انتگرال های زیر را بیدا کنید

① $\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ ② $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}$

نکته: اگر جملات $\tan^{-1}x$ و یا هر وارون مثلثاتی در انتگرال حضور داشته باشد به شرطی که مشتق آن نیز صرف نظر از ضریب در انتگرال حضور داشته باشد به عنوان u در نظر می گیریم

حل ۱-

$$u=\tan^{-1}x \qquad du=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \int u\,du=\frac{u^2}{2}+C=\frac{(\tan^{-1}x)^2}{2}+C$$

③ $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}\,dx=\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1-(e^{2x})^2}}$

در اینجا هر عبارت داخل رادیکال را نمی توان به عنوان u در نظر گرفت زیرا انتگرال را سخت تر می کند اما اگر

$$u=e^{2x}$$

$$du=2e^{2x}dx$$

$$\Rightarrow e^{2x}dx=\frac{du}{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-(e^{2x})^2}}=\int \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{2}\sin^{-1}u+C$$

$$=\frac{1}{2}\sin^{-1}(e^{2x})+C$$

④ $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ ؟

⑤ $\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^6}}\,dt$ ؟

⑤ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ ؟

⑥ $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ ؟

⑥ حل

$= \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ ← ادامه به عهده دانشجو

⑦ $\int e^x \sqrt{1+e^x}\,dx$

$u = 1+e^x$ ← عبارت داخل رادیکال

$du = e^x dx \rightarrow \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}} du$

$= \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} u\sqrt{u} + C$

⑧ $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

نکته: اگر در انتگرال $(\ln x)$ ضرب داشته باشد
به شرطی که مشتق آن نیز باشد $\Leftarrow$ $u=\ln x$

$u=\ln x$
$du=\frac{dx}{x}$
$\Rightarrow \int u^2\,du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{(\ln x)^3}{3}+C$

⑨ $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$ (u روی $\ln x$، du روی $\frac{dx}{x}$)

$u=\ln x=u$
$du=\frac{dx}{x}$
کسان مثلثاتی به عنوان u $\Leftarrow$
$\rightarrow \int \sin u\,du=-\cos u+C$
$=-\cos(\ln x)+C$

⑩ $\int_e^6 \frac{dx}{x\ln x}$ ؟

نکته: $\int \frac{dx}{ax\pm b}$ بدون استفاده از روش تغییر متغیر
می‌توان به صورت زیر نوشت

$\int \frac{dx}{ax\pm b}=\frac{1}{a}\ln|ax\pm b|+C$

⑪ $\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$

مشتق داخل $\Leftarrow u$
$u=2+\sin x$
$du=\cos x\,dx$

$\rightarrow =\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|2+\sin x|+C$

(چون $0<$ عبارتی به توان مطلق است)
$-1\le \sin x\le 1$