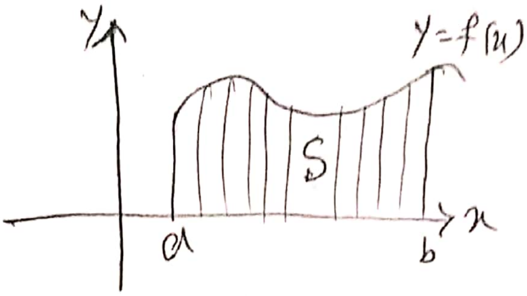
انتگرال فصل ۵ کتاب استوارت

انتگرال براساس مفهوم مساحت:

مسئله یافتن مساحت: فرض کنید که S یک ناحیه در صفحه باشد که زیر منحنی $y=f(x)$ و بین خطوط $x=a$ و $x=b$ و محور xها قرار دارد (شکل زیر)

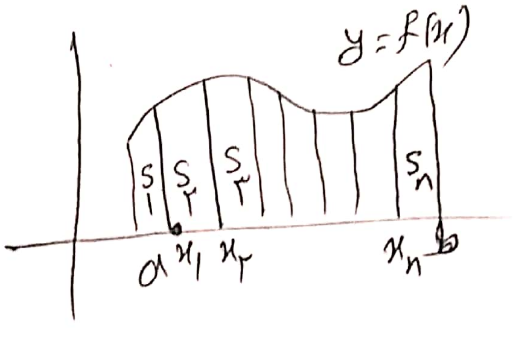


می‌خواهیم مساحت ناحیه S را بدست آوریم:

اگر بتوانیم S را به ناحیه‌های شناخته شده مثلاً مستطیل مربع و مثلث قائم الزاویه و ... که مساحت آن دارای فرمول خاصی هستند تقسیم کنیم به راحتی می‌توان مساحت ناحیه S را بدست آوریم. ولی شکل بالا طوری است که نمی‌توان آن را به چند شکل خاص تقسیم کرد. اما به صورت زیر می‌توان مساحت S را تقریباً به دست آورد و از روی آن راهی را معرفی می‌کنیم که مساحت S بطور دقیق پیدا می‌شود (یا محاسبه می‌گردد).

ناحیه S را با رسم خطوطی موازی با محور y به چندین مستطیل تقسیم می‌کنیم

اگر محل برخورد این خطوط با محور xها را به ترتیب x_1 و x_2 و ... و x_n بنامیم (شکل زیر)

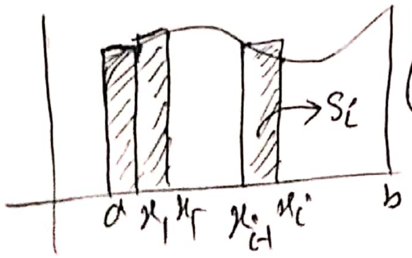


در این صورت

مجموع مساحت های S_1 ، S_n = مساحت S

حال مساحت S_1 ، S_n را با مساحت مستطیل های زیر تقریب می‌زنیم:

فرض کنید که عرض مستطیل i برابر با $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ و طول مستطیل i را $f(x_i)$ در نظر می‌گیریم شکل زیر:



در این صورت $\boxed{\text{مساحت ناحیه } S_i \cong \text{مساحت مستطیل شماره i ام}}$

بنابراین اگر S_{A_i} = مساحت مستطیل شماره i ام باشد آنگاه

$$\text{مساحت } S \cong S_{A_1} + S_{A_2} + \cdots + S_{A_n} = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n$$

یعنی

$$\boxed{\text{مساحت } S \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i}$$

Scanned by CamScanner

هرچه تعداد مستطیل‌ها بیشتر باشد مساحت ناحیه S دقیق‌تر بدست می‌آید.

با کمک حدگیری

$$S_{\text{مساحت}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

به شرطی که حد بالا موجود (عدد) باشد.

حال راه حل بالا را به صورت زیر بازسازی می‌کنیم:

بازه بسته $I=[a,b]$ را به زیر بازه‌های $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ تقسیم می‌کنیم (در واقع زیربازه‌های $[a,x_1]$ و $[x_1,x_2]$ و ... و $[x_{i-1},x_i]$ و ... و $[x_{n-1},b]$ یک افراز از بازه $I=[a,b]$ در نظر می‌گیریم)

فرض کنید که تابع $f(x)$ روی بازه بسته I تعریف شده باشد برای هر $i=1,2,\dots,n$ عددی دلخواه مانند c_i در بازه $[x_{i-1},x_i]$ انتخاب می‌کنیم (c_i می‌تواند ابتدای زیربازه یا انتهای زیربازه یا وسط زیربازه باشد)

در این صورت: مساحت مستطیل شماره iام $= f(c_i)\cdot\Delta x_i$

حال اگر فاصله همه زیربازه‌ها را یکسان و برابر با $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ در نظر بگیریم (یعنی برای هر i $\Delta x_i=\Delta x=\frac{b-a}{n}$) و c_iها هم مثلاً ابتدای زیربازه‌ها در نظر بگیریم آنگاه خواهیم داشت

$$a=x_0=c_1$$

$$c_2=x_1=a+\Delta x=a+\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

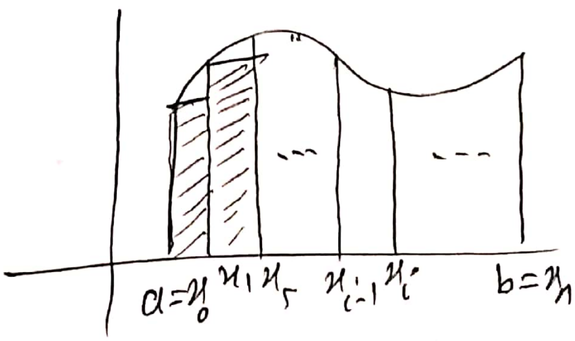
$$c_3=x_2=a+2\left(\frac{b-a}{n}\right)=a+2\Delta x$$

$$c_4=x_3=a+3\left(\frac{b-a}{n}\right)=a+3\Delta x$$

$$\vdots$$

$$c_i=x_{i-1}=a+i\Delta x=a+\left(\frac{b-a}{n}\right)(i-1)$$

$$\vdots$$



$$S_{\text{مساحت}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i=\lim_{n\to+\infty}\sum f\left(a+(i-1)\frac{b-a}{n}\right)\Delta x$$

ادامه در صفحه بعد

Scanned by CamScanner

$$S_{\text{مساحت}} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+\left(\frac{b-a}{n}\right)(i-1)\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\boxed{S_{\text{مساحت}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+\left(\frac{b-a}{n}\right)(i-1)\right) \quad (1)}$$

به شرطی که حد بالا موجود باشد

توجه: می توان c_i ها را نقطه انتهای زیر بازه ها در نظر گرفت، در این صورت

$$a = x_0 \ , \ x_1 = c_1 = a + \Delta x = a + 1\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$c_2 = x_2 = a + 2\Delta x = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right) \ , \ c_3 = x_3 = a + 3\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$S_{\text{مساحت}} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+\left(\frac{b-a}{n}\right)i\right) \frac{b-a}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+\left(\frac{b-a}{n}\right)i\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{\text{مساحت}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+\left(\frac{b-a}{n}\right)i\right) \quad (2)}$$

فرمول (1) و (2) برای مساحت در صورت وجود حدها هم برابر است

نتیجه: اگر تابع $f(x)$ روی بازه بسته $I = [a,b]$ پیوسته باشد آنگاه هر دو حد (1) و (2) وجود دارد و می توان مساحت S را یافت. برای محاسبه مساحت S فرمول های زیر که قابل اثبات هستند لازم و ضروری می باشند:

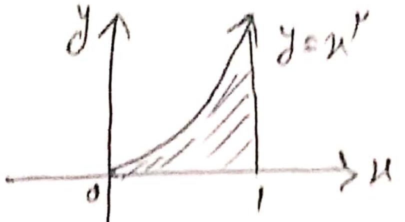
(1) $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Scanned by CamScanner

مثال ۱: مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y=x^2$ و خطوط $x=1$ و $x=0$ و محور xها را بیابید



حل: $\boxed{f(x)=x^2}$ $\quad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

$c_i = a + (\frac{b-a}{n})i = 0 + (\frac{1}{n})i$ و $f(c_i) = (\frac{i}{n})^2$

$$S_{\text{مساحت}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum f\left(a+\left(\frac{b-a}{n}\right)i\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} (i)^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$ واحد مربع

طبق فرمول شماره (۲) نماد $\sum$

مثال ۲ (تمرین ۲۰ صفحه ۳۷۵ کتاب) ناحیه‌ای را مشخص کنید که مساحتش با حد داده شده زیر برابر باشد

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5+\frac{2i}{n}\right)^{10}$$

حل:

$$\begin{cases} \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \\ c_i = a + \left(\frac{b-a}{n}\right)i = 5 + \frac{2i}{n} \end{cases} \Longrightarrow a=5,\ b=7 \quad f(x) = x^{10}$$

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5+\frac{2i}{n}\right)^{10} = S$$ مساحت

S ناحیه محصور بین منحنی $y=x^{10}$ و خطوط $x=5$ و $x=7$ و محور xها است

توجه: محاسبه حد مجموع خیلی آسان نیست ولی با کمک انتگرال معین که در بخش بعد تعریف می‌کنیم، محاسبه حد مجموع با آسانی صورت می‌گیرد

Scanned by CamScanner

انتگرال معین

تعریف: فرض کنید که $f(x)$ یک تابع باشد که روی بازه بسته $[a,b]$ تعریف شده است. بازه بسته $I=[a,b]$ را با n زیر بازه با عرض یکسان $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ تقسیم می کنیم یعنی

$$x_0 = a \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_i \le \cdots \le x_n = b$$

انتگرال معین تابع $f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ عبارت است از $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ و با علامت $\int_a^b f(x)\,dx$ نمایش می دهیم به شرطی که حد بالا موجود باشد. و در آن c_i یک مقدار دلخواه در زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ است.

بنابراین

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \qquad \boxed{\Delta x = \frac{b-a}{n}}$$

اگر حد بالا موجود باشد می گوئیم تابع $f(x)$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر است.

قضیه: اگر تابع $f(x)$ روی بازه بسته $I=[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f روی $[a,b]$ انتگرال پذیر است یعنی انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ وجود دارد.

قضیه: اگر تابع $f(x)$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ که در آن $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و $c_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$.

نتیجه: اگر $y=f(x)$ یک تابع مثبت باشد که روی بازه $I=[a,b]$ پیوسته است در این صورت مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y=f(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ و محور xها برابر است با $\int_a^b f(x)\,dx$

توجه: یکی از روشهای حل انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ از طریق حد مجموع است که روشی طولانی همراه با محاسبه زیاد است.

مثال ۱: انتگرال معین $\int_0^3 (x^3-6x)\,dx$ را از طریق حد مجموع بدست آورید.

Scanned by CamScanner

حل، فرض کنیم که $\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$ و $c_i = \frac{3i}{n}$ در این صورت

$$\int_0^3 (x^3-6x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{27i^3}{n^3} - \frac{18}{n}i\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \lim_{n\to+\infty}\frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to+\infty}\frac{81}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \lim_{n\to+\infty}\frac{54}{n}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = \frac{-27}{4}$$

خواص انتگرال معین:

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ 2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ 4) $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

5) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

6) $f(x)\geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ $\forall x\in[a,b]$

7) $f(x)\geq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

$\forall x\in[a,b]$

8) اگر برای $a\leq x\leq b$ داشته باشیم $m\leq f(x)\leq M$ آنگاه

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Scanned by CamScanner

قضیه اساسی حساب و انتگرال معین (مشتق گیری از انتگرال) اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه تابع $g(x)$ با ضابطه $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ $(a\le x\le b)$ تعریف می‌شود روی $[a,b]$ پیوسته است و روی (a,b) مشتق‌پذیر است و

$$g'(x)=f(x)$$

به عبارت دیگر

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

نتیجه:

$$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)\,dt=-f(x)$$

قضیه: اگر u و v دو تابع مشتق‌پذیر از x باشند آنگاه

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt=u'(x)\,f(u(x))-v'(x)\,f(v(x))$$

مثال ۲: مشتق انتگرال های زیر را بیابید

الف) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^4}\sec t\,dt=4x^3\sec x^4$

ب) $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt=2x\sqrt{1+x^4}-\sqrt{1+x^2}$

ج) $\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{\sqrt{x}}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\right)-3x^2\left(\frac{1}{1+x^6}\right)$

د) $\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{3}\sqrt{1-t^2}\,dt=-(-\sin x)\sqrt{1-\cos^2 x}=\sin x\,|\sin x|$

Scanned by CamScanner

تعریف: تابع $F(x)$ روی بازه I را پادمشتق (یا تابع اولیه) $f(x)$ نامیم هرگاه

$$F'(x) = f(x)$$

مثال ۳: در قضیه مشتق گیری از انتگرال تابع $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ یک تابع اولیه $f(x)$ است زیرا

$$g'(x) = f(x)$$

مثال ۴: تابع $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ یک تابع اولیه برای $f(x) = x^2$ است زیرا $F'(x) = x^2 = f(x)$

مثال ۵: تابع $F(x) = \sin x$ یک تابع اولیه برای $f(x) = \cos x$ است زیرا

$$(\sin x)' = \cos x$$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال: اگر تابع $f(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

که در آن $F(x)$ پادمشتق $f(x)$ است یعنی $F'(x) = f(x)$

توجه: تساوی موجود در قضیه بالا را اغلب به صورت زیر می نویسیم

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال روشی مناسب و ساده برای حل انتگرال معین مخصوص یافتن مساحت ناحیه است. کافی است که پادمشتق تابع $f(x)$ را داشته باشیم. در بخش بعد یافتن پادمشتق یا عکس عمل مشتق گیری (یا عکس عمل دیفرانسیل گیری) را انتگرال نامعین می نامیم و به کمک انتگرال نامعین محاسبه انتگرال معین خیلی ساده تر می شود.

مثال ۶: طبق مثال ۴ چون $F(x)=\frac{x^3}{3}$ یک تابع اولیه $f(x)=x^2$ است پس حل مثال ۱ صفحه ۴ جزوه یعنی مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y=x^2$ و خطوط $x=1$ و $x=0$ و $y=0$ به صورت زیر قابل محاسبه است

مساحت ناحیه $=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{0}{3}=\frac{1}{3}$ واحد مربع

و چون جواب تمرین ۲۰ صفحه ۲۴۷ کتاب (مثال ۲ بخش قبل صفحه ۴ جزوه) به صورت زیر است

مساحت ناحیه S $=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(5+\frac{2i}{n}\right)^{10}=\int_5^7 x^{10}\,dx=\left[\frac{x^{11}}{11}\right]_5^7=\frac{1}{11}\left[7^{11}-5^{11}\right]$

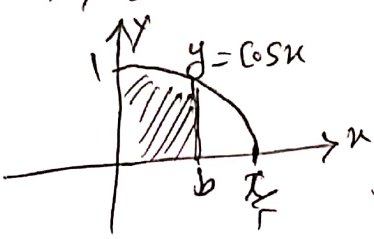
زیرا $F(x)=\frac{x^{11}}{11}$ یک تابع اولیه برای $f(x)=x^{10}$ است

مثال ۷: چون $F(x)=\frac{x^4}{4}$ یک بار مشتق $f(x)=x^3$ است پس

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{1}=\frac{1}{4}\left[1^4-(-2)^4\right]=-\frac{15}{4}$$

مثال ۸: مساحت زیر منحنی $y=\cos x$ از $x=0$ تا $x=b$ که $0<b<\frac{\pi}{2}$ است را پیدا کنید.

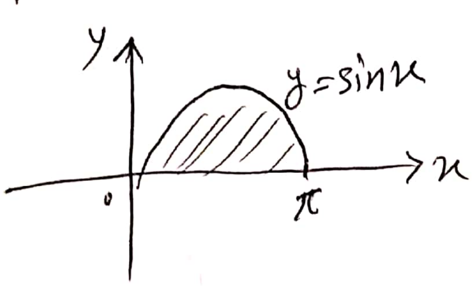
حل:



مساحت $=\int_0^b \cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^b=\sin b-\sin 0=\sin b$

زیرا $F(x)=\sin x$ یک تابع اولیه برای $f(x)=\cos x$ است

مثال ۹: مساحت زیر منحنی $y=\sin x$ از $x=0$ تا $x=\pi$ و محور xها را پیدا کنید.



مساحت $=\int_0^\pi \sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^\pi=$

$=-\left[\cos\pi-\cos 0\right]=-\left[-1-1\right]=2$

زیرا $F(x)=-\sin x$ یک تابع اولیه برای $f(x)=\cos x$ است.

Scanned by CamScanner

انتگرال نامعین و قضیه تغییر کل

در این بخش انتگرال نامعین را معرفی می‌کنیم و سپس با کمک آن با محاسبه حد مجموع می‌پردازیم
در فصل کل به انتگرال نامعین و روشهای انتگرال گیری می‌پردازیم.

تعریف: از نماد گذاری $\int f(x)\,dx$ برای پاد مشتق از f استفاده می‌کنیم و آن را انتگرال نامعین می‌نامیم یا به عبارت دیگر

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{آنگاه:} \quad F'(x) = f(x) \quad \text{اگر}$$

توجه: اگر تابع $F(x)$ یک پاد مشتق (تابع اولیه) $f(x)$ باشد آنگاه $F(x)+C$ نیز برای هر عدد دلخواه حقیقی C یک پاد مشتق (تابع اولیه) $f(x)$ است پس

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad : \quad (F(x)+C)' = f(x)$$

قضیه تغییر کل: انتگرال آهنگ تغییر، تغییر کل است

$$\boxed{\int_a^b F'(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

برای راحتی چند انتگرال نامعین را در جدول زیر می‌آوریم.

۱) $\int k\,dx = kx + C$

۲) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

۳) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

۴) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

۵) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

۶) $\int \csc^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

۷) $\int \sec x \tan x\,dx = \tan x + C$

۸) $\int \csc x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

۹) $\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

۱۰) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Scanned by CamScanner

مثال: انتگرال های زیر را حساب کنید

۱) $\int \frac{dx}{x^2}$ ۲) $\int (10x^2 - 2\sec^2 x)\,dx$ ۳) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ ۴) $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$

۵) $\int_1^9 \frac{2x^2 + x^2\sqrt{x} - 1}{x^2}\,dx$ ۶) $\int_0^{12} (x - 12\sin x)\,dx$

حل:

۱) $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -x^{-1} + C = \frac{-1}{x} + C$

۲) $\int (10x^2 - 2\sec^2 x)\,dx = 10\int x^2 dx - 2\int \sec^2 x\,dx = 10\left(\frac{x^3}{3}\right) - 2\tan x + C$

۳) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin x}\right)\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \csc x \,\mathrm{cotg}\, x\,dx = -\csc x + C$

۴) $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{6x^2}{2}\right]_0^3 = \left(\frac{3^4}{4} - 27\right) - 0 = \frac{81}{4} - 27$

۵) $\int_1^9 \frac{2x^2 + x^2\sqrt{x} - 1}{x^2}\,dx = \int_1^9 \left(2 + \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = 2\int_1^9 dx + \int_1^9 x^{\frac{1}{2}}dx + \left[\frac{1}{x}\right]_1^9 =$

$= \left[2x + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{x}\right]_1^9 = \left[18 + 18 + \frac{1}{9}\right] - \left[2 + \frac{2}{3} + 1\right] = \frac{292}{9}$

۶) $\int_0^{12} (x - 12\sin x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 12\cos x\right]_0^{12} = \left[\frac{1}{2}(12)^2 + 12\cos 12\right] - \left[12\cos 0\right]$

$= 60 + 12\cos 12$

تمرین: انتگرال های زیر را حل کنید.

۱) $\int \left(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\right)dx$ ۲) $\int \tan^2 x\,dx$ ۳) $\int \mathrm{cotg}^2 x\,dx$

۴) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,dx$ ۵) $\int (1 - x^2)^2\,dx$ ۶) $\int (x^4 - 1)(x^4 + 1)\,dx$

۷) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ ۸) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ ۹) $\int_1^{64} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

۱۰) $\int_{-2}^{-1} \left(4y^3 + \frac{2}{y^3}\right)dy$ ۱۱) $\int_0^4 \sqrt{2t}\,dt$ ۱۲) $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[5]{x^3}\right)dx$

Scanned by CamScanner

محاسبه حد مجموع

یکی از کاربردهای انتگرال محاسبه برخی از حد مجموع می باشد دیدیم که اگر $f(x)$ روی بازه بسته $I=[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)$$

در این بخش حد مجموع هایی که به انتگرال معین تبدیل می‌شوند حل می‌کنیم. در حدهای زیر کافی است که مقدار a و b و ضابطه تابع $f(x)$ را بدست آوریم سپس انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ را حل کنیم.

مثال ۱:

$$\lim_{n\to+\infty} 8\left[\frac{1}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\dots+\frac{n^2}{n^3}\right] = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2$$

$$= \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\begin{cases}\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \\ c_i = 0+\frac{2}{n}i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2\end{cases} \qquad f(x)=x^2$$

* در این مثال می‌توان از عدد 8 فاکتور گرفت و $I=[0,1]$ انتخاب کرد و $\Delta x=\frac{1}{n}$ پس

$$\lim_{n\to+\infty} 8\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3} = 8\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = 8\int_0^1 x^2\,dx = \frac{8}{3}$$

مثال ۲:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

$$= \int_1^2 \frac{dx}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_1^2 = \ln 2$$

روش اول: $f(x)=\frac{1}{x}$ و $\begin{cases}\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n} \\ c_i=1+\frac{i}{n}\end{cases}$ پس $\begin{matrix} b=2 \\ a=1\end{matrix}$

روش دوم: $f(x)=\frac{1}{1+x}$ ، $\Delta x=\frac{1}{n}$ و $c_i=\frac{i}{n}$ پس

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})} = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \Big[\ln|1+x|\Big]_0^1 = \ln 2$$

توجه: در مبحث تابع لگاریتم طبیعی می‌خوانیم که $\boxed{\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c}$

Scanned by CamScanner

مثال ۳

$$\lim_{n\to+\infty} 8\left[\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}\right]=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{8\sqrt{i}}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{4i}{n}}=$$

$$=\int_0^4\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{16}{3}$$

روش اول

$$\begin{cases}\frac{b-a}{n}=\frac{4}{n}\\ c_i=\frac{4i}{n}\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}a=0\\ b=4\end{matrix}\qquad f(x)=\sqrt{x}$$

روش دوم می‌توان از ۸ فاکتور گرفت و $[a,b]=[0,1]$ و $f(x)=\sqrt{x}$ یعنی

$$8\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=8\int_0^1\sqrt{x}\,dx=8\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{16}{3}$$

مثال ۴

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n^2}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2+(i)^2}}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4+(\frac{i}{n})^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}=\left[\ln\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)\right]_0^1=$$

$$=\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)-\ln 1=\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n},\quad c_i=\frac{i}{n}\Rightarrow \begin{matrix}b=1\\ a=0\end{matrix},\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$$

مثال ۵

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right]=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+(i)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1=$$

$$=\ln(1+\sqrt{2})$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad\begin{cases}\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}\\ c_i=\frac{i}{n}\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}b=1\\ a=0\end{matrix}$$

Scanned by CamScanner

تمرین: حدهای زیر را بصورت وجود بیابید.

۱) تمرین $\frac{۳۱}{۳۷۵}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{4n}\tan\left(\frac{i\pi}{4n}\right).$$

۲) تمرین $\frac{۶۹}{۳۹۱}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{4}}{n^{5}}$$

۳) تمرین $\frac{۷۰}{۳۹۱}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^{2}}\right)$$

۴) تمرین $\frac{۵۷}{۴۰۴}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{3}}{n^{4}}$$

۵) تمرین $\frac{۵۸}{۴۰۴}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

۶) تمرین $\frac{۵۶}{۴۲۰}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{9}+\left(\frac{2}{n}\right)^{9}+\left(\frac{3}{n}\right)^{9}+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^{9}\right)$$

Scanned by CamScanner