حل

حل برخی از سؤالات (تمرین های) فصل مجموعه ها (۱۶ تمرین)

۱- تمرین ۱۱ صفحه ۱۴) یک مجموعهٔ n عضوی داده شده است. ثابت کنید که این مجموعه $C(n,r)$ زیرمجموعه r عضوی دارد.

اثبات: با استقرای ریاضی روی n ثابت می کنیم.

شروع استقرای ریاضی: $n=1$ چون $r=0,1$ ؛ $r\neq 0, r\neq 1$ ، $C(1,r)=0$ پس تعداد زیرمجموعه یک عضوی و صفر عضوی یک مجموعه یک عضوی برابر با یک است یعنی $C(1,1)=1$ و $C(1,0)=1$ چون اگر $n=1$ آنگاه $r=1$ و $r=0$ پس شروع استقرای ریاضی درست است.

$$A=\{a\} \Rightarrow P(A)=\{\varnothing, \{a\}\}$$

فرض استقرای ریاضی: $n=k$ فرض کنید که تعداد زیرمجموعه های r عضوی از مجموعه k عضوی $C(k,r)$ باشد.

حکم استقرای ریاضی: $n=k+1$ نشان می دهیم که تعداد زیرمجموعه های r عضوی از مجموعه $(k+1)$ عضوی برابر $C(k+1,r)$ است. فرض کنید که

$$A=\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}=B\cup\{a_{k+1}\}$$

$$B=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

زیرمجموعه های r عضوی از مجموعه A، از زیرمجموعه های r عضوی مجموعه B و زیرمجموعه های $(r-1)$ عضوی از B که a_{k+1} به آن افزوده ایم تشکیل شده است بنابراین چون

$$C(k+1,r)=C(k,r)+C(k,r-1)$$

پس تعداد زیرمجموعه های r عضوی از مجموعه $k+1$ عضوی دقیقاً $C(k+1,r)$ است.

پس طبق اصل استقرای ریاضی تعداد زیرمجموعه های r عضوی از مجموعه n عضوی دقیقاً $C(n,r)$ است.

۲- تمرین ۲ صفحه ۳۴. هر یک از مجموعه های زیر را با استفاده از نماد مجموعه ساز (نماد ریاضی) بنویسید.

$$A=\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}=\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}$$ مجموعه مربعات اعداد طبیعی

$$B=\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}=\{2n \mid n\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{N}_e$$ مجموعه اعداد طبیعی زوج

$$C=\{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \dots\}=\{\tfrac{n-1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}=\{\tfrac{n}{n+1} \mid n\in I\}$$

I مجموعه اعداد حسابی است

$$D=\{2, 9, 28, 65, \dots\}=\{n^3+1 \mid n\in\mathbb{N}\}$$

$$E=\{a, e, i, o, u\}=\{\theta \mid \theta \text{ حرف صدادار انگلیسی است}\}$$

۳- تمرین ۴ صفحه ۴۳: هر یک از مجموعه های زیر را با نماد مجموعه ساز (نماد ریاضی) نشان دهید.

$$A=\{1,2,3\}=\{x\in\mathbb{R} \mid (x^2-5x+6)(x-1)=0\}=\{x\in\mathbb{N} \mid x\leq 3\}$$

$$B=\{-1, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, 0\}=\{-\tfrac{x}{3} \mid x\in I, x\leq 3\}=\{-\tfrac{x}{3} \mid x=0,1,2,3\}$$

$$C=\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}=\{2k-1 \mid k\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N}_o$$ مجموعه اعداد طبیعی فرد

$$D=\{1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-2x-2=0\}$$

۵- تمرین ۱ صفحه ۴۶: ثابت کنید که $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$ حل: فرض کنید که $A\subseteq B$ نشان می‌دهیم که $A\cup B=B$

① طبق تعریف اجتماع بدیهی است که $B\subseteq A\cup B$ ② برای اثبات $A\cup B\subseteq B$ از عضوگیری استفاده می‌کنیم

$$x\in A\cup B \Rightarrow x\in A \vee x\in B \xrightarrow{A\subseteq B} x\in B\vee x\in B \Rightarrow x\in B$$

پس $A\cup B\subseteq B$ پس ① و ② نتیجه می‌دهد $A\cup B=B$

برعکس اگر $A\cup B=B$، بدیهی است که $A\subseteq A\cup B=B$

۶- تمرین ۲ صفحه ۴۶: ثابت کنید که $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A$.

حل: فرض کنیم که $A\cap B=A$ بدیهی است که $A=A\cap B\subseteq B$

برعکس فرض کنید که $A\subseteq B$ نشان می‌دهیم که $A\cap B=A$ ① بدیهی است $A\cap B\subseteq A$ طبق تعریف اشتراک است.

② برای اثبات $A\subseteq A\cap B$ از عضوگیری استفاده می‌کنیم

$$\forall x\in A \xrightarrow{A\subseteq B} x\in B \Rightarrow x\in A, x\in B \Rightarrow x\in A\cap B$$

(یعنی $A\subseteq A\cap B$)

پس $A=A\cap B$

۷- تمرین ۶ صفحه ۴۷: ثابت کنید که الف) از $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ نتیجه می‌شود $A\cup B\subseteq C$.

ب) از $A\subseteq B$ و $A\subseteq C$ نتیجه می‌شود $A\subseteq(B\cap C)$.

حل الف) $x\in A\cup B \Rightarrow x\in A\vee x\in B \xrightarrow[B\subseteq C]{A\subseteq C} x\in C\vee x\in C\Rightarrow x\in C$

پس $A\cup B\subseteq C$.

اثبات ب) $\forall x\in A \xrightarrow[A\subseteq C]{A\subseteq B} x\in B\wedge x\in C \Rightarrow x\in(B\cap C)$

پس $A\subseteq(B\cap C)$

۸- تمرین ۲ صفحه ۴۷: ثابت کنید که الف) اگر برای $i=1,2,\dots,n$، $A_i\subseteq B$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{n} A_i\subseteq B$

ب) اگر برای $i=1,2,\dots,n$، $A\subseteq B_i$ آنگاه $A\subseteq\bigcap_{i=1}^{n} B_i$

اثبات الف) به کمک استقرای ریاضی روی n.

شروع استقرای ریاضی $n=2$ چون $A_1\subseteq B$ و $A_2\subseteq B$ طبق تمرین ۶ (تمرین قبل) $A_1\cup A_2\subseteq B$

یعنی شروع استقرای ریاضی درست است.

فرض استقرای ریاضی: فرض کنیم که برای $i\le k$ اگر $A_i\subseteq B$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{k} A_i\subseteq B$.

حکم استقرای ریاضی: $i\le k+1$ نشان می‌دهیم که اگر $A_i\subseteq B$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\subseteq B$.

طبق فرض استقرای ریاضی $\bigcup_{i=1}^{k} A_i\subseteq B$ و طبق فرض $A_{k+1}\subseteq B$ پس طبق شروع استقرای ریاضی داریم

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i=\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\cup A_{k+1}\subseteq B.$$

اثبات ب) با روش استقرای ریاضی روی n صفحه بعد

شروع استقرای ریاضی $n=2$ فرض کنید که $A\subseteq B_1$ و $A\subseteq B_2$ طبق تمرین ۶ قسمت (ب) داریم $A\subseteq B_1\cap B_2$

فرض استقرای ریاضی: فرض کنید که $1\le i\le k$ اگر $A\subseteq B_i$ آنگاه $A\subseteq \bigcap_{i=1}^{k} B_i$

حکم استقرای ریاضی $n=k+1$ نشان میدهیم که اگر $1\le i\le k+1$ و $A\subseteq B_i$ آنگاه $A\subseteq \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i$

طبق فرض استقرا داریم $A\subseteq \bigcap_{i=1}^{k} B_i$ و طبق فرض داریم $A\subseteq B_{k+1}$ حال طبق شروع استقرای ریاضی داریم

$A\subseteq \bigcap_{i=1}^{k} B_i \cap B_{k+1} = \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i$ پس طبق اصل استقرای ریاضی برای هر $n\le i$ داریم $A\subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B_i$

۹- تمرین ۹ صفحه ۵۰: فرض کنید که A و B دو مجموعه باشند ثابت کنید که $A-B=A-(A\cap B)$

اثبات:
$A-(A\cap B)\overset{\text{تعریف}}{=}A\cap(A\cap B)'\overset{\text{دمورگان}}{=}A\cap(A'\cup B')\underset{\text{پذیری}}{\overset{\text{توزیع}}{=}}(A\cap A')\cup(A\cap B')$

$=\underset{\text{مجموعه تهی}}{\varnothing}\cup(A\cap B')=A\cap B'\overset{\text{تعریف}}{=}A-B$

۱۰- ثابت کنید که برای هر دو مجموعه A و B: $A'-B'=B-A$ (تمرین ۵ صفحه ۵۰)

اثبات:
$A'-B'\overset{\text{تعریف}}{=}A'\cap(B')'=A'\cap B\overset{\text{جابجایی}}{=}B\cap A'=B-A$

۱۱- تمرین ۱۱ صفحه ۵۰: فرض کنید که A و B دو مجموعه هستند الف) ثابت کنید A و $B-A$ دو مجموعه مجزا هستند.

ب) ثابت کنید که $A\cup B=A\cup(B-A)$ [در فصل مجموعه شناسی و شمارا از این مطلب کمک بگیریم (مجزا کردن دو مجموعه)]

اثبات الف) نشان میدهیم که $A\cap(B-A)=\varnothing$:

$A\cap(B-A)\overset{\text{تعریف}}{=}A\cap(B\cap A')\underset{\text{و جابجایی}}{\overset{\text{شرکت پذیری}}{=}}(A\cap A')\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$

اثبات ب)

$A\cup(B-A)\underset{\text{تعریف}}{=}A\cup(B\cap A')\underset{\text{توزیع پذیری}}{=}(A\cup B)\cap(A\cup A')=(A\cup B)\cap U=A\cup B$

۱۲- تمرین ۱۴ صفحه ۵۱) اگر A و B و C سه مجموعه باشند ثابت کنید که $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

اثبات:
$(A-C)-(B-C)\overset{\text{تعریف}}{=}(A\cap C')\overset{\text{تعریف}}{-}(B\cap C')\overset{\text{تعریف}}{=}(A\cap C')\cap(B\cap C')'\underset{\text{دمورگان}}{=}(A\cap C')\cap(B'\cup C)$

$\underset{\text{پذیری}}{\overset{\text{توزیع}}{=}}(A\cap C'\cap B')\cup(A\cap \underbrace{C'\cap C}_{\varnothing})=(A\cap C'\cap B')\cup\varnothing\underset{\text{شرکت پذیری}}{=}(A\cap B')\cap C'=(A-B)-C$

۱۳- تمرین ۱۵ صفحه ۵۱) اگر A و B و C سه مجموعه باشند ثابت کنید که $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

اثبات:
$(A-B)-C\overset{\text{تعریف}}{=}(A-B)\cap C'\overset{\text{تعریف}}{=}(A\cap B')\cap C'\underset{\text{جابجایی}}{\overset{\text{شرکت پذیری}}{=}}A\cap(B'\cap C')\overset{\text{دمورگان}}{=}A\cap(B\cup C)'$

$\underset{\text{تعریف}}{=}A-(B\cup C)$

۱۴- تمرین ۲۱ صفحه ۱۵ فرض کنید که A و B دو مجموعه باشند. ثابت کنید که

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

اثبات.

$$(A\cup B)-(A\cap B) \overset{\text{تعریف}}{=} (A\cup B)\cap(A\cap B)' \overset{\text{دمورگان}}{=} (A\cup B)\cap(A'\cup B') \overset{\text{توزیع پذیری}}{=}$$

$$[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B'] \overset{\text{جابجایی}}{=} [A'\cap(A\cup B)]\cup[B'\cap(A\cup B)] \overset{\text{توزیع پذیری}}{=}$$

$$[(\underbrace{A'\cap A}_{\phi})\cup(A'\cap B)]\cup[(B'\cap A)\cup(\underbrace{B'\cap B}_{\phi})] = [\phi\cup(A'\cap B)]\cup[(B'\cap A)\cup\phi] =$$

$$\overset{\text{جابجایی}}{=}[(B\cap A')\cup(A\cap B')] \overset{\text{تعریف}}{=} (B-A)\cup(A-B) \overset{\text{جابجایی}}{=} (A-B)\cup(B-A)$$

۱۵- تمرین ۲۲ صفحه ۱۵: فرض کنید که X مجموعه توانی یک مجموعه مفروض و ناتهی U باشد. در X عمل دوتایی ⊕ که تفاضل متقارن نامیده می‌شود چنین تعریف می‌شود

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A) \qquad A,B\in X$$

ثابت کنید که برای A و B و C در X

الف) $A\oplus B\in X$. اثبات: چون X مجموعه توانی مجموعه U است پس چون $A-B\subseteq A\in X$ و $(B-A)\subseteq B\in X$ و چون اجتماع دو عضو از X در X قرار دارد پس $A\oplus B=[(A-B)\cup(B-A)]\in X$

ب) $A\oplus B=B\oplus A$ خاصیت جابجایی زیرا

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(B-A)\cup(A-B)=B\oplus A$$

ج) خاصیت شرکت پذیری به دلیل طولانی بودن اثبات از آن می‌گذریم

$$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$$

د) $A\oplus\phi=A$، ϕ را عضو خنثی تحت عمل ⊕ در X می‌نامیم.

$$A\oplus\phi=(A-\phi)\cup(\phi-A)=A\cup\phi=A$$

هـ) $A\oplus A=\phi$ A را قرینه (عضو متقابل) A در X تحت عمل ⊕ می‌نامیم.

$$A\oplus A=(A-A)\cup(A-A)=\phi\cup\phi=\phi$$

۱۶- با فرض مسئله ۲۲ (تمرین ۲۲ صفحه ۱۵) ثابت کنید.

الف) $A\oplus A'=U$ حل: $A\oplus A'=(A-A')\cup(A'-A)=[A\cap(A')']\cup[A'\cap A']=$

$$=(A\cap A)\cup(A'\cap A')=A\cup A'=U$$

ب) $A\oplus C=A \Longleftrightarrow C=\phi$

حل: طبق تمرین قبل قسمت د) داریم که اگر $C=\phi$ آنگاه $A\oplus\phi=A$.

برعکس: اگر $A\oplus C=A$ نشان می‌دهیم که $C=\phi$.

$$A=A\oplus C=(A-C)\cup(C-A)=$$

$$\overset{\text{طبق تمرین ۲۱}}{=}(A\cup C)-(A\cap C)\Longrightarrow C=\phi$$

اگر $C\neq\phi$ آنگاه $A\oplus C\neq A$.