صفحه ۴ حدهای مبهم و قاعده هوپیتال

در حدگیری هفت صورت مبهم وجود دارند که عبارت است از

$\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0 \times \infty$ و $\infty - \infty$ و 1^{∞} و 0^{0} و ∞^{0}

برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ روشهای زیادی وجود دارد یکی از این روش ها قاعده هوپیتال است.

قاعدهٔ هوپیتال: فرض کنید توابع f و g روی بازه‌ای مانند I که حاوی a است (بجز احتمالاً در خود a) مشتق‌پذیر باشند و $g'(x) \neq 0$. همچنین فرض کنید که $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

یا $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

در این صورت $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (البته باید $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد).

توجه: در قاعده هوپیتال به جای اینکه x به سمت a میل کند می‌توان x به a^- یا a^+ یا $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند.

رفع ابهام $\infty - \infty$ و $0 \times \infty$: این دو مدل حد را به $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ به صورت زیر تبدیل می‌کنیم و سپس از قاعده هوپیتال کمک می‌گیریم. در $\infty - \infty$ با استفاده از مخرج مشترک گرفتن یا صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کردن به $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌کنیم و برای $0 \times \infty$ به کمک وارونه کردن یکی از توابع در حاصل ضرب و در مخرج قرار دادن به $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌کنیم

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a} f(x) g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

رفع ابهام 1^{∞} و 0^{0} و ∞^{0} به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x) \ln f(x)}$$

پس باید $\lim_{x \to a} g(x) \ln f(x)$ را محاسبه کنیم که این حد خودش $0 \times \infty$ است که در قسمت قبل به $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌شود.

توجه: برای رفع ابهام 1^{∞} و 0^{0} و ∞^{0} می‌توان از تابع $\ln$ هم کمک گرفت به صورت زیر

$$b = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln b = \ln f(x)^{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \to a} \ln b = \lim_{x \to a} g(x) \ln f(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to a} b = \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x) \ln f(x)}$$

صفحه ۵

مثال ۱: مطلوب است محاسبه حدهای زیر

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3} \overset{H\cdot P}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \overset{H\cdot P}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sec^2 x\tan x}{6x} = \dfrac{2}{6}\lim\limits_{x\to 0}\sec^2 x \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

$= \dfrac{1}{3}(1)\times \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} \overset{H\cdot P}{=} \dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x}{1} = \dfrac{1}{3}$ (برای $\frac{0}{0}$)

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1} \overset{H\cdot P}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1} = 1$ (برای $\frac{0}{0}$)

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H\cdot P}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$ (برای $0\times\infty$)

د) $\lim\limits_{x\to -\infty} x e^{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{e^{-x}} \overset{H\cdot P}{=} \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}} = -\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x} = 0$ (برای $0\times\infty$)

ه) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}(\sec x - \tan x) = \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}\left(\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}\dfrac{1-\sin x}{\cos x} \overset{H\cdot P}{=}$ (برای $\infty-\infty$)

$= \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}\dfrac{-\cos x}{-\sin x} = \dfrac{0}{1} = 0$

ز) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sin 4x)^{\cot x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\cot x\ln(1+\sin 4x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{\tan x}} \overset{H\cdot P}{=}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{4\cos 4x}{1+\sin 4x}}{\sec^2 x}} = e^{\lim \frac{\frac{4}{1+0}}{1}} = e^4$ (برای 1^∞)

س) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \overset{H\cdot P}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0^+} x} = e^0 = 1$ (برای 0^0)

ش) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}} \overset{H\cdot P}{=} e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} x} = e^{+\infty}$

$= +\infty$ (برای ∞^0)

(نکته مهم): (۱) در استفاده قاعده هوپیتال باید مطمئن شویم که حد داده شده یکی از هفت صور

(صفحه ۶)

مبهم است. معمولاً اگر حد با 0^{∞} و ∞^{∞} تبدیل شود مبهم نیست و حل اینگونه حدها هم از فرمول زیر استفاده می‌شود (فقط رفع ابهام نیاز دارد) (مثال ۳)

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

۲- بعضی وقتها استفاده از قاعده هوپیتال با صورت مکرر ما را در یک دور قرار می‌دهد که باید از آن پرهیز کرد

مثال ۲) در $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\tan x}$ قاعده هوپیتال ما را در یک دور قرار می‌دهد (امتحان کنید)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} = 1$$

مثال ۳) حدهای زیر را حساب کنید

الف) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln x} = e^{(+\infty)(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$

زیرا $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

ب) $\lim_{x\to +\infty} x^{x} = e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln x} = e^{(+\infty)(+\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$

نتیجه: حدهای 0^{∞} و ∞^{∞} مبهم نیستند و جواب آن صفر یا ∞ است

تمرین‌های صفحه ۵۹۴ شماره‌های ۶۳ و ۶۲ و ۵۴ و ۴۷ و ۳۶ و ۹ را حل کنید

مثال) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x}\right)$

مثال) $\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)$