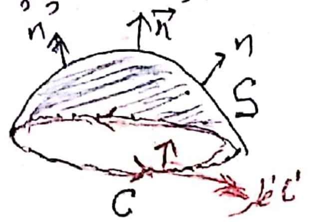
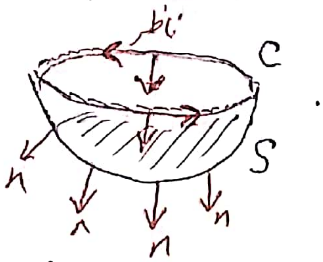
قضیه استوکس

قضیه استوکس تعمیم قضیه گرین به فضا است. دیدیم که قضیه گرین انتگرال دوگانه روی ناحیه مسطح R را به انتگرال خطی دور منحنی مسطحهٔ مرزی اش ربط می دهد. قضیه استوکس انتگرال رویه ای روی رویهٔ S را به انتگرال خطی حول منحنی مرزی S (که منحنی فضایی ما شده است) ربط می دهد.

تعریف (جهت مثبت) فرض کنید که S یک رویه (سطح) جهت دار با بردار قائم $\vec{n}$ باشد که محدود به منحنی بسته C است (یعنی منحنی C مرز رویه را تشکیل می دهد شکل زیر) می گوییم رویه S جهت مثبت به منحنی C القا می کند هرگاه اگر ناظری روی منحنی C حرکت کند و سرش در جهت $\vec{n}$ باشد آنگاه رویه S همواره سمت چپ ناظر باشد.





قضیه استوکس: فرض کنید که S رویه ای قطعه-قطعه هموار (تکه ای-هموار) و جهت دار باشد که محدود به منحنی مرزی قطعه-قطعه هموار (تکه ای-هموار) بسته و ساده با جهت مثبت ما شده C است. فرض کنید که $\vec{F}$ یک میدان برداری باشد که مشتقات جزئی مؤلفه هایش روی ناحیه ای باز در $\mathbb{R}^3$ که S را در بر دارد پیوسته هستند در این صورت

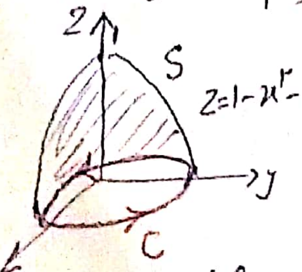
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R} = \iint_S (\text{curl}\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS$$

که در آن dS عنصر سطح (رویه) S است و $dS = |\vec{r}_u\times\vec{r}_v|\,dA$.

به عبارت دیگر: اگر $\vec{F} = P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ و $\vec{R} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ آنگاه

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R} = \oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_S\left[(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}\right]dS = \iint(\text{curl}\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS$$

مثال ۱. دو طرف تساوی قضیه استوکس را برای میدان برداری $\vec{F} = -2z\vec{i}+3x\vec{j}+4y\vec{k}$ تحقیق کنید که در آن S عرقچین سهموی $z=1-x^2-y^2$ ($z\geq 0$) با بردار قائم برونسو $\vec{n}$ که مرزش C دایره واحد $x^2+y^2=1$ در صفحه xoy می باشد.



حل: چون

$$\text{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2z & 3x & 4y \end{vmatrix} = 4\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$$

پس

طرف دوم قضیه استوکس $= \iint_S(\text{curl}\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS \overset{*}{\underset{\text{دستور ۱۰}}{=}} \iint_R\left[-4(-2x)+3(-2y)+3\right]dx\,dy =$

$$= \iint_R(8x-6y+3)\,dx\,dy \xrightarrow[\text{قطبی}]{\text{حل در مختصات}} \int_0^{2\pi}\int_0^1\left[8r\cos\theta-6r\sin\theta+3\right]r\,dr\,d\theta = \text{(در مختصات قطبی)}$$

ادامه در صفحه بعد

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{8r^3}{3}\cos\theta-\frac{4r^3}{3}\sin\theta+\frac{3}{2}r^2\right]_0^1 d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{8}{3}\cos\theta-\frac{4}{3}\sin\theta+\frac{3}{2}\right]d\theta=$$

$$=\frac{8}{3}\underbrace{\left[\sin\theta\right]_0^{2\pi}}_{0}+\frac{4}{3}\underbrace{\left[\cos\theta\right]_0^{2\pi}}_{0}+\frac{3}{2}\left[\theta\right]_0^{2\pi}=0+0=3\pi$$

(*) طبق دستور ۱۰ کتاب صفحه ۱۴۰۱ چون $z=1-x^2-y^2$ و تصویر S در صفحه xoy ناحیه $x^2+y^2=1$ است پس

$$\iint_S (\vec{G}\cdot\vec{n})\,ds=\iint_R\left[-P\frac{\partial z}{\partial x}-Q\frac{\partial z}{\partial y}+R\right]dR$$

که در آن $\vec{G}=\operatorname{curl}\vec{F}$ است.

حال محاسبه طرف اول قضیه استوکس را انجام می‌دهیم

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R}=\int_C -2\underbrace{z\,dx}_{0}+3x\,dy+4y\underbrace{dz}_{0}=\oint_C 3x\,dy=\int_0^{2\pi}3\cos^2\theta\,d\theta=3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=$$

$$\boxed{C\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\Rightarrow dz=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\cos\theta\rightarrow dx=-\sin\theta\,d\theta\\ y=\sin\theta\rightarrow dy=\cos\theta\,d\theta\end{cases}}$$

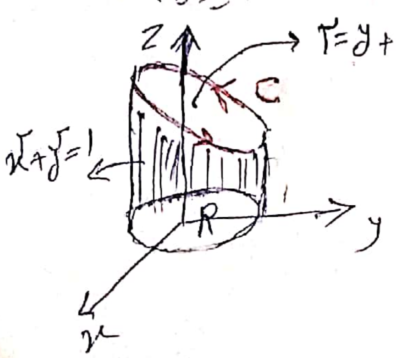
$$=\frac{3}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{3}{2}(2\pi)+0=3\pi$$

بنابراین

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R}=3\pi=\iint_S(\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n})\,ds$$

تبصره: در قضیه استوکس معمولاً محاسبه یکی از دو طرف تساوی قضیه استوکس آسان‌تر و محاسبه کمتری دارد (انجام می‌دهیم) (در مثال قبل دیده شد) بنابراین اگر یک طرف قضیه استوکس از ما خواسته باشد می‌توانیم مستقیم (اگر آسان است) همان طرف را حساب کنیم ولی اگر محاسبه مستقیم سخت یا طولانی باشد معادل آن طرف دیگر را حساب می‌کنیم.

مثال ۲: اگر C منحنی محل برخورد صفحه $y+z=2$ و استوانه $x^2+y^2=1$ باشد و $\vec{F}=-y^2\vec{i}+x\vec{j}+z^2\vec{k}$ آنگاه $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ را حساب کنید (جهت C را وقتی از بالا نگاه می‌کنید خلاف عقربه‌های ساعت بگیرید).



حل: می‌توان مستقیم $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ را حساب کرد (یعنی منحنی C را پارامتری کرد و سپس انتگرال خط را حل کرد که نیاز به محاسبه دارد) پس از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ -y^2&x&z^2\end{vmatrix}=0\vec{i}-0\vec{j}+(1+2y)\vec{k}=(1+2y)\vec{k}$$

S عبارت است از رویه $y+z=2$ پس $z=f(x,y)=2-y$ و تصویر S در صفحه xoy دایره $x^2+y^2=1$ است پس طبق دستور ۱۰ کتاب عمل می‌کنیم

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R}\ \xrightarrow{\text{قضیه}}_{\text{استوکس}}\ \iint_S(\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n})\,ds=\iint_R\left[-(0)\frac{\partial z}{\partial x}-0\frac{\partial z}{\partial y}+(1+2y)\right]dR=$$

مؤلفه‌های $\operatorname{curl}\vec{F}$ هستند

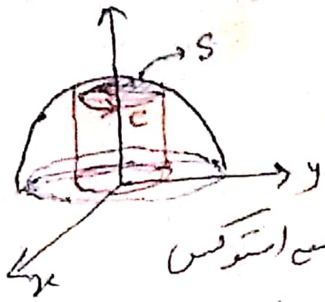
ادامه در صفحه بعد

$$\xrightarrow[\text{قطبی}]{\text{مختصات}} \int_0^{2\pi}\int_0^1 [1+2r\sin\theta]\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}+\frac{2r^3}{3}\sin\theta\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac12+\frac23\sin\theta\right]d\theta$$

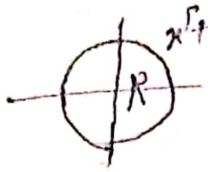
$$= \frac12[\theta]_0^{2\pi} - \frac23\underbrace{[\cos\theta]_0^{2\pi}}_{0} = \frac12(2\pi) = \pi$$

مثال ۳: با استفاده از قضیه استوکس انتگرال $\iint_S (\text{curl}\vec F\cdot\vec n)\,dS$ را حساب کنید که در آن S قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=4$ است که درون استوانه $x^2+y^2=1$ و بالای صفحه xy قرار دارد (بالای صفحه $z=0$) و

$\vec F = xz\vec i + yz\vec j + xy\vec k$



$x^2+y^2=1$



حل: R تصویر S در صفحه xy است

می‌توان $\iint_S (\text{curl}\vec F\cdot\vec n)\,dS$ را حساب کرد (ولی طولانی است) پس طبق قضیه استوکس

انتگرال خط $\oint_C \vec F\cdot d\vec R$ را حساب می‌کنیم در این صورت $C\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$ است که با محاسبه داریم

$$1+z^2=4 \Rightarrow z^2=3 \to z=\sqrt3 \Rightarrow C\begin{cases}z=\sqrt3\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}dz=0\\ x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}dx=-\sin\theta\,d\theta\\ dy=\cos\theta\,d\theta\end{cases}$$

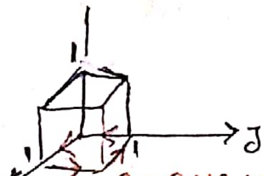
$$\iint_S (\text{curl}\vec F\cdot\vec n)\,dS \overset{\text{قضیه استوکس}}{=} \oint_C \vec F\cdot d\vec R = \oint_C x\underset{\sqrt3}{\underset{\|}{z}}\,dx + y\underset{\sqrt3}{\underset{\|}{z}}\,dy + xy\underset{0}{\underset{\|}{dz}} = \int_0^{2\pi}\Big[\underbrace{-\sqrt3\sin\theta\cos\theta+\sqrt3\sin\theta\cos\theta}_{0}\Big]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 0\,d\theta = 0$$

مثال ۴: فرض کنید که S پنج وجه از شش وجه مکعب واحد باشد (یعنی $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ و $0<z\le 1$)

اگر $\vec F = -y^2\vec i - xz\vec j + x^2\vec k$ و $\vec n$ بردار قائم واحد برون‌سوی S است

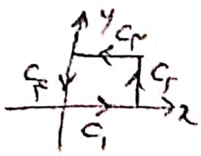
آنگاه $\iint_S (\text{curl}\vec F\cdot\vec n)\,dS$ را حساب کنید.



$C = C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$

حل: اگر بخواهیم $\iint_S (\text{curl}\vec F\cdot\vec n)\,dS$ را حساب کنیم چون $S=\bigcup_{i=1}^{5} S_i = S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5$ باید پنج انتگرال دوگانه را روی این سطوح بدست آوریم که محاسبه طولانی است

پس به کمک قضیه استوکس $\oint_C \vec F\cdot d\vec R$ را حساب می‌کنیم که $C=\bigcup_{i=1}^{4} C_i = C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$



$C_1:\ y=0,\ z=0,\ 0\le x\le 1 \Rightarrow \vec F\cdot d\vec R = 0$

$C_2:\ x=1,\ z=0,\ 0\le y\le 1 \Rightarrow \vec F\cdot d\vec R = 0$

$C_3:\ y=1,\ z=0,\ 0\le x\le 1 \Rightarrow \vec F\cdot d\vec R = -dx$

$C_4:\ x=0,\ z=0,\ 0\le y\le 1 \Rightarrow \vec F\cdot d\vec R = 0$

$\Longrightarrow$

$$\iint_S (\text{curl}\vec F\cdot\vec n)\,dS \overset{\text{قضیه استوکس}}{=} \oint_C \vec F\cdot d\vec R = \underbrace{\int_{C_1}\vec F\cdot d\vec R}_{0} + \underbrace{\int_{C_2}\vec F\cdot d\vec R}_{0} + \int_{C_3}\vec F\cdot d\vec R + \underbrace{\int_{C_4}\vec F\cdot d\vec R}_{0} = -\int_0^1 dx$$

$$= -[x]_0^1 = -1$$

مثال ۵) فرض کنید که $\vec n$ بردار قائم واحد برونسوی بر رویه بیضیگون S به معادله $4x^2+9y^2+36z^2=36$ و $z\geq 0$ باشد اگر $\vec F = y\vec i + x^2\vec j + (x^2+y^4)^{\frac{3}{2}}\sin(e^{\sqrt{xyz}})\vec k$ باشد آنگاه مطلوب است محاسبه $\iint_S (\operatorname{curl}\vec F\cdot\vec n)\,dS$.

حل) طبق قضیه استوکس داریم

$$\iint_S (\operatorname{curl}\vec F\cdot\vec n)\,dS = \oint_C \vec F\cdot d\vec R \Rightarrow$$

$C\begin{cases}4x^2+9y^2+36z^2=36\\ z\geq 0\end{cases} \Rightarrow$ منحنی C به صورت $\begin{cases}z=0\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ است

$$\begin{cases}dz=0\\ x=3\cos\theta \Rightarrow dx=-3\sin\theta\,d\theta\\ y=2\sin\theta \Rightarrow dy=2\cos\theta\,d\theta\end{cases}$$

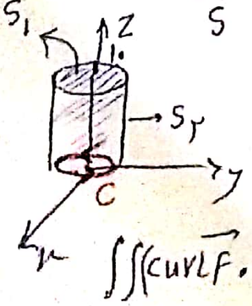
$$\oint_C \vec F\cdot d\vec R = \oint_C y\,dx + x^2dy + (x^2+y^4)^{\frac{3}{2}}\sin(e^{\sqrt{xyz}})\underbrace{dz}_{0} = \oint_{\text{بیضی}} y\,dx + x^2dy = \int_0^{2\pi}[-6\sin^2\theta+12\cos^3\theta]\,d\theta$$

$$= -6\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta + 12\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta = -\frac{6}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} + 12\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{6}{2}(2\pi)+0 = -6\pi$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta = \int(1-u^2)\,du = u-\frac{1}{3}u^3+c = \sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta+c\\ u=\sin\theta \Rightarrow du=\cos\theta\,d\theta\end{array}}$$

مثال ۶. فرض کنید که S سطح بیرونی یک لیوان وارونه با ارتفاع ۱۰ سانتی متر و به صورت استوانه ای با معادله $x^2+y^2=4$ باشد و $\vec F = -y\vec i + x\vec j + x^2\vec k$. مطلوب است محاسبه $\iint_S (\operatorname{curl}\vec F\cdot\vec n)\,dS$



$S=S_1\cup S_2$

حل) اگر بخواهیم مستقیم $\iint_S (\operatorname{curl}\vec F\cdot\vec n)\,dS$ را حساب کنیم باید اول انتگرال هم روی S_1 و هم روی S_2 محاسبه گردد که زمانبر و وقت گیر است پس از قضیه استوکس استفاده می کنیم.

$C:\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=0\end{cases}$

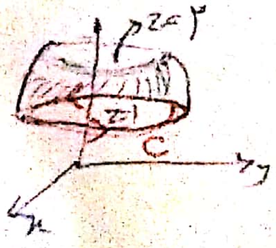
$$\iint_S (\operatorname{curl}\vec F\cdot\vec n)\,dS = \oint_C \vec F\cdot d\vec R = \oint_C -y\,dx + x\,dy + x^2\underbrace{dz}_{0} = \int_{\text{دایره}} -y\,dx + x\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}(4\sin^2\theta+4\cos^2\theta)\,d\theta = 4\int_0^{2\pi}d\theta = 8\pi$$

$x=2\cos\theta \Rightarrow dx=-2\sin\theta\,d\theta$

$y=2\sin\theta \Rightarrow dy=2\cos\theta\,d\theta$

توجه! $\int_{\text{دایره}} -y\,dx+x\,dy \xrightarrow[\text{گرین}]{\text{قضیه}} 2(\text{مساحت دایره}) = 2(4\pi) = 8\pi$



تمرین) فرض کنید که S متشکل از سطح $z=4-x^2-y^2$ و $z=2$ باشد که مانند شکل است C مرز آن یعنی فصل مشترک $z=1$ و سطح S باشد. مطلوب است محاسبه $\oint_C xy\,dx + x^2dy + z^2dz$ (جهت C خلاف عقربه های ساعت)

قضیه دیورژانس (واگرایی) فرض کنید که S یک سطح بسته (رویه بسته) قطعه قطعه هموار باشد و درون S ناحیه سه بعدی D باشد و $\vec{n}$ بردار قائم واحد برونسو بر S باشد. اگر میدان برداری $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ روی D,S بطور پیوسته مشتق پذیر باشد (یعنی مولفه های F روی D و S مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند) در این صورت (آنگاه)

$$\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\, dS = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dD$$

که در آن ، $\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z$

چون انتگرال $\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\, dS$ شار $\vec{F}$ روی سطح S را می دهد بنابراین می توان این شار را با انتگرال سه گانه محاسبه کرد.

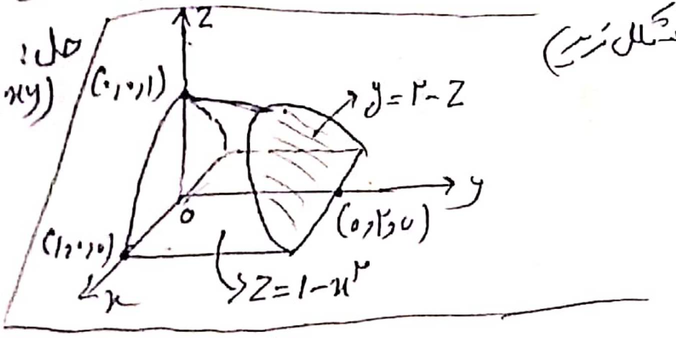
مثال ۱: شار میدان برداری $\vec{F} = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ از روی کره واحد $x^2+y^2+z^2=1$ را بیابید.

حل: از قضیه دیورژانس کمک می گیریم چون $\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(z)}_{0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(y)}_{1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(x)}_{0} = 1$ پس

$$\text{شار} = \iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\, dS = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dD = \iiint_D dD = (\text{حجم کره واحد}) = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi$$

مثال ۲: انتگرال $\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\, dS$ را حساب کنید که در آن $\vec{F} = xy\vec{i} + (y^2 + e^{xz^2})\vec{j} + \sin(xy)\vec{k}$ و S رویه ناحیه D است که محدود با استوانه سهموی $z=1-x^2$ و صفحه های $z=0$ ، $y=0$ و $y+z=2$ است (شکل زیر)

حل:



$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin xy)$$
$$= y + 2y = 3y$$

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -1 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1-x^2,\ 0 \le y \le 2-x \right\}$$

$$\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\, dS = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dD = \iiint_D 3y\, dD = 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} y\, dy\, dz\, dx =$$

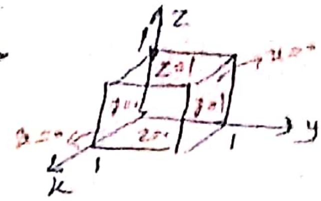
$$= 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{2-z} dz\, dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}(2-z)^2\, dz\, dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[(x^2+1)^3 - 8\right] dx = -\int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7)\, dx = -\left[\frac{1}{7}x^7 + \frac{3}{5}x^5 + x^3 - 7x\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{7} - \frac{3}{5} - 1 + 7 = \frac{-5-21+210}{35} = \frac{184}{35}$$

مثال ۳. شار میدان $\vec{F} = xy^2\vec{i} - yz\vec{j} + x^2z^2\vec{k}$ خارج از مکعب S واقع در یک هشتم اول را بیابید
(یعنی سه صفحه مختصات $x=0$ و $y=0$ و $z=0$ و صفحه های $x=1$ و $y=1$ و $z=1$)

حل: چون $S = \bigcup_{i=1}^{6} S_i$ بسته است از قضیه دیورژانس (دیورژانس) استفاده می‌کنیم



$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-yz) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2z^2) =$$

$$= y^2 - z + 2x^2z$$

$$\text{شار} = \iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dD = \iiint_D (y^2 - z + 2x^2z)\,dD = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y^2 - z + 2x^2z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left[y^2x - zx + \frac{2}{3}x^3z\right]_0^1 dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 \left[y^2 - z + \frac{2}{3}z\right] dy\,dz = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}y^3 - zy + \frac{2}{3}yz\right]_0^1 dz$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} - z + \frac{2}{3}z\right] dz = \left[\frac{1}{3}z - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{3}z^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

مثال ۴. شار میدان $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ خارج از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ را بیابید

حل. طبق قضیه دیورژانس (واگرایی) (S سطح کره و D درون کره است) $\boxed{\operatorname{div}\vec{F} = 3x^2+3y^2+3z^2}$

$$\text{شار} = \iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \iiint_D (\operatorname{div}\vec{F})\,dD = \iiint_D \left[3x^2+3y^2+3z^2\right] dD$$

$$= 3\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dD \xrightarrow[\text{کروی}]{\text{مختصات}} 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi \int_0^{a}\rho^4\,d\rho = 3\left[2\pi\right]\left[2\right]\left[\frac{1}{5}a^5\right] = \frac{12\pi}{5}a^5$$

مثال ۵ شار میدان $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ خارج از سطح S صادق در قضیه دیورژانس را بیابید.

حل.

$$\text{شار}\ \vec{F} = \iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dD = \iiint_D 0\,dD = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0+0+0 =$$

مثال ۶: شار میدان $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ خارج از سطح S که در قضیه دیورژانس صدق می‌کند را بیابید. حل: چون $\operatorname{div}\vec{F} = 3$ پس

$$\text{شار} = \iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F} = 3\iiint_D dD = 3(\text{حجم } D)$$

از مثال قبل می توان نتیجه زیر را گرفت:

نتیجه ۱: اگر S سطحی باشد که در قضیه واگرایی صدق می کند و D هم درون آن باشد آنگاه

$$D \text{ حجم } = S \text{ حجم درون } = \frac{1}{3}\iint_S (\vec F\cdot\vec n)\,dS$$

که در آن $\vec F = x\vec i + y\vec j + z\vec k$

مثال ۷: مطلوب است محاسبه شار میدان $\vec F = xy\vec i + yz\vec j + xz\vec k$ گذرنده از مکعبی که صفحات $x=1$ و $y=1$ و $z=1$ از یک هشتم اول جدا می کند.

حل: چون مکعب قطعه قطعه هموار است پس در قضیه واگرایی صدق می کند و چون

$$\operatorname{div}\vec F = \frac{\partial}{\partial x}(xy)+\frac{\partial}{\partial y}(yz)+\frac{\partial}{\partial z}(xz) = y+z+x$$

پس

$$\text{شار} = \iint_S(\vec F\cdot\vec n)\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\vec F\, dD = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y+z+x)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1\int_0^1\left[yz+\frac{1}{2}z^2+xz\right]_0^1 dy\,dx = \int_0^1\int_0^1\left[y+\frac{1}{2}+x\right]dy\,dx = \int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y+xy\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+x\right]dx = \left[x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

مثال ۸: مطلوب است محاسبه شار برونسوی $\vec F = x\vec i + y\vec j + z\vec k$ گذرنده از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$

حل: چون کره یک سطح بسته هموار است پس طبق قضیه دیورژانس (واگرایی) داریم:

$$\operatorname{div}\vec F = \frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z) = 1+1+1 = 3$$

$$\text{شار} = \iint_S(\vec F\cdot\vec n)\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\vec F\, dD = \iiint_D 3\,dD = 3(\text{حجم کره}) = 4\pi a^3$$

مثال ۹: شار برونسوی $\vec F = \frac{1}{4}x^3\vec i + \frac{1}{9}y^3\vec j + \frac{1}{16}z^3\vec k$ گذرنده از بیضیوار $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ را بیابید.

حل: چون بیضیوار در قضیه دیورژانس صدق می کند (سطح هموار بسته است) و

$$\operatorname{div}\vec F = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}x^3\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{9}y^3\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{16}z^3\right) = 3\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\right)$$

پس

$$\text{شار} = \iint_S(\vec F\cdot\vec n)\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\vec F\, dD = 3\iiint_D\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\right)dD$$

این انتگرال سه گانه در مختصات کروی تعمیم یافته حل می کنیم

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \boxed{\begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \\ c=4 \end{array}}$$

$$\Rightarrow dD = 2\times3\times4\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

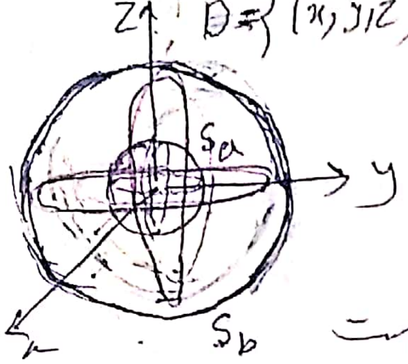
$$3\iiint_D\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\right)dD = 72\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^4\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = 72\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho^4\,d\rho$$

$$= 72\times2\pi\times2\times\frac{1}{5} = \frac{288}{5}\pi$$

با این تغییر متغیر بیضیوار به کره $\rho=1$ تبدیل می شود

مثال ۱۰: فرض کنید که $\vec{F} = \dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ و S مرز ناحیه D زیر باشد

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2 ,\ 0<a<b\}$$



شار میدان $\vec{F}$ گذرنده از سطح S را بیابید.

حل: S_a کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و S_b کره $x^2+y^2+z^2=b^2$ در نظر می‌گیریم. D درون کره S_b و بیرون کره S_a است.

مؤلفه‌های $\vec{F}$ درون D و روی دو سطح S_a و S_b بطور پیوسته مشتق‌پذیر است (توجه، مؤلفه‌های $\vec{F}$ در $(0,0,0)$ پیوسته نیست).

پس طبق قضیه واگرایی داریم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=3u^{-3}-3u^{-5}(x^2+y^2+z^2)=3u^{-3}-3u^{-3}=0\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F}=0$$

با فرض $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{u^3}\right)=u^{-3}-3x^2u^{-5}$ و $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{u^3}\right)=u^{-3}-3y^2u^{-5}$

و بطور مشابه $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{u^3}\right)=u^{-3}-3z^2u^{-5}$

$$\text{شار } \vec{F} = \iint_S(\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS=\underbrace{\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dD}_{D}=\iiint 0\,dD=0$$

از این مثال چند نتیجه مهم را بصورت زیر می‌گیریم. با فرض آنکه $F=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

نتیجه ۱: چون $\boxed{S=S_a\cup S_b}$ و $\boxed{\vec{n}_b=-\vec{n}_a}$

$$0=\iint_S(\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS=\iint_{S_b}(\vec{F}\cdot\vec{n}_b)\,dS_b+\iint_{S_a}(\vec{F}\cdot\vec{n}_a)\,dS_a\Rightarrow$$

$$\iint_{S_b}(\vec{F}\cdot\vec{n}_b)\,dS_b=-\iint_{S_a}(\vec{F}\cdot\vec{n}_a)\,dS_a=-(-4\pi)=4\pi$$ (راستای جهت $\vec{n}_a$ به سمت مبداء است)

نشان می‌دهیم که $\iint_{S_b}(\vec{F}\cdot\vec{n}_b)\,dS_b=4\pi$

حل:

$$S_b: x^2+y^2+z^2=b^2\Rightarrow \vec{n}_b=\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_b=\frac{1}{b}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{n}_b=\left(\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{b^3}\right)\cdot\left(\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{b}\right)=\frac{1}{b^2}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_b}(\vec{F}\cdot\vec{n}_b)\,dS_b=\frac{1}{b^2}\iint_{S_b}dS_b=\frac{1}{b^2}(\text{مساحت سطح } S_b)=\frac{1}{b^2}(4\pi b^2)=4\pi$$

$\boxed{\text{یعنی شار } \vec{F} \text{ گذرنده از سطح کره به شعاع کره بستگی ندارد.}}$

نتیجه ۲: برای محاسبه شار $\vec{F}$ روی سطح کره چون مؤلفه‌های F در مرکز $(0,0,0)$ ناپیوسته است نمی‌توان

از قضیه واگرایی (دیورژانس) استفاده کرد ولی می‌توان با کره‌ای به شعاع کوچک a به مبدأ مرکز، از درون کره با شعاع b خارج کرد و همانند مثال ۱۰، شار $\vec F$ را حساب کرد و طبق نتیجه ۱ مقدار شار $\vec F$ گذرنده از سطح کره را برابر با 4π حساب کرد

نتیجه ۳: چون شار $\vec F$ گذرنده از سطح کره به شعاع کره بستگی نداشت بنابراین می‌توان بجای سطح کره با شعاع a یک رویه بسته دلخواه مانند γ قرار داد که آن شامل نقطه ناپیوستگی (۰،۰،۰) باشد. در این صورت طبق قضیه واگرایی

با فرض $S = \gamma \cup S_a$ داریم

$$0 = \iint_S (\vec F\cdot\vec n)\, dS = \iint_\gamma (\vec F\cdot \vec n_\gamma)\, dS_\gamma + \iint_{S_a} (\vec F\cdot\vec n_a)\, dS_a$$

$$\Rightarrow \iint_\gamma (\vec F\cdot\vec n_\gamma)\, dS_\gamma = -\iint_{S_a}(\vec F\cdot\vec n_a)\, dS_a = -(-4\pi) = 4\pi$$

زیرا جهت $\vec n_\gamma$ و $\vec n_a$ مخالف هم است.

سؤال ۱: اگر سطح S باز باشد می‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد؟

جواب: به صورت مستقیم خیر. ولی می‌توان سطح S را با یک صفحه بست. اگر این صفحه S_1 در نظر بگیریم در این صورت $S_2 = S\cup S_1$ یک سطح بسته است و اگر میدان برداری $\vec F$ روی S_2 و درونش بطور پیوسته مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\iint_{S_2} (\vec F\cdot\vec n_2)\, dS_2 = \iint_{S_1}(\vec F\cdot\vec n_1)\, dS_1 + \iint_S (\vec F\cdot\vec n)\, dS = \iiint_D div\vec F\, dD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_S(\vec F\cdot\vec n)\, dS = \iiint_D div \vec F\, dD - \iint_{S_1}(\vec F\cdot \vec n_1)\, dS_1$$

مثال ۱۱: در مثال ۳ که $\vec F = xy^2\vec i - yz\vec j + x^2z^2\vec k$ اگر وجه $z=0$ از مکعب واقع در یک هشتم اول را برداریم برای محاسبه شار $\vec F$ گذرنده از پنج وجه مکعب می‌توان وجه $z=0$ را به عنوان سطح S_1 اضافه می‌کنیم (طبق سؤال ۱) $S_2 = S\cup S_1$

$$\iint_S (\vec F\cdot\vec n)\, dS = \iiint_D div\vec F\, dD - \iint_{S_1}(\vec F\cdot\vec n_1)\, dS_1 = \frac16 - \iint_{S_1}(\vec F\cdot\vec n_1)\, dS_1 = \frac16 - 0 = \frac16$$

$$\vec n_1 = -\vec k \Rightarrow \vec F\cdot\vec n_1 = -x^2z^2 \xrightarrow{z=0} 0$$

سؤال ۲: در قضیه استوکس: اگر S یک ناحیه بسته باشد آنگاه $\oint_C \vec F\cdot d\vec R = ?$

حل: اگر میدان برداری $\vec F$ در شرایط قضیه دیورژانس صدق کند در این صورت چون $div(curl\vec F) = 0$

زیرا $div(curl \vec F) = \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec F) = 0$ (در دترمینان دو سطر مثل هم است)

بنابراین

$$\oint_C \vec F\cdot d\vec R \overset{\text{قضیه استوکس}}{=} \iint_S (curl\vec F\cdot\vec n)\, dS \overset{\text{قضیه دیورژانس}}{=} \iiint_D div(curl\vec F)\, dD = 0$$

پس $\oint \vec F\cdot d\vec R = 0$

تمرین های صفحه ۴۱۱ و ۴۱۲ ، شماره های ۷ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۳ حل شود

تمرین های صفحه ۴۱۹ و ۴۲۰ ، شماره های ۵ و ۱۰ و ۱۳ و ۹ حل شود.