مثال ۵ (تمرین ۱ صفحه ۱۲۵) فرض کنید که $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$ $(a<b)$

الف) ثابت کنید که $f:[0,1]\to[a,b]$ با ضابطه $f(x)=a+(b-a)x$ یک تناظر یک‌به‌یک است

ب) نتیجه بگیرید که $[a,b]\sim[c,d]$ $(c<d)$ ⊛

حل الف) f یک‌به‌یک است. $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow a+(b-a)x_1=a+(b-a)x_2\Rightarrow$

$(b-a)x_1=(b-a)x_2\Rightarrow x_1=x_2$

f پوشا است.

$\forall y\in[a,b]\Rightarrow a\le y\le b\Rightarrow \underset{\text{دانسته فرض کردن مسئله}}{a\le a+(b-a)x\le b}\Rightarrow 0\le(b-a)x\le b-a\Rightarrow$

$0\le x\le 1\Rightarrow \exists x\in[0,1]:f(x)=a+(b-a)x\Rightarrow[a,b]\sim[0,1]$

قسمت ب) همانند الف) $[c,d]\sim[0,1]$ و چون هم‌عددی یک رابطه هم‌ارزی است پس نتیجه داریم:

$$(a<b,\ c<d):[a,b]\sim[c,d]$$

⊛ توجه: در مثال قبل چرا $a+(b-a)x$ در بازه $[a,b]$ قرار می‌گیرد؟ به عبارت دیگر چرا

$a\le a+(b-a)x\le b$

جواب: چون $0\le x\le 1$ و چون $a<b$ پس $b-a>0$ با ضرب $(b-a)$ در نامساوی $0\le x\le 1$ داریم: $0\le(b-a)x\le b-a$ با اضافه کردن a به طرفین نامساوی‌ها داریم

پس $a\le(b-a)x\le b-a+a$ $\quad a\le(b-a)x\le b$

چند تمرین:

می‌دانیم که اگر $f:X\to Y$ یک تابع دوسویی باشد آنگاه $f^{-1}:Y\to X$ هم یک تابع دوسویی است یعنی اگر $X\sim Y$ باشد آنگاه $Y\sim X$ (یعنی تقارن رابطه $\sim$ روی مجموعه‌ها)

۱- در بخش هم‌توانی مجموعه‌ها در قضایای ۶ و ۷ و مثال‌های ۱ تا ۵ ضابطه معکوس توابعی که مورد استفاده قرار گرفته است را بیابید به عبارت دیگر آیا می‌توانید به جای معرفی تابع $f:X\to Y$ تابع $f^{-1}:Y\to X$ معرفی کنید. مثلاً در قضیه ۷ به جای ضابطه $f\times g: X\times Z\to Y\times W$

$(f\times g)(x,y)=(f(x),g(y))$

ضابطه $(f\times g)^{-1}:Y\times W\to X\times Z$ را بیابید. سایر موارد هم به همین صورت

۲- یک تابع دوسویی $f:[a,b]\to[c,d]$ تعریف کنید.

۳- مجموعه شمارا و مجموعه شمارای نامتناهی

تعریف ۳: مجموعه X را شمارای نامتناهی می‌نامیم هرگاه $X \sim \mathbb{N}$ یا به عبارت دیگر تابع دوسوی $f: X \to \mathbb{N}$ وجود داشته باشد. و مجموعه X را شمارا نامیم هرگاه یا متناهی یا شمارای نامتناهی باشد.

مثال ۱: چون $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ پس $\mathbb{N}$ مجموعه شمارای نامتناهی است
همچنین چون $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_e$ و $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_o$ پس مجموعه‌های $\mathbb{N}_e$ و $\mathbb{N}_o$ شمارای نامتناهی هستند

مثال ۲: در بخش قبل دیدیم (مثال ۳ بخش قبل) که $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ پس $\mathbb{Z}$ هم مجموعه شمارای نامتناهی است

مثال ۳: تمام مجموعه‌های متناهی طبق تعریف ۳ مجموعه‌های شمارا هستند. آنها را مجموعه شمارای متناهی می‌نامیم.

تبصره: اگر X یک مجموعه شمارای نامتناهی باشد آنگاه یک تناظر یک‌به‌یک $f: \mathbb{N} \to X$ وجود دارد.
اگر بنویسیم $f(1) = x_1,\ f(2) = x_2,\ f(3) = x_3,\ \dots\ f(n) = x_n$
در این صورت مجموعه $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ همان مجموعه X است که اعضای آن را شماره گذاری یا اندیس گذاری کرده‌ایم (مشابه دنباله‌ها یعنی اعضای X دنباله‌های $f(n) = x_n$ هستند)
حال اگر X متناهی باشد مثلاً دارای n عضو باشد می‌توان نوشت $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
یعنی $X \sim N_n$ پس تابع دوسوی $f: N_n \to X$ وجود دارد که $f(k) = x_k \quad \forall k \in N_n$
یعنی داریم اعضای X را شمارش می‌کنیم چه X شمارای متناهی باشد یا X شمارای نامتناهی باشد

قضیه ۸: هر زیرمجموعه نامتناهی از یک مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

اثبات: فرض کنیم که Y یک زیرمجموعه نامتناهی از مجموعه شمارای نامتناهی $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ است. فرض کنید که n_1 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_1} \in Y$ و n_2 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_2} \in Y - \{x_{n_1}\}$
با ادامه این روند می‌توانیم اعضای دیگر Y را هم اندیس گذاری کنیم یعنی n_k کوچکترین اندیسی می‌گیریم که $x_{n_k} \in Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}\}$.

حال چون Y نامتناهی است برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $(Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\}) \neq \emptyset$
پس همیشه برای هر $k \in \mathbb{N}$، x_{n_k} ای وجود دارد. به این ترتیب یک تناظر یک‌به‌یک $f: \mathbb{N} \to Y$ به صورت $f(k) = x_{n_k}$ تعریف می‌شود (برای هر $k \in \mathbb{N}$). بنابراین Y شمارای نامتناهی است

نتیجه: هر زیرمجموعه یک مجموعه شمارا، شمارا است.

اثبات: فرض کنید که X یک مجموعه شمارا باشد بنابراین یا X متناهی است یا X شمارای نامتناهی. اگر X شمارای نامتناهی باشد آنگاه طبق قضیه قبل هر زیرمجموعه نامتناهی از X شمارای نامتناهی است پس این زیرمجموعه شمارا است و اگر X مجموعه متناهی باشد طبق قضیه ا (قسمت الف) هر زیرمجموعه آن متناهی است پس شمارا است و هر زیرمجموعه متناهی از مجموعه شمارای نامتناهی هم بدیهی است که شمارا است.

چند مثال از مجموعه های شمارای نامتناهی و خصوصیات مجموعه های شمارای نامتناهی.

قضیه ۹) اجتماع دو مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

اثبات. فرض کنیم که A و B دو مجموعه شمارای نامتناهی باشند. نشان می دهیم که $A\cup B$ در هر دو حالت زیر شمارای نامتناهی است.

حالت اول $A\cap B=\phi$. چون A و B شمارای نامتناهی هستند پس $A\sim\mathbb{N}$ و چون $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_e$ پس $A\sim\mathbb{N}_e$.
همچنین چون B شمارای نامتناهی است پس می توان فرض کرد که $B\sim\mathbb{N}_o$ در نتیجه، طبق قضیه ۶ داریم $(A\cup B)\sim\mathbb{N}_e\cup\mathbb{N}_o=\mathbb{N}$ که نشان می دهد که $A\cup B\sim\mathbb{N}$ یعنی $A\cup B$ شمارای نامتناهی است.

حالت دوم $A\cap B\neq\phi$ قرار می دهیم $C=B-A$ در این صورت $A\cup C=A\cup B$ و $A\cap C=\phi$.
مجموعه $C\subseteq B$ یا متناهی است یا شمارای نامتناهی است [طبق نتیجه قضیه ۸]. اگر C مجموعه متناهی باشد بنابر مسئله ۷ تمرین ۲.۵، $A\cup C$ شمارای نامتناهی است. (این در مثال ۴ اخیر حل شده است)
اگر C مجموعه شمارای نامتناهی باشد آنگاه $A\cup C$ طبق حالت اول $A\cup B=A\cup C$ شمارای نامتناهی است
پس مجموعه $A\cup B$ شمارای نامتناهی است.

نتیجه: فرض کنید که A_1 و A_2 و ... و A_n مجموعه های شمارای نامتناهی هستند آنگاه $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ نیز شمارای نامتناهی است.

اثبات: به روش استقرای ریاضی عمل می کنیم. شروع استقرای ریاضی: طبق قضیه ۹، اگر A_1 و A_2 شمارای نامتناهی باشند آنگاه $A_1\cup A_2$ شمارای نامتناهی است. پس برای $n=2$ حکم درست است.

فرض استقرای ریاضی: فرض کنید (برای $n=k$) فرض کنید که اگر A_1 و A_2 و ... و A_k شمارای نامتناهی باشند آنگاه مجموعه $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ شمارای نامتناهی است.

حکم استقرای ریاضی ($n=k+1$) نشان می دهیم که اگر A_1 و A_2 و ... و A_{k+1} شمارای نامتناهی باشند آنگاه نشان می دهیم که $\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i$ شمارای نامتناهی است. اثبات حکم: چون $\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i=\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\cup A_{k+1}$، چون A_{k+1} شمارای نامتناهی و طبق فرض $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ شمارای نامتناهی است با فرض $B=\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ طبق قضیه ۹ مجموعه $\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i=B\cup A_{k+1}$ شمارای نامتناهی است. پس طبق اصل استقرای ریاضی حکم برای هر n برقرار است.

مثال ۴ (تمرین ۷ بخش ۵-۲) ثابت کنید که اگر X یک مجموعه شمارای نامتناهی و Y یک مجموعه متناهی

باشد آنگاه $X \cup Y$ شمارای نامتناهی است

اثبات: چون X شمارای نامتناهی است پس $f: \mathbb{N} \to X$ وجود دارد و فرض کنید که Y مجموعه متناهی به صورت $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ باشد $Y \cap X = \emptyset$ (برای راحتی اثبات).

حال تابع g به صورت مقابل

$$g: \mathbb{N} \to X \cup Y \quad : \quad g(i) = \begin{cases} y_i & 1 \le i \le k \\ f(i-k) & i > k \end{cases}$$

درنظر می‌گیریم زیرا $f: \mathbb{N} \to X$ مجموعه X را به صورت

$$\boxed{\overset{x_1}{\overset{\shortparallel}{f(1)}}, \overset{x_2}{\overset{\shortparallel}{f(2)}}, \dots, \overset{x_n}{\overset{\shortparallel}{f(n)}}, \dots}$$

شماره گذاری می‌کند. بنابراین دو تابع

$h_1: N_k \to Y$, $h_1(i) = y_i$ و $h_2: \mathbb{N} \to X$, $h_2(i) = f(i-k)$

با هم اجتماع گرفته‌ایم یا $g = h_1 \cup h_2$ است.

$$X \cup Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\} \cup X =$$
$$= \{y_1, y_2, \dots, y_k, f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots\}$$

g یک‌به‌یک است:

$$g(m_1) = g(m_2) \Rightarrow \begin{cases} y_{m_1}, y_{m_2} \in Y \Rightarrow y_{m_1} = y_{m_2} \xRightarrow[\text{یک‌به‌یک}]{h_1} m_1 = m_2 \\ m_1, m_2 \in X \Rightarrow f(m_1 - k) = f(m_2 - k) \xRightarrow[\text{یک‌به‌یک}]{f} m_1 - k = m_2 - k \\ \Rightarrow m_1 = m_2 \end{cases}$$

g پوشا است:

$$\forall x \in X \cup Y \Rightarrow \begin{cases} \exists n \in N \quad x = f(n) = g(n+k) & \text{آنگاه } x \in X \text{ اگر} \\ \exists i \in N_k \quad g(i) = y_i = x & : x \in Y \text{ اگر} \end{cases}$$

بنابراین مجموعه $X \cup Y$ شمارای نامتناهی است.

مثال ۵: نشان دهید که $\mathbb{Z}$ شمارای نامتناهی است (از قضیه قبل کمک بگیرید).

حل: می‌توان $\mathbb{Z} = I \cup \mathbb{Z}^-$ که در آن $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه تمام اعداد حسابی و مجموعه تمام اعداد صحیح منفی $= \mathbb{Z}^-$ درنظر گرفت. حال طبق قضیه ۹ (قضیه قبل) اجتماع هر مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است. پس $\mathbb{Z}$ چون اجتماع دو مجموعه شمارای نامتناهی $\mathbb{Z}^-$ و I است پس شمارای نامتناهی است.

قضیه ۱۰: مجموعه $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است

اثبات: تابع $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ را با ضابطه $f(i,j)=2^i 3^j$ ؛ $\forall (i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

در نظر میگیریم [به جای دو عدد ۲ و ۳ میتوان هر دو عدد طبیعی m و n که نسبت به هم اولند در نظر گرفت]

نشان می دهیم که f یک به یک است.

$f(L_1,K_1)=f(L_2,K_2)\Longrightarrow$

چون ۲ و ۳ نسبت به هم اولند پس توانهای دو طرف

$2^{L_1}3^{K_1}=2^{L_2}3^{K_2}\Longrightarrow$

تساوی نظیر به نظیر با هم مساوی هستند یعنی

$L_1=L_2$ و $K_1=K_2$ پس $(L_1,K_1)=(L_2,K_2)$

یعنی f یک به یک است. حال چون

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\subset\mathbb{N}$

و چون $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ نامتناهی است و هر زیرمجموعه نامتناهی از یک مجموعه شمارای نامتناهی (طبق قضیه ۸) شمارای نامتناهی است پس $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ شمارای نامتناهی است و چون $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

پس $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ هم شمارای نامتناهی است.

تبصره: تابع $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ پوشا نیست زیرا $Im(f)\neq\mathbb{N}$

$f(i,j)=2^i\times 3^j$

به عبارت دیگر همه اعضای $\mathbb{N}$ به صورت $2^i\times 3^j$ نیستند مثلاً عدد ۵ $\neq 2^i\times 3^j$ و

$\nexists (i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:f(i,j)=5$

نتیجه: برای هر $K\in\mathbb{N}$ فرض کنید که A_K یک مجموعه شمارای نامتناهی باشد و برای $i\neq j$ داریم $A_i\cap A_j=\phi$ در این صورت $\bigcup_{K\in\mathbb{N}} A_K$ شمارای نامتناهی است.

اثبات: برای هر $K\in\mathbb{N}$ تابع $f_K:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}\times\{K\}$ را با ضابطه $f_K(j)=(j,K)$

برای هر $j\in\mathbb{N}$ تعریف میکنیم. این تابع f_K دوسویی است (یک تناظر یک به یک است) زیرا

یک به یک بودن f_K:

$f_K(j)=f_K(i)\Rightarrow(j,K)=(i,K)\Rightarrow i=j$

f_K پوشا است:

$\forall (j,K)\in\mathbb{N}\times\{K\}\Rightarrow\exists j\in\mathbb{N}:f_K(j)=(j,K)$

پس $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\{K\}$ بنابراین چون A_K شمارای نامتناهی است پس $A_K\sim\mathbb{N}$ و به تعدی $A_K\sim\mathbb{N}\times\{K\}$

حال طبق مسئله ۵ (تمرین ۲۰۵) نتیجه می شود $\bigcup_{K\in\mathbb{N}} A_K\sim\bigcup_{K\in\mathbb{N}}(\mathbb{N}\times\{K\})$ اما چون $\bigcup_{K\in\mathbb{N}}(\mathbb{N}\times\{K\})=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

زیرا $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{k\} = \mathbb{N}\times\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{k\} = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ حال طبق قضیه ۱۰ چون $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است پس $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \sim \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است

توجه: از روش اثبات نتیجه قبل بخصوص ساختن تابع f_k می‌توانیم برای مجزا کردن مجموعه‌ها از هم کمک بگیریم برای نمونه اگر دو مجموعه A و B دارای اشتراک باشند یعنی $A\cap B\neq\phi$ می‌توان با توابع $f_b : A\longrightarrow A\times\{b\}$ و $f_a : B\longrightarrow B\times\{a\}$ که $a\in(A-B)$ و $b\in(B-A)$ (یعنی $a,b\notin A\cap B$) طبق نتیجه قبل $A\sim A\times\{b\}$ و $B\sim B\times\{a\}$ و چون $A\times\{b\}\cap B\times\{a\}=\phi$ بنابراین مجموعه $A\cup B$ با مجموعه $A\times\{b\}\cup B\times\{a\}$ هم عدد می‌شود و می‌توان بجای $A\cup B$ از هم عدد آن $(B\times\{a\})\cup(A\times\{b\})$ کمک گرفت و یک اثبات دیگر برای قضیه (۹) حالت ۲ آورد (یا قبول کرد)

مثال ۶) (تمرین ۵ بخش ۵-۲) این تعمیم قضیه ۶ را ثابت کنید یعنی فرض کنید که $\{X_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$ و $\{Y_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$ دو خانواده از مجموعه‌های مجزا باشند و برای هر $\gamma\in\Gamma$ $X_\gamma\sim Y_\gamma$ آنگاه $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \sim \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$.

اثبات: چون $X_\gamma\sim Y_\gamma$ برای هر $\gamma\in\Gamma$ پس تابع دوسوی $f_\gamma : X_\gamma\longrightarrow Y_\gamma$ برای هر $\gamma\in\Gamma$ وجود دارد. حال تابع $f:\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \longrightarrow \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$ با ضابطه $\forall x\in X$ $f(x)=f_\gamma(x)$ را در نظر بگیرید

حال چون دو خانواده $\{X_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$ و $\{Y_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$ مجزا هستند پس تابع f خوش تعریف است و f یک تابع دوسوی هم هست. زیرا f_γ ها دوسوی هستند. پس $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \sim \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$.

یک‌به‌یک بودن f: $f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow f_\gamma(x_1)=f_\gamma(x_2) \longrightarrow x_1=x_2$

f پوشا است: $\forall y\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma \;:\; \exists\gamma\in\Gamma\; y\in Y_\gamma \xrightarrow[\text{پوشاست}]{\text{چون } f_\gamma} \exists x\in X_\gamma : f_\gamma(x)=y$

$\Longrightarrow f(x)=y$

مثال ۷) نشان دهید که مجموعه تمام اعداد گویا یعنی مجموعه $\mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است.

اثبات: می‌توان $\mathbb{Q}$ را به صورت $\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q} \mid p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0,\ (p,q)=1\}$ در نظر گرفت و $\mathbb{Q}^+=\{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q} \mid \frac{p}{q}>0\}$ و $\mathbb{Q}^-=\{-\frac{p}{q} \mid \frac{p}{q}\in\mathbb{Q}^+\}$ و $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^+\cup\{0\}\cup\mathbb{Q}^-$،

همچنین $\mathbb{Q}^+\sim\mathbb{Q}^-$ زیرا $f:\mathbb{Q}^+\longrightarrow\mathbb{Q}^-$ با ضابطه $f(\frac{p}{q})=-\frac{p}{q}$ یک تابع دوسوی است و یک‌به‌یک بودن f: $f(\frac{p_1}{q_1})=f(\frac{p_2}{q_2}) \Longrightarrow -\frac{p_1}{q_1}=-\frac{p_2}{q_2} \Longrightarrow \frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}$

چون $(p_1,q_1)=1$ و $(p_2,q_2)=1$ (یعنی نسبت به هم اولند) پس $p_1=p_2$ و $q_1=q_2$ پس $\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}$

f پوشا است چون $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^- \Rightarrow \frac{p}{q} < 0 \Rightarrow -\frac{p}{q} > 0$ و $-\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ ، $f(-\frac{p}{q}) = -(-\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$

حال نشان می دهیم که مجموعه $\mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است کافی است نشان دهیم که $\mathbb{Q}^+$ شمارای نامتناهی است و طبق نتیجه قضیه ۹ مجموعه $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ شمارای نامتناهی می شود.

حال تابع $h: \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ با ضابطه $h(\frac{p}{q}) = (p,q)$ ، $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ را در نظر بگیرید. h یک به یک است ،

$$h(\frac{p_1}{q_1}) = h(\frac{p_2}{q_2}) \Rightarrow (p_1,q_1) = (p_2,q_2) \Rightarrow p_1=p_2 ,\ q_1=q_2$$

بنابراین $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$. حال چون $\mathbb{Q}^+ \sim f(\mathbb{Q}^+) \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و چون $\mathbb{Q}^+$ ابر مجموعه $\mathbb{N}$ است پس نامتناهی است بنابراین $\mathbb{Q}^+$ شمارای نامتناهی می شود زیرا هر زیر مجموعه نامتناهی از مجموعه شمارای نامتناهی، نامتناهی است ($f(\mathbb{Q}^+)$ زیر مجموعه شمارای نامتناهی از $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ است).

قضیه ۱۱: هر مجموعه نامتناهی شامل یک زیر مجموعه شمارای نامتناهی است.

اثبات: فرض کنید که X یک مجموعه نامتناهی باشد. چون $X \neq \emptyset$ عضو $x_1 \in X$ وجود دارد حال عضوی دیگر مانند x_2 در $X - \{x_1\}$ انتخاب می کنیم و با ادامه این روند می توان عضو x_k از مجموعه ناتهی $X - \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ انتخاب کرد زیرا X نامتناهی است پس $X - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ناتهی است (چون اگر $X - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ تهی باشد پس $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ که یک تناقض با نامتناهی بودن X است.)

حال مجموعه $Y = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ یک زیر مجموعه شمارای نامتناهی از X است و مطلب اثبات شد.

۴- مجموعه های ناشمارا:

تعریف: مجموعه ای که شمارا نباشد را مجموعه ناشمارا می نامیم.

تا اکنون تعداد زیادی مجموعه شمارا و مجموعه شمارای نامتناهی مانند $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و ... دیده ایم.

سؤال: آیا مجموعه ناشمارا وجود دارد و اگر وجود دارد باید آن را در بین مجموعه های نامتناهی پیدا کنیم؟

جواب مثبت است یعنی مجموعه ناشمارا وجود دارد و معمولاً مجموعه نامتناهی می تواند مجموعه ناشمارا باشد. در این بخش با چند مجموعه ناشمارا آشنا می شویم.

قضیه ۱۲: بازه $(0,1)$ یک مجموعه ناشمارا است.

اثبات: (این اثبات به روش قطری کانتور معروف است) نخست برای بهتر فهمیدن مطلب هر عدد $x \in (0,1)$ [یعنی $0<x<1$] به صورت بسط اعشاری $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ نمایش می دهیم. برای نمونه

$\frac{1}{2} = 0.5$ ، $\frac{1}{4} = 0.25$ و $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106\ldots$ و $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$

می خواهیم هر عدد بین 0 و 1 دارای یک نمایش یکتایی از اعشار نامتناهی داشته باشیم. قرار می گذاریم که

که از رقم آخر اعشاری یکی کم کرده و رقم های بعدی را ۹ می نویسیم مثلا نوشته عدد $\frac{1}{4}=\%25$ را به صورت اعشار نامتناهی $\frac{1}{4}=\%249999\ldots$ می نویسیم و $\frac{1}{2}=\%4999\ldots$ ، $\frac{1}{2}=\%5$

با این قرارداد دو عدد در بازه $(0,1)$ مساوی هستند اگر و فقط اگر رقم های متناظر بسط اعشاری آنها یکی باشند از این رو، اگر دو عدد $x=\%x_1x_2x_3\ldots$ و $y=\%y_1y_2y_3\ldots$ در یک رقم اعشاری متفاوت باشند آنگاه $x\neq y$ (پس تا اینجا مقدمه اثبات بود و اثبات قضیه از خط بعد شروع می شود)

حال فرض خلف را فرض کنید که مجموعه (بازه) $(0,1)$ شمارای نامتناهی باشد. آنگاه یک تناظر یک به یک $f: N \to (0,1)$ وجود دارد از این رو می توانیم تمام عناصر بازه $(0,1)$ را به صورت زیر مرتب کنیم.

$$f(1)=\%a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots$$
$$f(2)=\%a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots$$
$$f(3)=\%a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots$$
$$\vdots$$
$$f(k)=\%a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots a_{kn}\ldots$$
$$\vdots$$

(شبیه درایه های یک ماتریس
یا سطرهای یک ماتریس)

که در آن $a_{jk}\in\{0,1,2,\ldots,9\}$ است.

اکنون برای اینکه به تناقض برسیم، عدد $z\in(0,1)$ را چنان می سازیم که با هیچ یک از $f(k)$های بالا برابر نباشد (یعنی f پوشا نیست) و بنابراین فرض خلف باطل و مجموعه $(0,1)$ ناشمارا است

عدد $z=\%z_1z_2z_3\ldots$ را چنین تعریف می کنیم که برای هر $k\in N$

$$z_k=\begin{cases}1 & a_{kk}=5 \text{ اگر}\\ 5 & a_{kk}\neq 5 \text{ اگر}\end{cases}$$

[۵ عدد دلخواه است می توان به جای عدد ۵ عدد دیگری در نظر گرفت]

بدیهی است که $0<z<1$ اما $z\neq f(1)$ زیرا $z_1\neq a_{11}$ و $z\neq f(2)$ زیرا $z_2\neq a_{22}$ و به همین صورت $z\neq f(k)$ زیرا $z_k\neq a_{kk}$.

بنابراین $z\notin f(N)=(0,1)$ یعنی f پوشا نیست.

[چون a_{kk} ها درایه های قطر اصلی یک ماتریس است این روش اثبات به روش قطری کانتور معروف است.]

نتیجه: مجموعه تمام اعداد حقیقی ناشمارا است.

برهان: دیدیم که $(0,1)\sim\mathbb{R}$ چون $(0,1)$ ناشمارا است و $\mathbb{R}$ با $(0,1)$ همتوان است پس $\mathbb{R}$ هم ناشمارا است (طبق تمرین ۵ بخش ۴.۲ صفحه ۱۳۰ کتاب)

مثال ۸ (تمرین ۱ صفحه ۱۰۲) فرض کنید که A و B دو مجموعه همتوان باشند، ثابت کنید که اگر A ناشمارا باشد آنگاه B نیز ناشمارا است.

اثبات: فرض کنید که $A \sim B$ پس یک تابع دوسوی $f: A \longrightarrow B$ وجود دارد. فرض کنید که A ناشمارا باشد باید ثابت کنیم که B نیز ناشمارا است. (فرض خلف) فرض کنید که B مجموعه ای شمارا باشد پس یا B متناهی است که در این صورت چون $A \sim B$ پس A هم باید متناهی باشد که یک تناقض است

اگر B نامتناهی باشد چون شمارا فرض شده است پس $B \sim \mathbb{N}$ و به نقدی داریم $A \sim \mathbb{N}$ یعنی A هم شمارای نامتناهی است که یک تناقض است

پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است یعنی B مجموعه ناشمارا است

مثال ۹: نشان دهید که مجموعه تمام اعداد اصم (گنگ) ناشمارا است.

اثبات: مجموعه تمام اعداد اصم همان متمم $\mathbb{Q}$ نسبت به $\mathbb{R}$ یعنی $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ است. حال فرض کنیم که $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ (فرض خلف) شمارا باشد در این صورت چون $\mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است پس طبق قضیه ۹ چون $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ پس $\mathbb{R}$ هم شمارای نامتناهی است که یک تناقض است

پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است یعنی مجموعه اعداد اصم ناشمارا است

جمع بندی این دو بخش مجموعه های شمارا و مجموعه ناشمارا:

تاحال با تعدادی از مجموعه های شمارای نامتناهی ($\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}^+$ و $\mathbb{Q}^-$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و طبق تمرین های کتاب $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ و ...) آشنا شده ایم.

وهمچنین با تعدادی از مجموعه های ناشمارا (بازه $(0,1)$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ و همه مجموعه های همتوان با $\mathbb{R}$ و همتوان با $(0,1)$ مانند (a,b) و $[a,b]$) آشنا شده ایم.

سوال: آیا مجموعه ناشمارای دیگری هم وجود دارد؟ غیر از مجموعه هایی که نام بردیم.

جواب مثبت است. تعدادی از آنها در تمرین های کتاب آمده است که برخی از آنها را به عنوان تمرین های حل شده، حل می کنیم. ولی تعداد این مجموعه های ناشمارا خیلی زیاد است و برای آشنایی با آنها لازم است فصل ۶ کتاب یعنی اعداد اصلی و مجموعه اعداد اصلی را مطالعه کنید. با مطالعه آن فصل شما می توانید تعداد زیادی مجموعه ناشمارا ببینید.

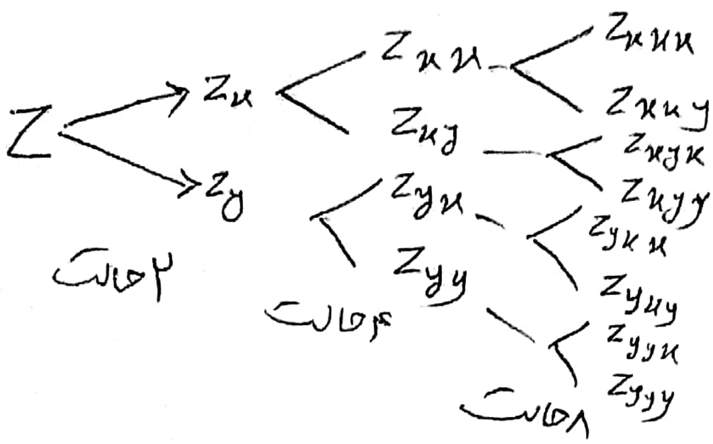
در پایان این فصل ۵ مطالبی مختصر که چه نوعی از مطالب گفته نشده تشبیه می شود و برای درسهای آمار و احتمال (برای دوره لیسانس و برای تدریس در دبیرستان) کاربرد دارد در صفحه بعد ذکر می گردد.

اصول شمارش اعضای یک مجموعه و خانواده

۱- اصل نمودار درختی: با رسم یک نمودار یا تمام نمودار درختی که دارای چندین سرشاخه است می توان اعضای یک مجموعه از پیش آمدها یا اعضای یک خانواده را شمارش کرد. مانند شجره نامه یک خانواده

مثال ۱: می خواهیم از تابع $z=f(x,y)$ از z سه بار نسبت به x و y مشتق بگیریم (مشتقات جزئی مرتبه سوم). تعداد این مشتقات جزئی چند است؟

حل: یک نمودار درختی برای آن رسم می کنیم و z_x یعنی مشتق مرتبه اول از z نسبت به x و z_{xx} یعنی مشتق جزئی مرتبه دوم از z نسبت به x و ...



جواب: شمارش تمام شاخه ها و سرشاخه ها

۲+۴+۸=۱۸

مقدار کل مشتقات جزئی تا مرتبه سوم

مقدار مشتقات جزئی مرتبه اول = ۲

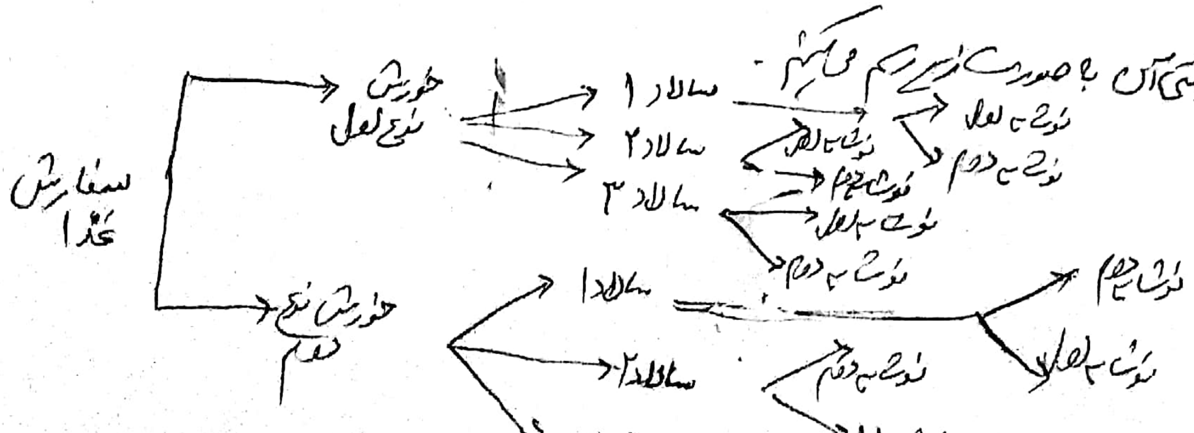
مقدار مشتقات جزئی مرتبه دوم = ۴

مقدار مشتقات جزئی مرتبه سوم = ۸

می توان برای n بار مشتق گیری جزئی تعمیم داد

مثال ۲: یک رستوران ۲ نوع خورش و ۳ نوع سالاد و دو نوع نوشابه سرو می کند. اگر شما بخواهید به این رستوران سفارش غذا بدهید به چند طریق می توانید یک دست غذا شامل یک خورش و یک سالاد و یک نوع نوشابه سفارش بدهید؟

حل: نمودار درختی آن را به صورت زیر رسم می کنیم:



جواب $۲\times۳\times۲=۱۲$

۲- اصل ضرب - اگر A و B دو مجموعه باشند، $n(A)=k$ تعداد اعضای A و $n(B)=L$ آنگاه

$$n(A\times B)=n(A)\times n(B)$$

طبق اصل ضرب می‌توان به چند مجموعه تعمیم داد

$$n(A\times B\times C)=n(A)\times n(B)\times n(C)$$

مثال ۲ صفحه قبل را می‌توان با اصل ضرب حل کرد فرض کنیم $A=\{$ [illegible] $\}$ و $B=\{$ [illegible] $\}$ و $C=\{$ نوشابه و نوشابه [illegible] $\}$ پس

$n(A)=2$ ، $n(B)=3$ ، $n(C)=2$

$$\text{جواب}=n(A\times B\times C)=2\times 3\times 2=12$$

۳- اصل شمول و طرد:

می‌دانیم که اگر $A\cap B=\phi$ آنگاه $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$. حال اگر $A\cap B\neq\phi$ از اصل زیر به نام اصل طرد و شمول برای دو مجموعه استفاده می‌کنیم.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

و نتیجه می‌دهد

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

و برای سه مجموعه:

$$\boxed{n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-\underbrace{n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)}_{\text{هر سه متفق}}+\underbrace{n(A\cap B\cap C)}_{\text{مثبت}}}$$

این اصل را می‌توان برای n مجموعه تعمیم داد

مثال ۳: فرض کنید که A و B و C سه مجموعه دلخواه باشند به طوری که A دارای ۵ عضو و B دارای ۸ عضو و C دارای ۱۰ عضو است و همچنین $n(A\cap B)=3$ و $n(A\cap C)=4$ و $n(B\cap C)=3$ و $n(A\cap B\cap C)=2$ باشد آنگاه $n(A\cup B\cup C)$ را بدست آورید.

حل: طبق اصل طرد و شمول داریم -

$n(A)=5$ ، $n(B)=8$ ، $n(C)=10$

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-[n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)]+n(A\cap B\cap C)$$

$$n(A\cup B\cup C)=5+8+10-[3+4+3]+2=23-10+2=15$$

توجه: اگر X مجموعه مرجع باشد آنگاه $A'=X-A$ و در این صورت

۱) $n(A\cup A')=n(X)$ ۲) $n(A\cap A')=\phi$ ۳) $n(A')=n(X)-n(A)$

۴) $n((A\cup B)')=n(X)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$

۵) $n((A\cap B)')=n(X)-n(A)-n(B)+n(A\cup B)$

ادامه صفحه بعد

برای سه مجموعه A و B و C که هر سه زیر مجموعه X هستند

۶) $n(A' \cap B' \cap C') = n(X) - [n(A)+n(B)+n(C)] + [n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)] - n(A\cap B\cap C)$

توجه: اصل‌های دیگری از جمله اصل ترکیب ـ ترتیب ـ تبدیل و اصل لانه کبوتری نیز وجود دارد که در درس‌های آمار با آن آشنا می‌شوید

توجه: اصل شمارش برای مجموعه‌های متناهی برقرار است ولی مجموعه نامتناهی نمی‌توان این اصل‌ها را بکار برد.

مثال ۴) می‌دانیم که $\mathbb{N} = \mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o$ و $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_e$ و $\mathbb{N}_o \sim \mathbb{N}$ و $\mathbb{N}_o \sim \mathbb{N}_e$.

پس $n(\mathbb{N}) = n(\mathbb{N}_e) + n(\mathbb{N}_o)$ نادرست است زیرا $n(\mathbb{N}) = n(\mathbb{N}_e) = n(\mathbb{N}_o)$

در فصل ۶ به $n(A)$ عدد اصلی A نسبت داده می‌شود که آن را کاردینال A می‌نامیم و در واقع

کاردینال $\mathbb{N}$ = کاردینال $\mathbb{N}_e$ = کاردینال $\mathbb{N}_o$
