حل برخی از تمرینات فصل مجموعه متناهی و نامتناهی (۳۹ تمرین)

۱- تمرین ۴ صفحه ۱۲۱: ثابت کنید اگر A یک مجموعه نامتناهی باشد آنگاه $A\times A$ نیز نامتناهی است

اثبات: اگر A نامتناهی باشد آنگاه تابع تک‌به‌تک $f: A \to A$ وجود دارد که $f(A) \neq A$

حال نشان می‌دهیم که تابع $h: A\times A \to A\times A$ تک‌به‌تک است.

$$h(x,y) = (f(x), f(y))$$

$$h(x_1,y_1)=h(x_2,y_2) \Rightarrow (f(x_1), f(y_1)) = (f(x_2), f(y_2)) \Rightarrow \begin{cases} f(x_1)=f(x_2) \\ f(y_1)=f(y_2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{بودن } f]{\text{تک‌به‌تک}} \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

پس h تک‌به‌تک است.

حال چون $f(A)\neq A$ پس $h(A\times A) \neq A\times A$ زیرا

$$h(A\times A) = f(A)\times f(A) \neq A\times A$$

پس $A\times A$ نامتناهی است

۲- تمرین ۵ صفحه ۱۲۱: ثابت کنید اگر مجموعه A یا B نامتناهی باشد آنگاه $A\cup B$ یک مجموعه نامتناهی است

حل: چون $A \subseteq A\cup B$ ~~بنابراین~~ $A\cup B$ یک ابرمجموعه A است و طبق قضیه ا مجموعه $A\cup B$ نامتناهی است

۳- تمرین ۶ صفحه ۱۲۱: ثابت کنید که اجتماع متناهی از مجموعه‌های متناهی یک مجموعه متناهی است

اثبات: فرض کنید که A_1 و A_2 و ... و A_k متناهی باشند پس $A_1 \sim N_{l_1}$ و $A_2 \sim N_{l_2}$ و ... $A_k \sim N_{l_k}$

با تجدید اندیس می‌توان نوشت

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1l_1}\}$ و $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2l_2}\}$

و به همین ترتیب $A_k = \{a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kl_k}\}$ در این صورت

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kl_k}\}$$

و مجموعه $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ حداکثر $l_1+l_2+\cdots+l_k=m$ عضو دارد یعنی این مجموعه با یک N_m در تناظر یک‌به‌یک است و متناهی است

۴- تمرین ۷ صفحه ۱۲۱: فرض کنید که $A\cup B$ یک مجموعه نامتناهی باشد. ثابت کنید که حداقل یکی از دو مجموعه A و B نامتناهی است.

اثبات: فرض خلف: فرض کنید که هر دوی A و B متناهی باشند در این صورت $A\cup B$ متناهی می‌شود که یک تناقض است پس باید حداقل یکی از A و B نامتناهی باشد.

۵- تمرین ۸: اگر Y یک زیرمجموعه متناهی از مجموعه نامتناهی X باشد، آنگاه ثابت کنید که $X-Y$ نامتناهی است

اثبات (فرض خلف) فرض کنید که $X-Y$ متناهی باشد چون $X = Y\cup(X-Y)$ و Y و $X-Y$ متناهی فرض شده است پس مجموعه X هم متناهی می‌شود که یک تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۶- تمرین ۹ صفحه ۱۲۱ ثابت کنید که اگر مجموعه A یک قسمی باشد که هر زیر مجموعه سره A نامتناهی باشد آنگاه A هم نامتناهی است.

اثبات: چون هر زیر مجموعه سره A نامتناهی است پس $A\cup\{k\}$ که $k\notin A$ هم نامتناهی است حال طبق قضیه ۳ مجموعه $A=(A\cup\{k\})-\{k\}$ نامتناهی است.

۷- تمرین ۱۰ صفحه ۱۲۱ ثابت کنید که اگر یک مجموعه سره B یک قسمی باشد که هر زیر مجموعه سره B متناهی باشد آنگاه B هم متناهی است.

اثبات: چون هر زیر مجموعه سره B متناهی است پس $B-\{k\}$ (که $k\in B$) یک مجموعه متناهی است

حال چون $B=(B-\{k\})\cup\{k\}$ اجتماع دو مجموعه متناهی است پس متناهی است.

۸- تمرین ۱۱ صفحه ۱۲۱: ثابت کنید که اگر $k\in\mathbb{N}$ و مجموعه‌های $A_1, A_2, \dots, A_k$ یک قسمی باشند که $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ نامتناهی باشد آنگاه برای یک $j\in\mathbb{N}$، A_j نامتناهی است.

اثبات (فرض خلف): فرض کنید که برای هر j که $1\le j\le k$ همه A_j ها متناهی باشد در این صورت $\bigcup_{j=1}^{k} A_j$ متناهی می‌شود که یک تناقض است پس حداقل یک $j\in\mathbb{N}$ که A_j نامتناهی است.

۹- تمرین ۱۲ صفحه ۱۲۱: ثابت کنید که اگر مجموعه A یک قسمی باشد که $A\times A$ نامتناهی است. آنگاه A نیز نامتناهی است.

اثبات: فرض کنید که A مجموعه‌ای متناهی باشد که دارای n عضو باشد آنگاه $A\times A$ دارای n^2 عضو است و متناهی می‌شود که یک تناقض است پس فرض خلف باطل و مجموعه A نامتناهی است.

۱۰- تمرین ۱۳ صفحه ۱۲۱ ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B یک قسمی باشند که $A\times B$ نامتناهی باشد آنگاه یا A نامتناهی است یا B نامتناهی است.

اثبات (فرض خلف) فرض کنید که هر دوی A و B متناهی باشد در این صورت $A\times B$ متناهی می‌شود که یک تناقض است پس فرض خلف باطل و حداقل یکی از دو مجموعه A و B نامتناهی می‌شود.

۱۱- تمرین ۱۴ صفحه ۱۲۱: ثابت کنید که اگر $k\in\mathbb{N}$ و مجموعه‌های $A_1, A_2, \dots, A_k$ یک قسمی باشند که $\prod_{i=1}^{k} A_i$ نامتناهی باشد آنگاه برای یک $j\in\mathbb{N}_k$ مجموعه A_j نامتناهی می‌شود.

اثبات: فرض کنید که برای هر $j\in\mathbb{N}_k$ مجموعه‌های A_j متناهی باشند آنگاه $\prod_{j=1}^{k} A_j$ متناهی می‌شوند که یک تناقض است پس فرض خلف باطل و حداقل یکی از A_j ها نامتناهی است.

۱۲- تمرین ۱۵ صفحه ۱۲۱ ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B یک قسمی باشند که $A\oplus B$ نامتناهی باشد آنگاه یا A نامتناهی است یا B نامتناهی است.

$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

اثبات: فرض خلف، فرض کنید که A و B هر دو متناهی باشند و چون $A-B\subseteq A$ و $B-A\subseteq B$ طبق قضیه ۱ هر دوی $A-B$ و $B-A$ متناهی می‌شوند پس $A\oplus B$ متناهی که یک تناقض است پس فرض خلف باطل و حداقل یکی از A و B نامتناهی است.

۱۳- تمرین ۱۷ صفحه ۱۲۱: ثابت کنید که مجموعه متناهی یک مجموعه متناهی نامتناهی است

حل: فرض کنیم که A دارای n عضو باشد در این صورت $P(A)$ دارای 2^n عضو است پس $P(A)$ متناهی است.

۱۴- تمرین ۳ صفحه ۱۲۳ ثابت کنید که اگر X و Y دو مجموعه باشند آنگاه $X\times Y \sim Y\times X$.

اثبات: تابع $f: X\times Y \longrightarrow Y\times X$ با ضابطه $f(x,y)=(y,x)$ برای هر (x,y) از $X\times Y$ یک تابع دوسویی است پس $X\times Y \sim Y\times X$

یک به یک بودن f:

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2) \Rightarrow (y_1,x_1)=(y_2,x_2) \Rightarrow$$
$$x_1=x_2,\ y_1=y_2 \Rightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

f پوشا است زیرا برای هر $(y,x)\in Y\times X$ موجود دارد $(x,y)\in X\times Y$ بطوری که $f(x,y)=(y,x)$

۱۵- تمرین ۶ صفحه ۱۲۳ ثابت کنید که اگر X یک مجموعه شمارای نامتناهی و Y زیرمجموعه متناهی از X باشد آنگاه $X-Y$ شمارای نامتناهی است.

اثبات: روش اول: فرض خلف. فرض کنید که $X-Y$ متناهی باشد (شمارای متناهی) پس $X=(X-Y)\cup Y$ متناهی است زیرا اجتماع دو مجموعه متناهی است که یک تناقض است پس باید $X-Y$ نامتناهی باشد چون X شمارای نامتناهی است و $X-Y\subset X$ شمارای نامتناهی است (طبق قضیه ۸)

روش دوم: طبق تمرین ۸ بخش ۵.۱۰ مجموعه $X-Y$ نامتناهی است و چون X شمارای نامتناهی است طبق قضیه ۸ $X-Y$ هم شمارای نامتناهی می‌شود.

۱۶- تمرین ۷ صفحه ۱۲۳. ثابت کنید که اگر X یک مجموعه شمارای نامتناهی و Y یک مجموعه متناهی باشد آنگاه $X\cup Y$ شمارای نامتناهی است. (در صفحه ۹۶ جزوه حل شده است)

۱۷- تمرین ۹ صفحه ۱۲۴ فرض کنید که A یک مجموعه غیرتهی و 2^A مجموعه تمام توابع از مجموعه A به مجموعه $\{0,1\}$ است ثابت کنید که $P(A)\sim 2^A$

اثبات: $2^A=\{f \mid f: A \xrightarrow{\text{تابع}} \{0,1\}\}$ قبلاً دیدیم که تابع مشخصه عضو 2^A است. چون $\chi: X\to\{0,1\}$ با ضابطه $\chi_X(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\in X-A\end{cases}$ یک تابع بود. حال تابع $\varphi: P(A)\longrightarrow 2^A$ با ضابطه $\forall B\in P(A):\ \varphi(B)=\chi_B$ تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که تابع φ دوسویی است

φ یک به یک است زیرا

$$\varphi(B)=\varphi(C) \Rightarrow \chi_B=\chi_C \Rightarrow \chi_B(x)\overset{\forall x\in A}{=}\chi_C(x) \Rightarrow$$

χ_B^{-1} و χ_C^{-1} به عنوان رابطه وجود دارد پس

$$\left.\begin{array}{l}\chi_B^{-1}(1)=B,\ \chi_C^{-1}(1)=C\\ \chi_B^{-1}(0)=A-B,\ \chi_C^{-1}(0)=A-C\end{array}\right\} \Rightarrow B=C \quad (*)$$

φ پوشا است: برای هر تابع $f: A\to\{0,1\}$ زیرمجموعه B از A به صورت زیر می‌سازیم: $B=\{x\in A \mid f(x)=1\}$ بنابراین $\varphi(B)=\chi_B=f$.

(*) روش دیگری برای $B=C$ بودن:

$$\forall x\in B \Leftrightarrow \chi_B(x)=1=\chi_C(x) \Leftrightarrow x\in C$$

۱۸- تمرین ۱۰ صفحه ۱۲۵ فرض کنید که X یک مجموعه شمارای نامتناهی و Y یک زیرمجموعه نامتناهی X باشد. فرض کنید که $g: X \to \mathbb{N}$ و $h: Y \to \mathbb{N}$ با ضابطه $h(y) = |\{1,2,\dots,g(y)\} \cap g(Y)|$ تعریف شده. ثابت کنید که h یک تناظر یک‌به‌یک است و بنابراین Y شمارای نامتناهی است.

اثبات: $h(y) = n[\{1,2,3,\dots,g(y)\} \cap g(Y)]$ یعنی تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه است.

یک‌به‌یک بودن h: فرض کنید $x, y \in Y$ به قسمی باشند که $h(x)=h(y)$ یعنی

(*) $\{1,2,3,\dots,g(x)\} \cap g(Y) = \{1,2,\dots,g(y)\} \cap g(Y)$ نشان می‌دهیم که $g(y)=g(x)$ و در نتیجه $x=y$

زیرا اگر چنین نباشد بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنید $g(x) < g(y)$ آنگاه تعداد عناصر مجموعه سمت چپ (*) حداقل یکی از تعداد عناصر مجموعه سمت راست (*) کمتر است زیرا اگر $g(x)<g(y)$ مجموعه سمت چپ یک زیرمجموعه سمت راست است و عنصر $g(y)$ در مجموعه سمت راست قرار دارد. اما در مجموعه سمت چپ نیست. این تناقض نشان می‌دهد که $g(x)=g(y)$ پس $x=y$.

پوشا بودن h: اگر h پوشا نباشد آنگاه $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به قسمی که $n_0 \notin h(Y)$ بدون از دست دادن کلیت فرض کنید n_0 کوچکترین عدد طبیعی با این خاصیت باشد. آنگاه یک $y_0 \in Y$ وجود دارد به قسمی که $h(y_0)=n_0-1$ (به راحتی می‌توان نشان داد که $n_0 \neq 1$) فرض کنیم $y_1 = \min\{g(t) \mid g(t) > g(y_0),\ t \in Y\}$ نتیجه می‌شود که

$$h(y_1) = n[\{1,2,3,\dots,g(y_1)\} \cap g(Y)] = (n_0-1)+1 = n_0 \quad (**)$$

زیرا

$$\{1,2,\dots,g(y_1)\} \cap g(Y) = [\{1,2,\dots,g(y_0)\} \cap g(Y)] \cup \{g(y_1)\}$$

۱۹- تمرین ۱۴ صفحه ۱۲۵: فرض کنید که a و b و c و d اعداد حقیقی باشند که $a<b$ و $c<d$. ثابت کنید که

الف) $[0,1] \sim (0,1]$ ب) $[a,b] \sim (c,d]$ ج) $[c,d] \sim (c,d]$

حل الف) $f:[0,1] \to (0,1]$

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ \frac{1}{n+1} & x=\frac{1}{n} \\ x & x \neq 0,\ x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$$

باید نشان دهیم که f دوسویی است

حل ب) $f:[a,b] \to (c,d]$

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) = \begin{cases} d & x=a \\ d+\frac{d-c}{n+1} & x=a+\frac{b-a}{n} \\ x & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

باید نشان دهیم که f دوسویی است

حل ج) $f:[c,d] \to (c,d]$

باید نشان دهیم که f دوسویی است

$$\forall x \in [c,d],\ f(x) = \begin{cases} d & x=c \\ c+\frac{d-c}{1+n} & x=c+\frac{b-a}{n} \\ x & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

دوسویی بودن الف) را بررسی می‌کنیم و ب و ج بطور مشابه می‌باشد

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow$

اگر $x_1=x_2=0$ آنگاه $1=f(x_1)=f(x_2)$

در این صورت $x_1=x_2=0$ است

اگر $x_1 = x_2 = \frac{1}{n}$ آنگاه $f(x_1) = \frac{1}{n+1} = f(x_2) = \frac{1}{n+1}$ در این صورت $x_1 = x_2 = \frac{1}{n}$

اگر $x_1 \neq 0$ و $x_2 \neq 0$ و $x_1 \neq \frac{1}{n}$ و $x_2 \neq \frac{1}{n}$ در این صورت $f(x_2) = x_2 = f(x_1) = x_1$

پس در هر صورت f یک به یک است

برای پوشا بودن f

$$\forall y \in (0,1] \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = \frac{1}{n+1} \Rightarrow x = \frac{1}{n} \\ y \neq \dots \quad y = x \end{cases}$$

پس f پوشا است

توضیح: در تمرین قبل چون $[0,1] \sim (0,1]$ و $[c,d] \sim (c,d]$ و $[a,b] \sim [c,d]$ و $(c,d] \sim [c,d]$ و طبق تمرین ۱۱ صفحه ۱۱۸ می‌توان نا مساوی‌ها و تساوی مثال ۱۱ صفحه ۱۲۵ را نتیجه گرفت

۲۰- تمرین ۳ صفحه ۱۲۷ ثابت کنید که اجتماع تعداد متناهی از مجموعه‌های شمارا، شمارا است

اثبات: فرض کنید که A_1 و A_2 و ... و A_n، n تا مجموعه شمارا باشند نشان می‌دهیم که $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ شمارای نامتناهی است

این n تا مجموعه را به دو دسته تقسیم می‌کنیم الف) فرض کنید که A_1 و A_2 و ... و A_s $(s<n)$ متناهی باشند

ب) فرض کنید که A_{s+1} و A_{s+2} و ... و A_n شمارای نامتناهی باشند بنابراین $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = (\bigcup_{i=1}^{s} A_i) \cup (\bigcup_{i=s+1}^{n} A_i)$

طبق تمرین ۷ بخش ۷-۱ اجتماع تعداد متناهی از مجموعه‌های متناهی، متناهی است پس $\bigcup_{i=1}^{s} A_i$ متناهی است پس شمارا است

و طبق نتیجه قضیه ۹ $\bigcup_{i=s+1}^{n} A_i$ شمارای نامتناهی است و بنابراین اجتماع شمارای نامتناهی و شمارای متناهی، شمارا است

۲۱- تمرین ۴ صفحه ۱۲۷: ثابت کنید که اگر A و B دو مجموعه شمارای نامتناهی باشند، $A \times B$ نیز شمارای نامتناهی است، مخصوصاً $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ و $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی هستند

حل: چون A و B شمارای نامتناهی هستند پس توابع دوسوی $f: A \to \mathbb{N}$ و $g: B \to \mathbb{N}$ وجود دارد آنگاه $h: A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ یک تابع دوسوی است از این رو $A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ در نتیجه طبق قضیه ۱۰، $A \times B$

$$h(x,y) = (f(x), g(y))$$

شمارای نامتناهی است. بنابراین $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ و $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ شمارای نامتناهی است.

تمرین ۲۲- تمرین ۵ صفحه ۱۲۷. یک تابع یک‌به‌یک $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ پیدا کنید و برهان دیگری برای شمارای نامتناهی بودن $\mathbb{Q}$ بیاورید (مثال ۵ کتاب صفحه ۱۲۷)

حل: مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q}$ را می‌توان به صورت $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p,q) = 1 \}$ در نظر می‌گیریم

تابع $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ یک‌به‌یک است (قبلاً مشابه آن انجام داده‌ایم)

$$f(\frac{p}{q}) = (p, q)$$

و چون $\mathbb{Q} \sim f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ، $f(\mathbb{Q})$ شمارای نامتناهی است و در نتیجه $\mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است.

تمرین ۲۳: تمرین ۶ صفحه ۱۲۷. ثابت کنید که مجموعه تمام دایره‌های واقع در صفحه دکارتی که شعاع‌هایشان

اعداد گویا و مختصات مرکزهایشان اعداد گویا هستند، شمارای نامتناهی است

حل: فرض کنید که $\mathcal{C}$ مجموعه تمام دایره‌های در صفحه‌ای باشد که شعاع و مختصات مرکز دایره گویا باشند تابع $f: \mathcal{C} \to \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ که در آن (x,y) مرکز دایره و z شعاع دایره است

$$\forall c\in\mathcal{C} \quad f(c) = (x,y,z)$$

f یک تابع یک به یک است (تمرین) و $\mathcal{C} \sim f(\mathcal{C}) \subseteq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ حال چون $\mathbb{Q}\sim\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ پس با فرض $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\sim\mathbb{N}$ یعنی $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است پس طبق قضیه ۸ چون $f(\mathcal{C})\subseteq\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ پس $f(\mathcal{C})$ شمارای نامتناهی است و بنابراین $\mathcal{C}$ = مجموعه تمام دایره‌های که مرکز و شعاع آن اعداد گویا است، شمارای نامتناهی است.

۲۴- تمرین ۷ صفحه ۱۲۸ ثابت کنید که اگر برای هر $k\in\mathbb{N}$، B_k یک مجموعه شمارای نامتناهی باشد آنگاه $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ شمارای نامتناهی است.

حل: قرار می‌دهیم $A_1 = B_1$ و $A_2 = B_2 - B_1$ و $A_{k+1} = B_{k+1} - \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ در این صورت $\{A_k \mid k\in\mathbb{N}\}$ خانواده‌ای شمارا ی نامتناهی از مجموعه‌های شمارای مجزا هستند و همچنین $A_1 = B_1$ و $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ طبق نتیجه قضیه ۱۰، $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ شمارای نامتناهی می‌شود و بنابراین $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ نیز شمارای نامتناهی است.

۲۵- تمرین ۸ صفحه ۱۲۸: ثابت کنید که اگر X یک مجموعه شمارا و $f: X \to Y$ یک سورژکسیون (تابع پوشا) باشد آنگاه Y شمارا است.

اثبات: چون f پوشا است پس دارای یک وارون راست است یعنی

$\exists g: Y \to X$

$f\circ g = I_Y$

از طرفی g دارای یک وارون چپ (خود f) است پس تابع g یک به یک است و $g: Y \xrightarrow{1-1} X$ پس $Y \sim g(Y) \subseteq X$

چون X شمارا است پس یا X متناهی است که در این صورت Y هم متناهی یعنی پس Y شمارا است یا X شمارای نامتناهی است پس Y هم طبق قضیه ۸ شمارای نامتناهی است بنابراین در هر حالت Y شمارا است.

۲۶- تمرین ۹ صفحه ۱۲۸: ثابت کنید که هر مجموعه شمارای نامتناهی X یک زیرمجموعه شمارای نامتناهی مانند Y دارد که $X-Y$ شمارای نامتناهی است.

حل: فرض کنید که X مجموعه شمارای نامتناهی باشد پس تناظر یک به یک $f: \mathbb{N} \to X$ وجود دارد حال قرار می‌دهیم $f(\mathbb{N}_e) = Y \subseteq X$ چون $Y = f(\mathbb{N}_e) \sim \mathbb{N}_e$ شمارای نامتناهی است پس $X - Y = \mathbb{N} - \mathbb{N}_e = \mathbb{N}_o$ شمارای نامتناهی است.

۲۷- تمرین شماره ۱۰: ثابت کنید که مجموعه تمام چندجمله‌ای‌ها با ضرایب صحیح $\mathbb{Z}[x]$ $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$
شمارای نامتناهی است. به عبارت دیگر $\mathbb{Z}[x]=\{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n \mid a_i\in\mathbb{Z}\}$ شمارای نامتناهی است.
حل: فرض کنید $k\in\mathbb{N}$ قرار دهیم A_k مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح از درجه k باشد یعنی

$$A_k=\{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_{k-1}x+a_k \mid a_i\in\mathbb{Z},\ a_0\neq 0\}$$

آنگاه تابع مقابل با ضابطه زیر

$$f: A_k \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\dots\times\mathbb{Z}}_{k\ \text{بار}}$$

$$f(g(x))=(a_0,a_1,\dots,a_n) \qquad g(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_{k-1}x+a_k$$

یک تابع یک‌به‌یک است (یک‌به‌یک بودن تمرین) بنابراین $A_k\sim f(A_k)\subseteq \underbrace{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\dots\times\mathbb{Z}}_{k\ \text{بار}}$

چون $\underbrace{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\dots\times\mathbb{Z}}_{k\ \text{بار}}$ شمارای نامتناهی است

پس طبق قضیه ۸، $f(A_k)$ و A_k شمارای نامتناهی است

حال چون $\mathbb{Z}[x]=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k$ طبق نتیجه قضیه ۱۰ $\mathbb{Z}[x]$ شمارای نامتناهی است

۲۸- تمرین ۱۱ صفحه ۱۲۸: (تعریف جبری) هر ریشه حقیقی معادله $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$ را یک عدد جبری می‌نامیم. [برای نمونه $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ چون ریشه معادله با ضرایب صحیح $x^2-2=0$ است اعداد جبری می‌نامیم. همچنین ۱ و ۱- دو عدد جبری است زیرا ریشه معادله $x^2-1=0$ است]
ثابت کنید که مجموعه تمام اعداد (جبری)، شمارای نامتناهی است.

اثبات: طبق تمرین قبل قرار می‌دهیم $A_n=\{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n \mid a_i\in\mathbb{Z},\ a_0\neq 0\}$
چون هر معادله با ضرایب صحیح درجه n باشد $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$ حداکثر n ریشه حقیقی دارد، B_n را مجموعه تمام ریشه‌های حقیقی (اعداد جبری) معادلات با ضرایب صحیح در A_n در نظر بگیرید.
تعداد اعضای B_n حداکثر n برابر تعداد A_n است. چون A_n شمارای نامتناهی است بنابراین B_n هم مجموعه شمارای نامتناهی است زیرا اجتماع n مجموعه شمارای نامتناهی است که با $\mathbb{N}$ هم‌عدد است پس $B_n\sim\mathbb{N}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

حال تعداد اعداد جبری یا مجموعه اعداد جبری برابر با $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n$ است که طبق نتیجه قضیه شمارای نامتناهی است.

۲۹- تمرین ۱۲ صفحه ۱۲۸: ثابت کنید که مجموعه تمام زیرمجموعه‌های متناهی یک مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.
اثبات: فرض کنید A یک مجموعه شمارای نامتناهی و برای هر $k\in\mathbb{N}$، A_k مجموعه تمام زیرمجموعه‌های متناهی A با دقیقاً k عضو در نظر می‌گیریم آنگاه برای هر $k\in\mathbb{N}$، $A_k\sim\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N}}_{k\ \text{بار}}$ (با دقت و تکرار کردن تعداد) مجموعه $\mathbb{N}$ داریم $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$ پس $A_k\sim\mathbb{N}$

بنابراین طبق نتیجه قضیه ۱۰ مجموعه $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ که شامل تمام زیرمجموعه‌های متناهی غیرتهی A است، شمارای نامتناهی است.

۳۰- تمرین ۲ صفحه ۱۳۰ ثابت کنید که هر فوق (ابر) مجموعه یک مجموعه ناشمارا، ناشمارا است.

اثبات: فرض کنید که A یک مجموعه ناشمارا باشد و $A\subset B$. از فرض خلف استفاده می‌کنیم. اگر B شمارا باشد یا متناهی است یا شمارای نامتناهی و چون A نامتناهی است پس B متناهی نیست، پس B باید شمارای نامتناهی باشد یعنی $B\sim\mathbb{N}$ پس f وجود دارد و $A\subset B$ بنابراین $A\sim f(A)\subseteq\mathbb{N}$ پس A هم شماراست که متناقض با فرض مسئله است.

نکته: ① طبق قضیه شماره ۱ داریم الف) هر ابر مجموعه یک مجموعه نامتناهی، نامتناهی است
ب) هر زیرمجموعه یک مجموعه متناهی، متناهی است

② طبق قضیه ۸ و نتیجه آن: الف) هر زیرمجموعه نامتناهی از یک مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است
ب) هر زیرمجموعه یک مجموعه شمارا، شمارا است.

③ طبق مسئله ۲ صفحه ۱۳۰ هر ابر مجموعه یک مجموعه ناشمارا، ناشمارا است

۳۱- تمرین ۳ صفحه ۱۳۰ با استفاده از مسئله قبل برهان دیگری برای نتیجه قضیه ۱۲ (یعنی مجموعه $\mathbb{R}$ ناشمارا است) بیاورید.

حل: چون $(0,1)$ ناشماراست و $(0,1)\subset\mathbb{R}$ پس طبق مسئله قبل $\mathbb{R}$ ناشماراست

۳۲- تمرین ۴ صفحه ۱۳۰ ثابت کنید که مجموعه تمام اعداد گنگ بین 0 و 1 را ناشماراست.

اثبات: فرض کنید که T مجموعه تمام اعداد گویا بین $(0,1)$ باشد و T' مجموعه تمام اعداد گنگ (غیرگویا) بین $(0,1)$ باشد
یعنی
چون $(0,1)=T\cup T'$ و T شماراست زیرا $T\subseteq\mathbb{Q}$ اگر T' هم شمارا باشد آنگاه باید $(0,1)$ شمارا باشد که نادرست است پس T' مجموعه ناشمارا است

۳۳- تمرین ۵ صفحه ۱۳۰ تعریف عدد متعالی: هر عدد حقیقی که جبری نباشد را یک عدد متعالی می‌نامیم مانند π و عدد e و $\pi\sqrt{2}$ و ... .
ثابت کنید که مجموعه تمام اعداد متعالی ناشمارا است.

اثبات: می‌دانیم که مجموعه تمام اعداد جبری شمارای نامتناهی است فرض کنید که A مجموعه تمام اعداد جبری و B مجموعه تمام متعالی باشد در این صورت $\mathbb{R}=A\cup B$. اگر B شمارا باشد آنگاه $\mathbb{R}$ هم باید شمارا باشد که نادرست است پس مجموعه تمام اعداد جبری ناشمارا است

۳۴- تمرین ۶ صفحه ۱۳۰: فرض کنید که $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ یعنی S^1 مجموعه تمام نقاط روی دایره‌ای با مرکز $(0,0)$ و شعاع ۱ یا دایره واحد باشد. ثابت کنید که $S^1\sim\mathbb{R}$ و بنابراین S^1 ناشمارا است

اثبات: تابع $f:[0,2\pi)\to S^1$ با ضابطه $f(t)=(\cos t,\sin t)$ یک تابع یک‌به‌یک است:

زیرا
$$f(t_1)=f(t_2)\Rightarrow(\cos t_1,\sin t_1)=(\cos t_2,\sin t_2)\Rightarrow\begin{cases}\cos t_1=\cos t_2\\ \sin t_1=\sin t_2\end{cases}\Rightarrow$$
در بازه $[0,2\pi)$ داریم $t_1=t_2$ بنابراین f یک‌به‌یک است.

ادامه در صفحه بعد

f پیوسته است زیرا برای هر $(x,y) \in S'$ وجود دارد $t \in [0, 2\pi)$ بطوریکه $\left\{\begin{matrix} x = \cos t \\ y = \sin t \end{matrix}\right.$ (معادله پارامتری دایره)

پس $f(t) = (\cos t, \sin t) = (x,y)$.

بنابراین $S' \sim [0, 2\pi)$ حال چون $(0,1) \sim [0, 2\pi)$ و $(0,1) \sim \mathbb{R}$ پس $S' \sim \mathbb{R}$

۳۵- تمرین ۷: ثابت کنید که مجموعه A ناشمارا است اگر و تنها اگر $A \times A$ ناشمارا باشد.

اثبات: تابع $f: A \longrightarrow A \times \{1\}$, $f(a) = (a,1)$ یک تابع دوسویی است (قبلاً ثابت کرده‌ایم)

بدیهی است که $A \sim A \times \{1\} \subseteq A \times A$ ⊛

حال اگر A ناشمارا باشد آنگاه طبق ⊛ $A \times A$ ابر مجموعه A است پس ناشمارا است یعنی $A \times A$ ناشمارا است

برعکس اگر $A \times A$ ناشمارا باشد فرض خلف اگر A شمارا باشد آنگاه $A \times A$ شمارا می‌شود که یک تناقض است

پس A ناشمارا است. [زیرا $A \sim \mathbb{N} \Rightarrow A \times A \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \sim A$]

۳۶- تمرین ۸ صفحه ۱۲۰: ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B طوری باشند که $A \times B$ ناشمارا است آنگاه A یا B ناشمارا است

برهان: فرض خلف: اگر A و B هر دو شمارا باشند آنگاه $A \times B$ شمارا می‌شود که یک تناقض است بنابراین حداقل یکی از A یا B باید ناشمارا باشد

۳۷- تمرین ۹ صفحه ۱۲۰: ثابت کنید که اگر $K \in \mathbb{N}$ و مجموعه‌های $A_1, A_2, \dots, A_K$ طوری باشند که $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_K$ ناشمارا باشد آنگاه $\exists j \in \mathbb{N}_K$ بطوریکه A_j ناشمارا است.

اثبات: اگر برای هر $1 \le j \le K$، A_j شمارا باشد آنگاه $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_K$ شمارا است که با فرض مسئله متناقض است

۳۸- تمرین ۱۰ صفحه ۱۲۰: ثابت کنید که اگر $K \in \mathbb{N}$ و مجموعه‌های $A_1, A_2, A_3, \dots, A_K$ طوری باشند که $\bigcup_{i=1}^{K} A_i$ ناشمارا باشد آنگاه $\exists j \in \mathbb{N}_K$ بطوریکه A_j ناشمارا است

اثبات: طبق برهان خلف اثبات را کامل کنید

۳۹- ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B طوری باشند که $A \oplus B$ ناشمارا باشد آنگاه A یا B ناشمارا است.

آیا عکس آن درست است؟

اثبات: می‌دانیم که $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$ از عکس نقیض کمک می‌گیریم یعنی ثابت می‌کنیم که اگر A و B شمارا باشند آنگاه $A \oplus B$ شمارا است: چون $A - B \subseteq A$ چون A شمارا است پس $A - B$ شمارا است

چون $B - A \subseteq B$ پس چون B شمارا است بنابراین $B - A$ شمارا است

پس $A \oplus B$ شمارا است.

عکس آن درست نیست اگر $A = B = \mathbb{R}$ آنگاه $A \oplus B = \phi$ شمارا است درصورتیکه هر دوی A و B ناشمارا هستند

سوال: نشان دهید که مجموعه تمام نقاطی از صفحه $\mathbb{R}^2$ که در معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ صدق می‌کنند ناشمارا است یعنی مجموعه تمام نقاط روی یک بیضی ناشمارا است

پایان