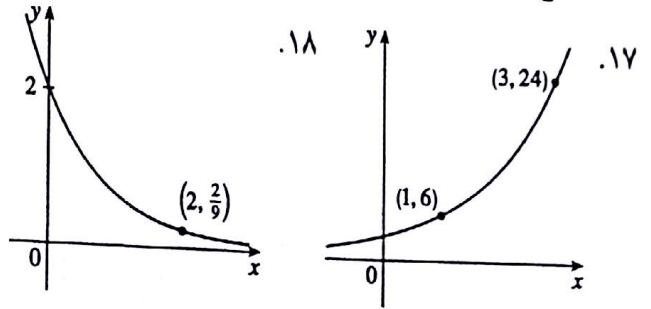
۱۴-۱۶ با استفاده از دستور ۶ نمودار تابعهای داده شده را روی یک صفحه نمایش رسم کنید. این نمودارها چه ربطی به هم دارند؟

فصل ۷. تابعهای وارون

- ۳۱. $f(x) = \log_2(1 - 3x)$
- ۳۲. $f(x) = \log_5(xe^x)$
- ۳۳. $y = 2x \log_{10} \sqrt{x}$
- ۳۴. $y = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$
- ۳۵. $y = x^x$
- ۳۶. $y = x^{\cos x}$
- ۳۷. $y = x^{\sin x}$
- ۳۸. $y = \sqrt{x^x}$
- ۳۹. $y = (\cos x)^x$
- ۴۰. $y = (\sin x)^{\ln x}$
- ۴۱. $y = (\tan x)^{1/x}$
- ۴۲. $y = (\ln x)^{\cos x}$

- ۱۴. $y = \log_8 x, y = \log_6 x, y = \log_2 x, y = \log_7 x$
- ۱۵. $y = \log_5 x, y = \log_{10} x, y = \ln x, y = \log_{1.5} x$
- ۱۶. $y = 10^x, y = e^x, y = \log_{10} x, y = \ln x$

۱۷-۱۸ تابع نمایی $f(x) = Ca^x$ را که نمودارش داده شده است پیدا کنید.



۴۳. معادله خط مماس بر منحنی $y = 10^x$ در نقطه $(1, 10)$ را پیدا کنید.

۴۴. اگر $f(x) = x^{\cos x}$ ، $f'(x)$ را پیدا کنید. با مقایسه نمودارهای f' تحقیق کنید که پاسختان قابل قبول است.

۴۵-۵۰ انتگرال موردنظر را پیدا کنید.

- ۴۵. $\int_1^2 10^t dt$
- ۴۶. $\int (x^5 + 5^x) dx$
- ۴۷. $\int \frac{\log_{10} x}{x} dx$
- ۴۸. $\int x 2^{x^2} dx$
- ۴۹. $\int 3^{\sin \theta} \cos \theta d\theta$
- ۵۰. $\int \frac{2^x}{2^x + 1} dx$

۵۱. مساحت ناحیه محدود به منحنیهای $y = 2^x$ ، $y = 5^x$ ، $x = -1$ و $x = 1$ را پیدا کنید.

۵۲. ناحیه زیر منحنی $y = 10^{-x}$ از $x = 0$ تا $x = 1$ را حول محور x دوران داده‌ایم. حجم جسم سه‌بعدی حاصل را پیدا کنید.

۵۳. با استفاده از نمودار ریشه معادله $2^x = 1 + 3^{-x}$ را با دقت یک رقم اعشار پیدا کنید. سپس با استفاده از این تخمین به‌عنوان تقریب اولیه در روش نیوتن این ریشه را با دقت شش رقم اعشار پیدا کنید.

۵۴. اگر $x^y = y^x$ ، y' را پیدا کنید.

۵۵. تابع وارون $f(x) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ را پیدا کنید.

۵۶. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\ln x}$ را حساب کنید.

۵۷. ک.ف. ریشتر زمین‌شناس، بزرگی زمین‌لرزه را $\log_{10}(I/S)$ تعریف کرده است، که در اینجا I شدت لرزه است (که بر حسب دامنه لرزه‌نگاری است که فاصله‌اش از کانون زمین‌لرزه ۱۰۰ کیلومتر است) و S شدت زمین‌لرزه «استاندارد» است (که در اینجا دامنه فنظ

۱۹. الف) فرض کنید که نمودارهای $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ را در کاغذی شطرنجی که واحد اندازه‌گیری آن ۱ اینچ است رسم کرده‌ایم. نشان دهید که به فاصله ۲ فوت در سمت راست مبدأ، بلندی نمودار f ، ۴۸ ft است اما بلندی نمودار g حدوداً ۲۶۵ mi است.

ب) فرض کنید نمودار $y = \log_2 x$ روی کاغذی شطرنجی که واحد آن یک اینچ است رسم شده است. پیش از اینکه ارتفاع این منحنی به ۳ فوت برسد، چند مایل می‌توانیم در سمت راست مبدأ حرکت کنیم؟

۲۰. آهنگ رشد تابعهای $f(x) = x^5$ و $g(x) = 5^x$ را با ترسیم این دو تابع در چندین کادر مقایسه کنید. همه نقطه‌های برخورد این نمودارها را با دقت یک رقم اعشار پیدا کنید.

۲۱-۲۴ حد موردنظر را پیدا کنید.

- ۲۱. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/10)^x$
- ۲۲. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1/10)^x$
- ۲۳. $\lim_{t \rightarrow \infty} 2^{-t^2}$
- ۲۴. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \log_{10}(x^2 - 5x + 6)$

۲۵-۴۲ از تابع موردنظر مشتق بگیرید.

- ۲۵. $h(t) = t^2 - 3^t$
- ۲۶. $g(x) = x^2 2^x$
- ۲۷. $y = 5^{-1/x}$
- ۲۸. $y = 10^{\tan \theta}$
- ۲۹. $f(u) = (2^u + 2^{-u})^{10}$
- ۳۰. $y = 2^{3x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} \quad .۳۸$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^r e^x \quad .۴۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x \quad .۴۲$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 - \tan x) \sec x \quad .۴۴$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} x \tan \frac{1}{x} \quad .۴۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x) \quad .۴۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) \quad .۵۰$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x e^{1/x} - x) \quad .۵۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan 2x)^x \quad .۵۴$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx} \quad .۵۶$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{(\ln 2)/(1+\ln x)} \quad .۵۸$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{1/x} \quad .۶۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan(\pi x/2)} \quad .۶۲$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5} \right)^{2x+1} \quad .۶۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^r} \quad .۳۷$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x} \quad .۳۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot 2x \sin 6x \quad .۴۱$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^r e^{-x^r} \quad .۴۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \tan \frac{\pi x}{2} \quad .۴۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad .۴۷$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \quad .۴۹$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) \quad .۵۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^r} \quad .۵۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{1/x} \quad .۵۵$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right)^x \quad .۵۷$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} \quad .۵۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+1)^{\cot x} \quad .۶۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x^r} \quad .۶۳$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (p(x) - q(x)) \quad \text{ب}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - p(x)) \quad \text{الف} \quad .۳$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (p(x) + q(x)) \quad \text{ج}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} \quad \text{الف} \quad .۴$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{p(x)} \quad \text{ب}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (p(x))^{f(x)} \quad \text{د}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[q(x)]{p(x)} \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (h(x))^{p(x)} \quad \text{ج}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (p(x))^{q(x)} \quad \text{د}$$

۵-۶۴ حد موردنظر را پیدا کنید. هر جا که می‌شود از قاعده هوییتال استفاده کنید. اگر روشی مقدماتی‌تر وجود داشت، از آن هم استفاده کنید. اگر نمی‌شود از قاعده هوییتال استفاده کرد توضیح دهید که چرا چنین است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \quad .۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} \quad .۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1} \quad .۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^5 - 1} \quad .۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x} \quad .۱۰$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \quad .۹$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{rt} - 1}{t} \quad .۱۲$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t^r} \quad .۱۱$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin \theta}{\csc \theta} \quad .۱۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan px}{\tan qx} \quad .۱۳$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^r}{1 - 2x^r} \quad .۱۶$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad .۱۵$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln x}{x} \quad .۱۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad .۱۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x} \quad .۲۰$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^r} \quad .۱۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^r} \quad .۲۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^r} \quad .۲۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} \quad .۲۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{\tan x} \quad .۲۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^r} \quad .۲۶$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{5^t - 3^t}{t} \quad .۲۵$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^r}{x} \quad .۲۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} \quad .۲۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^r} \quad .۳۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^r} \quad .۲۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan^{-1}(2x)} \quad .۳۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} \quad .۳۱$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{2x^2 + 1}} \quad .۳۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x} \quad .۳۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \quad .۳۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - ax + a - 1}{(x-1)^2} \quad .۳۵$$

۶۵-۶۶ با استفاده از نمودار مقدار حد موردنظر را تخمین بزنید. سپس با استفاده از قاعده هوییتال مقدار دقیق را پیدا کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - 4x}{3x - 2x} \quad .۶۶$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x \quad .۶۵$$

۶۷-۶۸ با ترسیم هر دو $\frac{f(x)}{g(x)}$ و $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ در نزدیکی $x = 0$ و مشاهده اینکه وقتی $x \rightarrow 0$ حد این نسبتها یکسان است درستی قاعده هوییتال را روشن کنید. همچنین، مقدار دقیق حد موردنظر را حساب کنید.

$$g(x) = x^2 + 4x, \quad f(x) = e^x - 1 \quad .۶۷$$

$$g(x) = \sec x - 1, \quad f(x) = 2x \sin x \quad .۶۸$$

۶۹-۷۴ از قاعده هوییتال برای کمک به ترسیم منحنی موردنظر استفاده کنید. از الگوی بخش ۵.۴ استفاده کنید.

$$y = \frac{\ln x}{x^2} \quad .۷۰$$

$$y = \frac{e^x}{x} \quad .۷۲$$

$$y = (x^2 - 3)e^{-x} \quad .۷۴$$

$$y = xe^{-x} \quad .۶۹$$

$$y = xe^{-x^2} \quad .۷۱$$

$$y = x - \ln(1+x) \quad .۷۳$$

۷۷-۷۵ CAS

- الف) نمودار تابع موردنظر را رسم کنید.
- ب) با استفاده از قاعده هوییتال رفتار تابع موردنظر را وقتی که $x \rightarrow 0^+$ یا $x \rightarrow \infty$ توضیح دهید.
- ج) مقدارهای ماکسیمم و مینیمم را تخمین بزنید و سپس با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدارهای دقیق را پیدا کنید.
- د) با استفاده از نمودار f'' مختص x نقطه‌های عطف را تخمین بزنید.

$$f(x) = (\sin x)^{\sin x} \quad .۷۶$$

$$f(x) = x^{-x} \quad .۷۵$$

$$f(x) = x^{1/x} \quad .۷۷$$

(نمونه سوال امتحانی)

۱. معکوس تابع $y = \frac{e^x}{1+2e^x}$ را در صورت وجود بیابید.

۲. معکوس $y = e^x$ ، $y = e^{-x}$ ، $x=2$ را بیابید.

۳. مشتق بگیرد یا ثابت آورید

$\int \frac{dx}{x(2+(\ln x)^2)}$, $\int_0^1 \frac{dx}{2+\omega^x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-2}{2x-3}\right)^{2x}$, $y = x^{\ln x}$

۴. نشان دهید $\int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}} dx \geq \frac{1}{2}(e^2-1)$

۵. نشان دهید برای $x > 0$: $x^2 - \frac{1}{4}x^4 < \ln(1+x^2) < x^2$

۶. بیابید $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sin \sqrt{t} dt}{x^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+e^{-\sqrt{x}})}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{1}{x}} - x)$

۷. نشان دهید اگر $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$: $(x - \frac{\pi}{4}) \cot x \leq \ln(\sin x) \leq 0$

۸. معکوس تابع معکوس $y = \frac{1}{1+e^x}$ ، محور x ، و خطوط $x=0$ و $x=1$ را بیابید.

۹. ثابت کنید برای $x > 0, x \neq 1$: $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$

۱۰. ثابت کنید برای $x \in \mathbb{R}$: $1 + x \leq e^x$. سپس به کمک آن ثابت کنید

الف) برای $0 \leq x < 1$: $e^x \leq \frac{1}{1-x}$

ب) برای $x > 1$: $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \leq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

۱۱. نمودار تابع $y = \frac{\ln|x|}{x}$ را رسم کنید.

JUL 2015

Sun	Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	