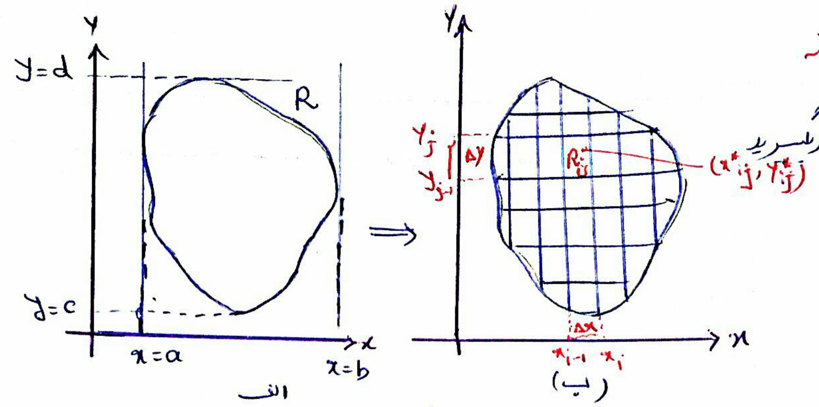
فصل 16 : انتگرال چندگانه

در این فصل ایدهٔ انتگرال معین را به انتگرال دوگانه و سه‌گانه تابع های دو متغیره یا سه متغیره تعمیم می‌دهیم سپس از آنها برای محاسبه حجم، جرم و مرکز جرم استفاده می‌کنیم.

انتگرال دوگانه

شکل (۱) را در نظر بگیرید



شکل (۱)

اگر $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد که روی ناحیه بسته R $\underbrace{\text{تعریف شده}}_{\text{پیوسته و نامنفی}}$ باشد (شکل ۱ قسمت الف)

ناحیه R را با رسم خطوطی موازی با محورهای x و y به چند دسته مانند یا شبیه مستطیل تقسیم می‌کنیم (ب)

اگر $[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\cap R$ ($[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ یک مستطیل کامل باشد)، R_{ij} را برابر مستطیل $[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ می‌گیریم و در غیر اینصورت R_{ij} را ϕ می‌گیریم یعنی R_{ij} یا مستطیل کامل‌اند و یا اینکه خالی‌اند.

نقطه دلخواه $(x^*_{ij},y^*_{ij})\in R_{ij}$ در نظر می‌گیریم

R_{ij} مساحت مستطیل $=\Delta A=\Delta x\,\Delta y$

حجم این جعبه به قاعده R_{ij} و بلندی $f(x^*_{ij},y^*_{ij})$ برابر است با $f(x^*_{ij},y^*_{ij})\Delta A$

این روند را در مورد همهٔ مستطیل‌ها پیاده می‌کنیم بنابراین

$$\boxed{*}\quad V\approx\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij},y^*_{ij})\Delta A$$

وقتی m و n بزرگتر می‌شوند انتظار می‌رود که تقریب $\boxed{*}$ بهتر شود بنابراین

$$V=\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij},y^*_{ij})\Delta A$$

توجه: اگر حد فوق وجود داشته باشد مقدار حد را انتگرال دوگانه f روی ناحیه R می‌نامیم و با $\iint_R f(x,y)\,dA$ نشان می‌دهیم.

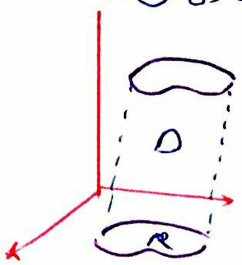
توجه 2. اگر f روی R پیوسته باشد نتیجه می‌گیریم انتگرال دوگانه f وجود دارد و یا به عبارتی دیگر f انتگرال‌پذیر است.

کاربرد انتگرال دوگانه

۱- محاسبه حجم اجسام: اگر در ناحیه R داشته باشیم $z = f(x,y) \geq 0$ آنگاه انتگرال دوگانه مساوی با حجم استوانه‌ای D است

که از پایین به مرز ناحیه R و از بالا به رویه $z = f(x,y)$ و از اطراف توسط استوانه‌ای که منحنی هادی آن مرز R

و مولد آن محور z است، محصور شده است. که در $\boxed{1}$ بیان شد.



R : سایه یا تصویر $f(x,y)$

۲- مساحت سطح: اگر $f(x,y)=1$ آنگاه

$$\text{مساحت} = \iint_R 1 \, dA$$

توجه: حجم ناحیه‌ای استوانه‌ای شکل بین دو سطح $z = f(x,y)$ و $z = g(x,y)$ که $(x,y) \in R$

و $f(x,y) \geq g(x,y)$ برابر است با

$$V = \iint_R \left[f(x,y) - g(x,y) \right] dA \quad \text{حجم جسم } D$$

D : یک جسم سه بعدی که از بالا محدود به f و از پایین به g می‌باشد

R : سایه یا تصویر D در صفحه xy

- مقدار متوسط تابع f روی R برابر است با $\dfrac{\iint_R f(x,y)\,dA}{R \text{ مساحت}}$

انتگرال مکرر: فرض کنید f تابعی دو متغیره باشد که روی مستطیل $R=[a,b]\times[c,d]$ انتگرال پذیر است

آنگاه

$$A(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$$

$$\rightarrow \int_a^b A(x)\,dx=\underbrace{\int_a^b \Big[\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{اولویت }1}\Big]dx}_{\text{اولویت }2}$$

یعنی ابتدا نسبت به y از c تا d انتگرال می‌گیریم سپس نسبت به x از a تا b انتگرال می‌گیریم

به طور مشابه انتگرال به صورت زیر نیز تعریف می‌شود

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy=\underbrace{\int_c^d\Big[\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{1}\Big]dy}_{2}$$

قضیه فوبینی: اگر f روی مستطیل $R=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ ← کراندار

پیوسته باشد آنگاه

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

نتیجه از قضیه فوبینی: ترتیب انتگرال‌گیری مهم نیست.

$\boxed{\text{مثال}}$ انتگرال‌های دوگانه زیر را در ناحیه داده شده بیابید

$$1-\iint_R (x-3y^2)\,dA \quad ; \quad R=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}$$

حل:

$$\iint_R (x-3y^2)\,dA=\int_0^2\left[\int_1^2 (x-3y^2)\,dy\right]dx=\int_0^2 \left[xy-y^3\right]_1^2 dx$$

$$=\int_0^2\left[(2x-8)-(x-1)\right]dx=\int_0^2 (x-7)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-7x\right]_0^2=-12$$

$$\int_1^2\int_0^2 (x-3y^2)\,dx\,dy \overset{\text{به طور مشابه}}{=} -12$$

$$2)\ \iint_R y\sin(xy)\,dA \quad ; \quad R=\{(x,y)\mid 1\le x\le 2,\ 0\le y\le \pi\}$$

$$\text{یا}\quad R=[1,2]\times[0,\pi]$$

حل:

$$\iint_R y\sin(xy)\,dA=\underbrace{\int_0^\pi \underbrace{\int_1^2 y\sin(xy)\,dx}_{1}\,dy}_{2}=\int_0^\pi\Big[\underbrace{-y\left(\tfrac{1}{y}\right)\cos(xy)}_{-\cos xy}\Big]_{x=1}^{x=2}dy$$

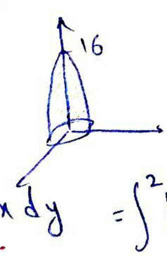
$$=\int_0^\pi \underbrace{-(+\cos(2y)-\cos y)}_{\cos y-\cos 2y}\,dy=\left[\sin y-\frac{1}{2}\sin y\right]_0^\pi=0$$

$\boxed{\text{سوال}}$ انتگرال فوق را ترتیب اش عوض کنید و سپس حل کنید.

$$\int_1^2\int_0^\pi y\sin(xy)\,dy\,dx \quad ?$$

$\boxed{\text{مثال}}$ حجم جسم سه بعدی که را محدود به سهمی وار بیضوی $x^2+2y^2+z=16$ ، صفحه $x=2$ و $y=2$ و سه صفحه مختصات است پیدا کنید

حل: ساخت $f(x,y)$



در اینجا $z=f(x,y)$

$$z=16-x^2-2y^2$$

$$V=\underbrace{\int_0^2\underbrace{\int_0^2 (16-x^2-2y^2)\,dx}_{\text{اولویت } 1}\,dy}_{2}=\int_0^2\left[16x-\frac{x^3}{3}-2xy^2\right]_{x=0}^{x=2}dy$$

$$=\int_0^2\left(\frac{88}{3}-4y^2\right)dy=\left[\frac{88}{3}y-\frac{4}{3}y^3\right]_0^2=\boxed{48}$$

توجه: در حالت خاصی که $f(x,y)$ قابل تجزیه به عبارات x,y باشد می‌توان نوشت

اگر $f(x,y) = g(x)\,h(y)$ و $R=[a,b]\times[c,d]$

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy}$$

انتگرال برحسب x و y جداگانه محاسبه می‌شود و وابسته به هم نیستند

مثال: اگر $R=[\underbrace{0,\tfrac{\pi}{2}}_{\text{حدود } x}]\times[\underbrace{0,\tfrac{\pi}{2}}_{\text{حدود } y}]$ آنگاه $\iint_R \sin x \cos y\,dA$ را بیابید.

حل: در اینجا $f(x,y)=\underbrace{\sin x}_{g(x)}\,\underbrace{\cos y}_{h(y)}$ قابل تجزیه به عبارات x و y است بنابراین

$$\iint_R \sin x \cos y\,dA = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy =$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} \left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = \left[-(0-1)\right]\left[1-0\right] = 1\times 1 = \boxed{1}$$