بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی در شیمی

سمیه میرزاده

جلسه سوم غیر حضوری (۱۷ اسفند ۱۳۹۸)

معادله ریکاتی:

$$y' + p(x)\,y + R(x)\,y^2 = q(x)$$

که $R(x) \neq 0$ و p و q و R توابعی پیوسته برحسب x اند.

(چون اگر $R(x) = 0$

$$\Downarrow$$

$y' + p(x)\,y = q(x)$ خطی مرتبه اول)

روش حل معادلات ریکاتی:

اگر y_1 یک جواب از معادله ریکاتی باشد، آنگاه

$$\boxed{y = y_1 + \frac{1}{v(x)}}$$

جواب عمومی معادله ریکاتی است.

توجه کنید تابع $v(x)$ نامعلوم است. با جایگذاری y در معادله به یک معادله خطی مرتبه اول برحسب v و x می رسید، درنتیجه v را می توان برحسب x بدست آورد و سپس در جواب عمومی جایگذاری کرد.

توجه: برای حل معادلات ریکاتی، باید یک جواب از این معادله را داشته باشیم.

مثال ۱: معادله دیفرانسیل $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x$ که $y_1 = e^x$ یک جواب آن باشد، را حل کنید.

$$y' - y - e^{-x}y^2 = -e^x$$

معادله ریکاتی

$$y_1 = e^x \Longrightarrow y = y_1 + \frac{1}{v} \Longrightarrow \boxed{y = e^x + \frac{1}{v}} \to ?$$

جواب عمومی معادله

$$\begin{cases} y = e^x + \dfrac{1}{v} \\ y' = e^x - \dfrac{v'}{v^2} \end{cases} \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{با جایگذاری در}} e^x - \frac{v'}{v^2} - e^{+x} - \frac{1}{v} - e^{-x}\left(e^x + \frac{1}{v}\right)^2 = -e^x$$

$$\Rightarrow e^{x}-\frac{v'}{v^{۲}}-e^{x}-\frac{1}{v}-e^{-x}\left(\underbrace{(e^{x})^{۲}}_{e^{۲x}}+\frac{۲e^{x}}{v}+\frac{1}{v^{۲}}\right)=-e^{x}$$

$$\Rightarrow \cancel{e^{x}}-\frac{v'}{v^{۲}}-\cancel{e^{x}}-\frac{1}{v}-e^{x}-\frac{۲}{v}-\frac{e^{-x}}{v^{۲}}=-e^{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{v'}{v^{۲}}-\frac{۳}{v}-\cancel{e^{x}}-\frac{e^{-x}}{v^{۲}}=\cancel{-e^{x}}$$

$$\xrightarrow{\times(-v^{۲})} v'+۳v+e^{-x}=0 \Rightarrow v'+۳v=-e^{-x}$$

معادله خطی مرتبه اول برحسب v و x

$$P(x)=۳\ ,\ q(x)=-e^{-x}$$

$$v(x)=e^{-\int ۳dx}\left[\int e^{\int ۳dx}\times(-e^{-x})\,dx+c\right]$$

$$\Longrightarrow v(x)=e^{-۳x}\left[\int \underbrace{e^{۳x}\times(-e^{-x})}_{-e^{۲x}}\,dx+c\right]$$

$$\Longrightarrow v(x)=e^{-۳x}\left[-\int e^{۲x}\,dx+c\right]$$

$$\boxed{\Longrightarrow v(x)=e^{-۳x}\left[-\frac{1}{۲}e^{۲x}+c\right]}$$

$$\Downarrow$$

$$y=e^{x}+\frac{1}{v}=e^{x}+\frac{1}{e^{-۳x}\left[-\frac{1}{۲}e^{۲x}+c\right]}=\boxed{e^{x}+\frac{1}{-\frac{1}{۲}e^{-x}+ce^{-۳x}}}$$

جواب عمومی معادله

مثال ۲:

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \ , \ y_1 = x$$

معادله ریکاتی $y' + 2xy - y^2 = 1 + x^2 \ , \ y_1 = x$

جواب عمومی $y = y_1 + \frac{1}{v} \Rightarrow \boxed{y = x + \frac{1}{v}} \Rightarrow \boxed{y' = 1 - \frac{v'}{v^2}}$

$\xrightarrow[\text{معادله}]{\text{با جایگذاری در}}$ $1 - \frac{v'}{v^2} + 2x\left(x + \frac{1}{v}\right) - \left(x + \frac{1}{v}\right)^2 = 1 + x^2$

$$\Rightarrow 1 - \frac{v'}{v^2} + 2x^2 + \frac{2x}{v} - \left(x^2 + \frac{2x}{v} + \frac{1}{v^2}\right) = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{v'}{v^2} + 2x^2 + \cancel{\frac{2x}{v}} - x^2 - \cancel{\frac{2x}{v}} - \frac{1}{v^2} = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow \cancel{1} - \frac{v'}{v^2} + \cancel{x^2} - \frac{1}{v^2} = \cancel{1} + \cancel{x^2}$$

$$\Longrightarrow -\frac{v'}{v^2} - \frac{1}{v^2} = 0 \xrightarrow{\times v^2} -v' - 1 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} v' + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{dv}{dx} + 1 = 0 \xrightarrow{\times dx} dv + dx = 0 \Longrightarrow \int dv + \int dx = c$$

معادله جدایی پذیر

$$\Longrightarrow v + x = c \Longrightarrow \boxed{v = -x + c}$$

در جواب عمومی جایگذاری کنید

$$\boxed{y = x + \frac{1}{v} = x + \frac{1}{-x+c}}$$ جواب عمومی معادله

تمرین:

الف) $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2, \quad y_1 = -x^2$

ب) $y' = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}, \quad y_1 = x$

معادلات دیفرانسیل قابل تبدیل به معادلات مرتبه اول

بعضی از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر با یک تغییر متغیر مناسب، به یک معادله مرتبه اول تبدیل می‌شوند.

دسته اول (نوع اول): معادلات فاقد y

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$ معادله مرتبه n، فاقد y

با تغییر متغیر $\underbrace{u = y^{(n-1)} \Longrightarrow u' = y^{(n)}}$

$\Downarrow$ جایگذاری در معادله

$$F(x, u, u') = 0$$ معادله مرتبه اول برحسب u و x

مثال 1:

$$y'' - \frac{1}{x} y' = 0$$ معادله مرتبه دوم و فاقد y

$$u = y' \Rightarrow u' = y''$$

$\Downarrow$ جایگذاری در معادله

$$u' - \frac{1}{x} u = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} - \frac{1}{x} . u = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \Rightarrow \frac{1}{u} du = \frac{dx}{x}$$ جدایی‌پذیر

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{u} du = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln|u| = \ln|x| + \ln c_1$$

$$\xrightarrow{u>0,\ x>0} \ln u = \ln x + \ln c_1 = \ln c_1 x$$

$$\Longrightarrow u = c_1 x \xrightarrow{u=y'} y' = c_1 x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1 x \Longrightarrow dy = c_1 x\,dx$$

جدایی پذیر

$$\Longrightarrow \int dy = \int c_1 x\,dx + c_2$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 = c_1 x^2 + c_2}$$

جواب عمومی معادله

مثال ۲: معادله فاقد y و $x>0$: $xy'' = y' + 1$

$$u = y' \Rightarrow u' = y'' \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{با جایگذاری}} xu' = u + 1$$

$$\Rightarrow xu' - u = 1 \xrightarrow{\times \frac{1}{x}} u' \underbrace{-\frac{1}{x}}_{P(x)} u = \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}$$

خطی مرتبه اول

$$\Rightarrow u = e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left[\int e^{\int -\frac{1}{x}dx} \times \frac{1}{x}dx + c_1\right]$$

$$\Rightarrow u = e^{\ln|x|}\left[\int e^{-\ln|x|} \times \frac{1}{x}dx + c_1\right]$$

$$u = e^{\ln x}\left[\int \cancel{e}^{-\ln x} \times \frac{1}{x}\,dx + c_1\right]$$

$$e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\Longrightarrow u = x\left[\int \underset{\frac{1}{x}}{x^{-1}} \times \frac{1}{x}\,dx + c_1\right]$$

$$\Longrightarrow u = x\left[\int \frac{1}{x^2}\,dx + c_1\right] = x\left[-\frac{1}{x} + c_1\right]$$

$$\Longrightarrow u = -1 + c_1 x \xrightarrow{u = y'} y' = -1 + c_1 x$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -1 + c_1 x \Longrightarrow dy = (-1 + c_1 x)\,dx$$

جوابی بنویسید

$$\Rightarrow \int dy = \int (-1 + c_1 x)\, dx$$

$$\Rightarrow y = -x + \underbrace{\frac{c_1}{2}}_{c_1} x^2 + c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -x + c_1 x^2 + c_2}$$

جواب عمومی معادله

تمرین:

الف) $x^2 y'' + x y' = x + 1$

ب) $y'' = y'$

ج) $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$

پایان

با تشکر