جدول (۴) روابط تابع مثلثاتی و وارون آن

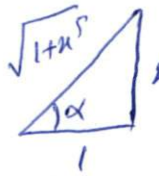
$$\begin{cases}\sin(\sin^{-1}x)=x \ : \ x\in D_{\sin^{-1}x}\\ \sin^{-1}(\sin x)=x \ : \ x\in D_{\sin x}\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos(\cos^{-1}x)=x \ : \ x\in D_{\cos^{-1}x}\\ \cos^{-1}(\cos x)=x \ : \ x\in D_{\cos x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan(\tan^{-1}x)=x \ : \ x\in D_{\tan^{-1}x}\\ \tan^{-1}(\tan x)=x \ : \ x\in D_{\tan x}\end{cases} \qquad \begin{cases}\cot(\cot^{-1}x)=x \ : \ x\in D_{\cot g^{-1}x}\\ \cot^{-1}(\cot x)=x \ \ x\in D_{\cot g x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sec(\sec^{-1}x)=x \ : \ x\in D_{\sec^{-1}x}\\ \sec^{-1}(\sec x)=x \ : \ x\in D_{\sec x}\end{cases} \qquad \begin{cases}\csc(\csc^{-1}x)=x \ : \ x\in D_{\csc^{-1}x}\\ \csc^{-1}(\csc x)=x \ : \ x\in D_{\csc x}\end{cases}$$

مثال ۱: عبارت $\cos(\tan^{-1}x)$ را ساده کنید

حل: فرض کنید که $\tan^{-1}x=\alpha$ پس $\tan\alpha=x$ یک مثلث قائم الزاویه مقابل



بنابراین هدف محاسبه $\cos\alpha$ است که برابر است با

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

مثال ۲ (تمرین ۳۹ صفحه ۵۷۳) اگر $g(x)=x\sin^{-1}(\frac{x}{4})+\sqrt{16-x^2}$ آنگاه $g'(2)$ را بیابید

حل: می دانیم که طبق قاعده زنجیری اگر $y=\sin^{-1}u$ آنگاه $y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ پس

$$g'(x)=\sin^{-1}(\frac{x}{4})+x\left(\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}}\right)+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}\right)=\sin^{-1}(\frac{x}{4})+\cancel{\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}}-\cancel{\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}}=\sin^{-1}(\frac{x}{4})$$

$$g'(2)=\sin^{-1}(\frac{2}{4})=\sin^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6} \qquad (\text{زیرا } \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2})$$

مثال ۳ مشتق توابع الف) $y=\frac{1}{\sin^{-1}x}$ و ب) $y=x\tan^{-1}\sqrt{x}$ را حساب کنید.

حل الف)

$$y=\frac{1}{\sin^{-1}x}\longrightarrow y'=\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\sin^{-1}x)^2}=\frac{-1}{(\sin^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

ب)

$$y=x\tan^{-1}\sqrt{x}\Rightarrow y'=\tan^{-1}\sqrt{x}+x\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}\right)=\tan^{-1}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

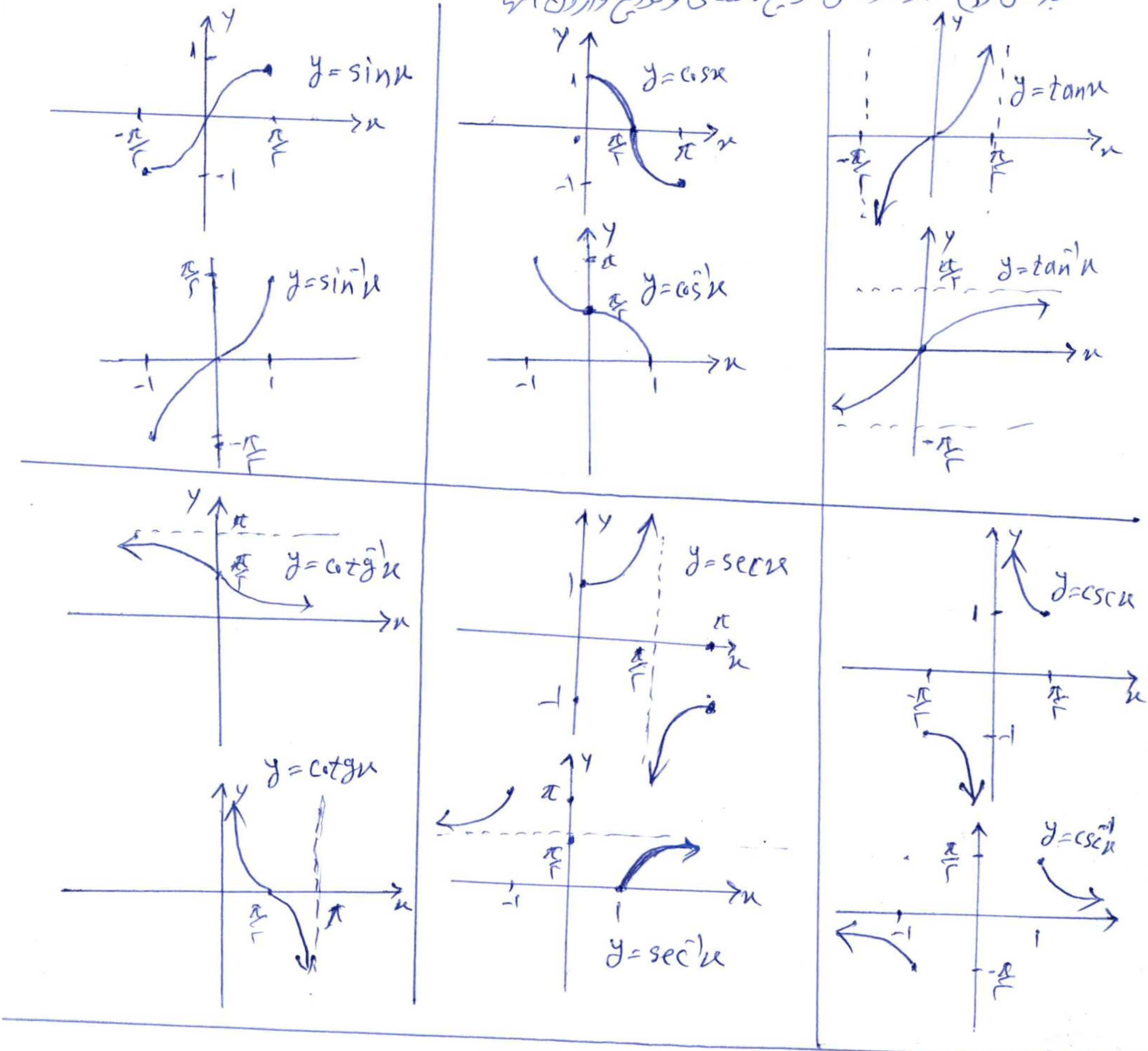
مثال ۴. مطلوب است محاسبه $\sin^{-1}(\sin\pi)$

حل: چون π در دامنه محدود شده برای $\sin$ قرار ندارد، نباید زود قضاوت کرد و نتیجه گرفت $\sin^{-1}(\sin\pi)=\pi$.

جواب عبارت است از

$$\sin^{-1}(\sin\pi)=\sin^{-1}(0)=0$$

جدول ② نمودارهای توابع مثلثاتی و توابع وارون آنها



جدول ③ انتگرال‌های وابسته

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad (a>0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad (a>0)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+C \quad (a>0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x+C = -\cos^{-1}x+C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x+C = -\cot g^{-1}x+C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}|x|+C = -\csc^{-1}|x|+C$$

صفحه ۱

جلسه سوم (توابع وارون مثلثاتی)

توابع مثلثاتی $\sin x$ و $\cos x$ و $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot g x=\frac{1}{\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x}$ و $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ و $\csc x=\frac{1}{\sin x}$ یک یک نیستند بنابراین تابع وارون ندارند ولی بدلیل اهمیت و کاربرد آنها در ریاضی و مهندسی با محدود کردن دامنه توابع مثلثاتی برای این توابع، توابع وارون (تابع آرک arc) تعریف می‌کنیم.

در جدول های زیر توابع وارون مثلثاتی و دامنه و برد آنها و مشتق و معکوس آنها و انتگرال های وابسته به آنها بیان شده است.

جدول ①

تابع مثلثاتی $D=$ دامنه تابع $R=$ برد تابع	تابع وارون مثلثاتی $D=$ دامنه تابع $R=$ برد تابع	مشتق تابع وارون مثلثاتی
$y=\sin x$ $D=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $R=[-1,1]$	$y=\sin^{-1}x=\arcsin x$ $D=[-1,1]$ $R=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\cos x$ $D=[0,\pi]$ $R=[-1,1]$	$y=\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$ $D=[-1,1]$ $R=[0,\pi]$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\tan x$ $D=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $R=(-\infty,+\infty)$	$y=\tan^{-1}x=\arctan x$ $D=(-\infty,+\infty)$ $R=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=\cot g x=\frac{1}{\tan x}$ $D=(0,\pi)$ $R=(-\infty,+\infty)$	$y=\cot g^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$ $D=(-\infty,+\infty)$ $R=(0,\pi)$	$y'=\frac{-1}{1+x^2}$
$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ $D=[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3\pi}{2})$ $R=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$y=\sec^{-1}x=\cos^{-1}(\frac{1}{x})$ $D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ $R=[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3\pi}{2})$	$y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$ $D=(0,\frac{\pi}{2}]\cup(\pi,\frac{3\pi}{2}]$ $R=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$y=\csc^{-1}x=\sin^{-1}(\frac{1}{x})$ $D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ $R=(0,\frac{\pi}{2}]\cup(\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$y'=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

توجه: دامنه توابع مثلثاتی $\sec x$ و $\csc x$ را برای تعریف معکوس آن می‌توان به صورت زیر انتخاب کرد:

$y=\sec x$: $D=[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]=R_{\sec^{-1}x}$

$y=\csc x$: $D=[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]=R_{\csc^{-1}x}$