«به نام خدا»

جبر خطی (برای دانشجویان فنی و مهندسی برق و صنایع و...)

سرفصل درس جبر خطی

۱- مقدمه (میدان یا هیات)

۲- فصل اول (دستگاه معادلات خطی و ماتریس و بردار)

۳- فصل دوم (فضای برداری)

۴- فصل سوم (تبدیل خطی)

۵- فصل چهارم (مقادیر ویژه و بردارهای ویژه)

۶- فصل پنجم (تابعکهای خطی)

منابع مورد نیاز

۱- جبر خطی کاربردی عبدالرضا بازرگان لاری دانشگاه شیراز

۲- جبر خطی کنت هافمن و ری کنزی ترجمه جمشید فرشیدی مرکز نشر دانشگاهی

مقدمه : میدان (یا هیات)

تعریف (عمل دوتایی): فرض کنید که F یک مجموعه ناتهی باشد. یک عمل دوتایی مانند $*$ روی مجموعه F قانونی (قاعده‌ای) است که به هر زوج از اعضای F مانند a و b عضوی منحصر به فرد مانند $a*b$ در F نسبت دهد.

به عبارت دیگر از نظر ریاضی

$$*: F\times F \longrightarrow F \qquad \forall (a,b)\in F\times F$$
$$*(a,b) = a*b$$

$a*b\in F$ منحصر به فرد است.

مثال ۱: عمل جمع $+$ روی مجموعه های $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ یک عمل دوتایی است. که در آن $\mathbb{Z}$ مجموعه تمام اعداد صحیح و $\mathbb{Q}$ مجموعه تمام اعداد گویا و $\mathbb{R}$ مجموعه تمام اعداد حقیقی است و $\mathbb{C}$ مجموعه تمام اعداد مختلط است.

$$\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R} \text{ و } i=\sqrt{-1}\} = \{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R} \text{ و } i^2=-1\}$$

در این مثال به جای $*$ از عمل جمع $+$ استفاده شده است

مثال ۲: عمل ضرب "$\circ$" روی مجموعه های $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ یک عمل دوتایی است.

در این مثال به جای $*$ از عمل ضرب "$\circ$" استفاده شده است.

یادآوری: عمل ضرب روی مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ به صورت زیر است.

$$\forall\, a+ib,\ c+id \in \mathbb{Z}$$
$$(a+ib)\circ(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

$$(۳+۲i)\circ(۵-۳i) = (۱۵+۶)+(-۹+۱۰)i = ۲۱+i$$

$$(۱+i)(۳+۴i) = (۳-۴)+(۴+۳)i = -۱+۷i$$

تعریف (گروه) فرض کنید که F یک مجموعه ناتهی باشد و $*$ یک عمل دوتایی روی مجموعه F باشد زوج $(F,*)$ را یک گروه نامیم (یا F همراه با عمل دوتایی روی F مانند $*$ را یک گروه می نامیم) هرگاه هر سه شرط زیر برقرار باشد.

۱) $*$ روی F شرکت پذیر باشد یعنی $\quad \forall a,b,c\in F \quad (a*b)*c = a*(b*c)$

۲) وجود عضو خنثی e در F : $\quad \forall a\in F\ \exists e\in F \quad a*e=e*a=a$

۳) وجود عضو قرینه (متقابل یا وارون) در F $\quad \forall a\in F\ \exists a'\in F \quad a*a'=a'*a=e$

در شرط (۲) عضو e در F را عضو خنثی و در شرط (۳) عضو a' در F را عضو متقابل (وارون یا قرینه) a در F می‌نامیم. به عبارت دیگر باید در F عضو خنثی وجود داشته باشد و همچنین هر عضو a از F عضو متقابل مانند a' در F داشته باشد.

مثال ۳: $(\mathbb{Z},+)$ یک گروه است به عبارت دیگر $\mathbb{Z}$ تحت عمل جمع یک گروه است
همچنین $(\mathbb{Q},+)$ و $(\mathbb{R},+)$ و $(\mathbb{C},+)$ گروه هستند.

قرارداد: به جای $(\mathbb{Z},+)$ و $(\mathbb{Q},+)$ و $(\mathbb{R},+)$ و $(\mathbb{C},+)$ می‌گوییم گروههای جمعی $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$. (یعنی این چهار مجموعه تحت عمل جمع گروه هستند)

مثال ۴: $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ و $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ و $(\mathbb{C}-\{0\},\cdot)$ گروه می‌باشند
عضو خنثی این سه گروه عدد ۱ می‌باشد و عضو وارون a در این سه گروه $a' = \frac{1}{a}$ است

قرارداد: این سه گروه را گروه ضربی $\mathbb{Q}^*$ و $\mathbb{R}^*$ و $\mathbb{C}^*$ می‌نامیم و می‌خوانیم گروه ضربی $\mathbb{Q}^*$ و گروه ضربی $\mathbb{R}^*$ و گروه ضربی $\mathbb{C}^*$ (توجه $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}-\{0\}$ و $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$ و $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$)

توجه: وارون عضو $z=a+ib$ در گروه ضربی $\mathbb{C}^*$ به صورت زیر است.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

راهنمایی: $\bar{z}=a-ib$ مزدوج z است و همچنین

$$z\cdot\bar{z} = a^2+b^2$$

تعریف (گروه جابجایی) گروه $(F,*)$ را یک گروه جابجایی (آبلی) می‌نامیم هرگاه $*$ روی F خاصیت جابجایی داشته باشد یعنی:

$$\forall a,b\in F \quad : \quad a*b=b*a$$

مثال ۵: گروههای جمعی $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ گروه آبلی یا جابجایی هستند. همچنین گروههای ضربی $\mathbb{Q}^*$ و $\mathbb{R}^*$ و $\mathbb{C}^*$ آبلی یا جابجایی هستند.

تعریف (میدان یا هیأت) فرض کنید که F یک مجموعه ناتهی و جمع $+$ و ضرب "$\cdot$" دو عمل دوتایی روی F باشند
سه تایی $(F,+,\cdot)$ را یک میدان (هیات) نامیم هرگاه هر سه شرط زیر برقرار باشند

الف) $(F,+)$ یک گروه آبلی باشد ب) $(F-\{0\},\cdot)$ یک گروه آبلی باشد

ج) عمل ضرب روی عمل جمع توزیع پذیر باشد یعنی

$$\forall a,b,c\in F$$

$$a(b+c)=ab+ac \quad \text{و} \quad (b+c)a=ba+ca$$

قرارداد: به جای میدان $(F, +, \circ)$ می گوییم میدان F (یعنی از نام دو عمل دوتایی روی F صرف نظر می کنیم)

مثال ۶: $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ هر سه میدان (هیات) هستند.

مثال ۷: $\mathbb{Z}$ یک میدان نیست زیرا $(\mathbb{Z}-\{0\}, \circ)$ یک گروه نیست به عبارت دیگر هر عضو a از $\mathbb{Z}$ وارون ضربی ندارد ($2 \in \mathbb{Z}$ ولی $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$)

توجه: میدان های وجود دارد که در عمل دوتایی آنها جمع و ضرب معمولی نیست (مثال زیر)

مثال ۸: فرض کنید که p یک عدد اول دلخواه باشد. اگر m یک عدد صحیح دلخواه ($m \in \mathbb{Z}$) باشد از تقسیم m بر عدد اول p دو حالت پیش می آید یا m بر p قابل قسمت است که در این صورت باقی مانده تقسیم عدد m بر p صفر است یا m بر عدد p قابل قسمت نیست که باقیمانده تقسیم m بر p عدد صفر نیست

حال مجموعه تمام باقی مانده های تقسیم عدد دلخواه (هر عدد دلخواه) m بر p را با $\mathbb{Z}_p$ نمایش می دهیم و

$$\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$$

برای نمونه اگر $p=2$ آنگاه $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ زیرا هر عدد صحیح دلخواه m بر عدد ۲ تقسیم کنیم باقیمانده عدد ۰ یا عدد ۱ می شود.

اگر $p=3$ در این صورت $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

اگر $p=5$ در این صورت $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

حال روی $\mathbb{Z}_p$ دو عمل جمع باقی مانده ای $\oplus$ و ضرب باقی مانده ای $\odot$ با صورت زیر تعریف می کنیم در این صورت $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$ یک میدان می شود.

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p \quad \bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b} \quad \text{و} \quad \bar{a} \odot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

یعنی در جمع باقی مانده ای $\oplus$ برای محاسبه $\bar{a} \oplus \bar{b}$ اول $\bar{a} + \bar{b}$ را حساب می کنیم سپس $a+b$ را بر p تقسیم می کنیم و باقی مانده آن $\overline{a+b}$ جواب $\bar{a} \oplus \bar{b}$ است

و در ضرب باقی مانده ای $\odot$ برای محاسبه $\bar{a} \odot \bar{b}$ اول $\bar{a} \cdot \bar{b}$ را حساب می کنیم و سپس $\bar{a} \cdot \bar{b}$ را بر p تقسیم می کنیم و باقی مانده این تقسیم جواب $\bar{a} \odot \bar{b}$ است.

برای نمونه در میدان $\mathbb{Z}_5$: $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$\bar{2} \odot \bar{3} = \bar{1}$ [$\bar{2} \cdot \bar{3} = 6 \Rightarrow \bar{1} =$ باقی مانده تقسیم عدد ۶ بر ۵]

$\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$ [$\bar{2} + \bar{3} = 5 \Rightarrow \bar{0} =$ باقی مانده تقسیم ۵ بر ۵]

توجه: اگر p عددی اول نباشد آنگاه $\mathbb{Z}_p$ میدان نیست. برای نمونه $\mathbb{Z}_4=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$

عدد $\bar{2}$ وارون ضربی در $\mathbb{Z}_4$ ندارد زیرا $\bar{2}\odot\bar{0}=\bar{0}$, $\bar{2}\odot\bar{1}=\bar{2}$, $\bar{2}\odot\bar{2}=\bar{0}$ و $\bar{2}\odot\bar{3}=\bar{2}$

یعنی عددی مانند $\bar{a}$ در $\mathbb{Z}_4$ پیدا نمی‌شود که $\bar{2}\odot\bar{a}=\bar{1}$.

توجه: اگر p عددی اول باشد آنگاه میدان $\mathbb{Z}_p$ یک میدان متناهی است و کوچکترین میدان متناهی $\mathbb{Z}_2$ است و $\mathbb{Z}_3$ میدان متناهی بعداز $\mathbb{Z}_2$ است و به همین صورت.

و میدان های $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ میدانهای نامتناهی هستند و کوچکترین میدان نامتناهی میدان $\mathbb{Q}$ است.

سوال: آیا میدان نامتناهی دیگری غیر از $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ وجود دارد؟

جواب مثبت است، مثال زیر

مثال ۹: اگر p یک عدد اول باشد آنگاه $(\mathbb{Q}(\sqrt{p}),+,\odot)$ یک میدان نامتناهی است که در آن

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p})=\{a+b\sqrt{p}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$$

مانند $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ و ...

مثال ۱۰: اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند آنگاه $(\mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q}),+,\odot)$ یک میدان است که در آن

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})=\mathbb{Q}(\sqrt{pq})=\{a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}\mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}$$

مانند:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{6})=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{10})=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}\mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}$$

نتیجه و تعمیم: اگر p و q و s سه عدد اول دو به دو متمایز باشند آنگاه $\mathbb{Q}(\sqrt{pqs})=\mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{s})$ یک میدان است و:

$$\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$$

$$\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{3})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{7})$$

یعنی $\mathbb{Q}$ کوچکترین میدان در بین میدان های نامتناهی است.

مطالب اضافی جهت مطالعه دانشجویان فنی و مهندسی.

مطالب زیر را می‌توان در کتاب‌های جبر یافت و مطالعه کرد (جبر یکی از شاخه‌های ریاضیات است)

۱- در هر گروه عضو خنثی منحصر به فرد است.

۲- در هر گروه عضو متقابل (وارون - قرینه) هر عضو منحصر به فرد است

۳- در هر گروه قوانین حذف چپ و راست برقرار است. یعنی در گروه $(F,*)$ داریم

$$a*x=b*x \Rightarrow a=b$$
$$x*a=x*b \Rightarrow a=b$$

۴- در هر گروه، هر معادله به صورت $a*x=b$ جواب منحصر به فرد دارد.

توجه: در چهار مطلب بالا به جای گروه می‌توان از میدان استفاده کرد.

دیدیم که: $Z_n=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\dots,\overline{n-1}\}$

توجه: $(Z_n,\oplus)$ همواره یک گروه است ولی $(Z_n,\oplus,\odot)$ همواره یک میدان نیست. (اگر n عددی اول باشد $(Z_n,\oplus,\odot)$ یک میدان می‌شود)

اگر n اول باشد. $(Z_n-\{\bar{0}\},\odot)$ یک گروه است ولی اگر n اول نباشد آنگاه $(Z_n-\{\bar{0}\},\odot)$ گروه نیست.

توجه: به Z_{12} دقت کنید:

$$Z_{12}=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\bar{9},\overline{10},\overline{11}\}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\bar{3}\odot\bar{4}=\bar{0} & \bar{9}\odot\bar{8}=\bar{0}\\ \bar{2}\odot\bar{6}=\bar{0} & \\ \bar{4}\odot\bar{6}=\bar{0} & \\ \bar{3}\odot\bar{8}=\bar{0} & \\ \bar{6}\odot\overline{10}=\bar{0} & \\ \bar{6}\odot\bar{8}=\bar{0} & \end{array}\right\} \not\Rightarrow \begin{array}{lll}\bar{2}=\bar{0} & \bar{4}=\bar{0} & \bar{8}=\bar{0}\\ \bar{3}=\bar{0} & \bar{6}=\bar{0} & \bar{9}=\bar{0}\end{array}$$

چون Z_{12} میدان نیست (Z_{12}^* تحت ضرب گروه نیست) یعنی حکم ۴ بالا در غیر میدان نمی‌تواند برقرار باشد.

تمرین:

۱- در $\mathbb{Q}^+$ عمل $*$ را با $a*b=\frac{ab}{2}$ تعریف کنید. نشان دهید که $(\mathbb{Q}^+,*)$ یک گروه آبلی است.

۲- فرض کنید که $S=\mathbb{R}-\{-1\}$ روی S عمل $*$ را با صورت $a*b=a+b+ab$ تعریف کنید. نشان دهید که $(S,*)$ یک گروه است. و معادله $2*x*3=7$ را حل کنید.

۳- روی [illegible] $=\mathbb{R}-\{0\}$ عمل $*$ را با صورت $a*b=|a|b$ تعریف کنید آیا $([illegible],*)$ یک گروه است.

۴- اگر F یک گروه متناهی باشد و $*$ یک عمل دوتایی روی F باشد می‌توان برای گروه $(F,*)$ یک جدول مانند زیر مرتب کرد که در آن $a*b$ برای هر دو عضو a و b از F مانند جدول ضرب معین کرد

$F=\mathbb{Z}_2 \Rightarrow$

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$F=\{e,a\} \Rightarrow$

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

$F=\{-1,1\} \Rightarrow$

$\cdot$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

اگر F دارای ۳ عضو باشد جدول آن با چه صورت است؟ برای $F=\mathbb{Z}_3$ و $F=\{e,a,b\}$ امتحان کنید (e عضو خنثی در نظر بگیرید)

۵- با حل معادله $z^3=1$ در اعداد مختلط آیا می‌توانید یک گروه ۳ عضوی بسازید؟

۶- با حل معادله $z^4=1$ در اعداد مختلط آیا می‌توانید یک گروه ۴ عضوی بسازید؟

۷- مجموعه همه ماتریس‌های 2×2 روی $\mathbb{R}$ را با $V=Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. نشان دهید که $(V,+)$ یک گروه آبلی است عمل $+$ همان عمل جمع ماتریس‌ها است.

۸- آیا $(Mat_{m\times n}(\mathbb{R}),+)$ تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد.

فصل اول: دستگاه معادلات خطی و ماتریس و بردار

تعریف (معادله خطی) فرض کنید که F یک میدان باشد، هر معادله به صورت $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b_1$ را یک معادله خطی می‌نامیم که در آن x_1 و x_2 و ... و x_n را مجهولات معادله خطی و a_1 و a_2 و ... و a_n را ضرایب معادله خطی و b_1 که عضوی از F است را مقدار ثابت معادله خطی می‌نامیم. این معادله خطی چون دارای n مجهول می‌باشد را معادله خطی n مجهولی در میدان F می‌نامیم (توجه ضرایب معادله خطی a_1 و a_2 و ... و a_n عضوی از F هستند)

توجه: در یک معادله خطی توان مجهولات عدد یک است و هیچ یک از متغیرها (مجهولات) به صورت توان، در ریشه و لگاریتم و نمایی و مثلثاتی ظاهر نمی‌شوند.

تعریف (جواب معادله خطی) اگر $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b_1$ یک معادله خطی باشد یک جواب این معادله در میدان F یک n تایی به صورت $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ است که $d_1,d_2,\ldots,d_n\in F$ و

$$a_1d_1+a_2d_2+\cdots+a_nd_n=b_1 \quad (1)$$

قرارداد: در این فصل میدان F را برای راحتی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم و در زمان لازم که از میدان دیگری استفاده می‌کنیم آن میدان را ذکر می‌کنیم.

چگونه جواب یک معادله خطی روی میدان $\mathbb{R}$ را پیدا کنیم؟ به عبارت دیگر یک معادله خطی را چگونه حل کنیم؟

برای حل یک معادله خطی مانند معادله (1) سه حالت گوناگون را بررسی می‌کنیم.

<u>حالت نخست</u>: حداقل یکی از ضرایب معادله (1) مخالف صفر باشد مثلاً $a_1\neq 0$ در این صورت می‌توان نوشت

$$x_1=a_1^{-1}(b_1-a_2x_2-\cdots-a_nx_n) \quad \text{یا} \quad x_1=-\frac{1}{a_1}(a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n)+\frac{b_1}{a_1}$$

حال با منظور کردن مقادیر مختلف برای x_2 و x_3 و ... و x_n از میدان $\mathbb{R}$ می‌توان یک مقدار را برای x_1 بدست آورد.

نمونه (حالات خاص) در معادله خطی یک مجهولی $ax=b$ با فرض $a\neq 0$ داریم $x=\frac{b}{a}$.

در معادله خطی دو مجهولی $ax+by=c$ با فرض $a\neq 0$ داریم $x=\frac{1}{a}(c-by)$ که در آن می‌توان y را دلخواه فرض کرد مثلاً $y=t$ در این صورت جواب معادله خطی $ax+by=c$ عبارت است از:

$$(x,y)=\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}t\ ,\ t\right) \quad t\in\mathbb{R} \text{ دلخواه}$$

توجه: در ریاضی ۲ دیده‌ایم که معادله $ax+by=c$ معادله یک خط در $\mathbb{R}^2$ است و بی‌نهایت جواب دارد.

مثال ۱: مجموعه جواب معادلات خطی الف) $3x-2y=2$ ب) $2x-4y+z=8$ را بیابید.

حل الف) با فرض $y=t$ داریم $x=\frac{2}{3}(1-t)$ یعنی مجموعه جواب معادله خطی $2=2y-3x$ عبارت است از : $(x,y)=(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}t \,,\, t)$ که در آن $t\in\mathbb{R}$

ب) با فرض $x=t$ و $y=s$ داریم $z=8-2t+4s$ بنابراین مجموعه جواب معادله خطی $8=2x-4y+z$ عبارت است از : $(x,y,z)=(t,s,8-2t+4s)$ $(\forall t,s\in\mathbb{R})$

حالت دوم: همه ضرایب معادله خطی (۱) برابر با صفر باشند ولی مقدار ثابت b_1 مخالف صفر باشد، در این صورت معادله خطی در $\mathbb{R}$ دارای جواب نیست و اصطلاحاً می‌گوییم که معادله ناسازگار است.

حالت سوم: همه ضرایب معادله خطی (۱) برابر با صفر باشد و مقدار ثابت b_1 هم صفر باشد یعنی معادله به صورت $0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=0$ باشد. در این صورت هر n تایی مرتب از $\mathbb{R}$ مثلاً $(d_1,\dots,d_n)$ جواب معادله است.

مثال ۲: معادلات زیر خطی نیستند:

الف) $x-\ln y=0$ ب) $xy+y=1$ ج) $\sqrt{x}+2y+z=1$ د) $y-\cos x=0$

تعریف (دستگاه معادلات خطی) اگر m معادله خطی مشابه به معادله (۱) را با هم در نظر بگیریم به آن یک دستگاه m معادله و n مجهول خطی می‌نامیم. این دستگاه m معادله و n مجهول خطی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (2)$$

اگر در دستگاه معادله (۲) تمام مقدار ثابت برابر با صفر باشد یعنی $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ در این صورت این دستگاه را یک دستگاه معادلات خطی همگن می‌نامیم.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \qquad (3)$$

n تایی $d=(d_1,d_2,\dots,d_n)$ را یک جواب دستگاه (۲) نامیده می‌شود اگر این جواب در هر یک از معادله‌های خطی دستگاه (۲) صدق کند، $d_1,d_2,\dots,d_n\in\mathbb{R}$

مثال ۳: سه تایی $d=(1,2,-1)$ یک جواب دستگاه معادلات
$$\begin{cases} 4x-y+3z=-1 \\ 3x+y+9z=-4 \end{cases}$$
است ولی سه تایی $e=(1,8,1)$ جواب این دستگاه نیست هر چند که در معادله اول دستگاه صدق می‌کند ولی در معادله دوم دستگاه صدق نمی‌کند.

در این فصل به سؤالات زیر پاسخ داده می‌شود.

سؤال (۱) در چه صورت دستگاه معادلات (۲) و (۳) دارای جواب است؟

سؤال (۲) در چه صورت دستگاه معادلات (۲) و (۳) دارای بی‌شمار جواب است؟

سؤال (۳) در چه صورت دستگاه معادلات (۲) دارای جواب نیست؟

توجه: همواره n تایی $0=(0,0,\dots,0)$ جواب دستگاه همگن (۳) است. لذا سؤال (۳) را برای دستگاه همگن به صورت زیر بیان می‌کنیم

سؤال (۴): در چه صورت دستگاه همگن (۳) دارای جواب غیر صفر است؟ (اگر جواب صفر را جواب بدیهی دستگاه همگن نامگذاری کنیم، در چه صورت دستگاه همگن (۳) دارای جواب نابدیهی است)

سؤال (۵) در چه صورت دستگاه همگن (۳) فقط جواب بدیهی صفر دارد؟

از همه مهمتر: چگونه دستگاه معادلات خطی (۲) و (۳) را حل کنیم به عبارت دیگر روشهای حل یک دستگاه معادلات خطی چگونه است.

برای پاسخ به سؤالات بالا در این فصل لازم است که با ماتریس و دترمینان ماتریس و بردار آشنا باشیم و به کمک ماتریس و بردار می‌توان برخی از روشهای حل دستگاه معادلات خطی را بیان کرد.

تعریف (ترکیب خطی معادلات) اگر معادلات دستگاه (۲) را به ترتیب در c_1 و c_2 و ... و c_m ضرب کنیم ($c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$) و سپس آنها را با هم جمع کنیم به معادله زیر می‌رسیم و این معادله را ترکیب خطی از معادلات دستگاه (۲) می‌نامیم.

$$(c_1a_{11}+c_2a_{21}+\dots+c_ma_{m1})x_1+(c_1a_{12}+c_2a_{22}+\dots+c_ma_{m2})x_2+\dots+$$
$$+(c_1a_{1n}+c_2a_{2n}+\dots+c_ma_{nm})x_n=c_1b_1+c_2b_2+\dots+c_mb_m$$

تعریف (دو دستگاه هم‌ارز) دو دستگاه معادلات خطی n مجهولی را هم‌ارز می‌نامیم هرگاه هر معادله در یک دستگاه معادلات، ترکیب خطی از معادلات دستگاه دیگر باشد.

مثال ۴: دو دستگاه معادلات خطی زیر هم‌ارز هستند:

الف) $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x-4y=-1 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$

زیرا معادله اول دستگاه (ب) از تفریق دو معادله دستگاه (الف) بدست می‌آید و معادله دوم دستگاه (ب) از جمع دو معادله دستگاه (الف) بدست می‌آید.

$$(2x-y)-(x+3y)=3-4 \Longrightarrow \begin{cases} x-4y=1 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$$
$$(2x-y)+(x+3y)=3+4 \Longrightarrow$$

همچنین معادله اول دستگاه (الف) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$-\frac{1}{2}(x-4y)+\frac{1}{2}(3x+2y)=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(7) \Longrightarrow x+3y=4$$

و معادله دوم دستگاه (ب) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{2}(x-4y)+\frac{1}{2}(3x+2y)=\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(7) \Longrightarrow 2x-y=3$$

قضیه (۱): جوابهای دو دستگاه معادلات خطی هم‌ارز یکی هستند.

اولین روش حل دستگاه معادلات خطی (روش حذف پلکانی):

برای حل دستگاه معادلات خطی به کمک ترکیب خطی این دستگاه را به یک دستگاه هم‌ارز که حل آن ساده‌تر است تبدیل می‌کنیم. برای راحتی به کمک سه عمل زیر دستگاه معادلات خطی را به یک دستگاه معادله خطی که به صورت پلکانی مرتب می‌شود و تعداد زیادی از ضرایب مجهولات صفر است تبدیل می‌کنیم.

عمل ۱: ضرب کردن معادله‌ای در یک عدد ثابت، غیر صفر

عمل ۲: تعویض کردن دو معادله با هم در یک دستگاه معادلات خطی

عمل ۳: افزودن مضربی از یک معادله به معادله دیگر

برای درک این روش به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۵: دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$$

حل: معادلات این دستگاه را با E_1 و E_2 و سوم E_3 شماره گذاری می‌کنیم.

$$\begin{cases} E_1: x+y+2z=9 \\ E_2: 2x+4y-3z=1 \\ E_3: 3x+6y-5z=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{نمی‌دهیم یعنی } E_1\to E_1]{\text{معادله اول را تغییر}} \text{ و } \begin{matrix} -2E_1+E_2\to E_2 \\ -3E_1+E_3\to E_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 0x+2y-7z=-17 \\ 0x+3y-11z=-27 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{در دستگاه جدید}]{\text{معادله اول تغییر نمی‌دهیم}} \begin{matrix} E_1\to E_1 \\ E_2\to E_2 \\ -\frac{3}{2}E_2+E_3\to E_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2y-7z=-17 \\ -\frac{1}{2}z=-\frac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{z=3}$$

جایگذاری در معادله (۲): $2y-21=-17 \Longrightarrow 2y=4 \Longrightarrow \boxed{y=2}$

مقدار $z=3$ و $y=2$ را در معادله اول قرار می‌دهیم و $x=1$ را بدست می‌آوریم

$$x+y+2z=9 \Rightarrow x+2+6=9 \Rightarrow x=9-8=1 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

بنابراین جواب دستگاه $x=1$ و $y=2$ و $z=3$ است.

مثال ۶: دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x+y-2z+3t=1 \\ 3x+2y-z+2t=4 \\ 3x+3y+3z-3t=5 \end{cases}$$

حل: در مرحله اول از عمل های $E_1 \to E_1$ و $(E_2-\frac{3}{2}E_1)\to E_2$ و $(E_3-\frac{3}{2}E_1)\to E_3$ استفاده می‌کنیم، داریم

$$\begin{cases} 2x+y-2z+3t=1 \\ \frac{1}{2}y+2z-\frac{5}{2}t=\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2}y+6z-\frac{15}{2}t=\frac{7}{2} \end{cases} \xrightarrow[\substack{2E_2\to E_2 \\ (E_3-3E_2)\to E_3}]{E_1\to E_1} \begin{cases} 2x+y-2z+3t=1 \\ y+4z-5t=5 \\ 0=-4 \end{cases} \quad (*)$$

چون $0=-4$ غیرقابل قبول است پس دستگاه $(*)$ ناسازگار است پس دستگاه داده شده در مثال ناسازگار است و جواب ندارد.

مثال ۷: دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \\ 2x+6y+2z=22 \end{cases}$$

حل: در مرحله اول از عمل های $E_1\to E_1$ و $(E_2-E_1)\to E_2$ و $(E_3-2E_1)\to E_3$ و $(E_4-2E_1)\to E_4$ داریم

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+4z=7 \\ y+2z=5 \\ 2y+8z=14 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2\to E_2 \\ (E_3-E_2)\to E_3}]{E_1\to E_1 \text{ و } (E_4-2E_1)\to E_4} \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+4z=7 \\ -2z=-2 \\ 0=0 \end{cases}$$

معادله چهارم اضافی است زیرا $0=0$ نشان می‌دهد که معادله چهارم ترکیب خطی سه معادله دیگر دستگاه است.

$$-2z=-2 \Rightarrow \boxed{z=1} \quad \text{و} \quad y+4\times1=7 \Rightarrow \boxed{y=3} \quad \text{و} \quad x+2\times3-3\times1=4 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

بنابراین $\boxed{x=1}$ و $\boxed{y=3}$ و $\boxed{z=1}$ جواب دستگاه می‌باشد.

مثال ۸: دستگاه معادله های خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x+2y-2z+3t=2 \\ 2x+4y-3z+4t=5 \\ 5x+10y-8z+11t=12 \end{cases}$$

حل: در مرحله اول عمل های $E_1\to E_1$ و $(E_2-2E_1)\to E_2$ و $(E_3-5E_1)\to E_3$ داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z+3t=2 \\ z-2t=1 \\ 2z-4t=2 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2\to E_2 \\ (E_3-2E_2)\to E_3}]{E_1\to E_1} \begin{cases} x+2y-2z+3t=2 \\ z-2t=1 \\ 0=0 \end{cases}$$

معادله سوم ترکیب خطی از دو معادله اول در دستگاه می‌باشد بنابراین باید دستگاه

$$\begin{cases} x+2y-2z+3t=2 \\ z-2t=1 \end{cases}$$

را حل کنیم: چون تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات است پس دستگاه بی‌نهایت جواب دارد. با قرار دادن $y=b$ و $t=d$ به عنوان پارامتر داریم $\boxed{z=1+2d}$ و $\boxed{x=4-2b+d}$ که در آن $b, d \in \mathbb{R}$ دلخواه هستند.

حل دستگاه معادلات خطی همگن

قضیه ۴: در هر دستگاه معادله‌های خطی همگن، اگر تعداد مجهول‌های آن بیشتر از تعداد معادله‌های آن باشد، آنگاه آن دستگاه معادله‌های خطی همگن، دارای جواب غیر بدیهی (یعنی جواب غیر صفر) است.

به کمک قضیه قبل و روش حذف پلکانی به راحتی می‌توان دستگاه معادلات خطی همگن را حل کرد.

مثال ۹: دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ x-4y+2z=0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(E_2-2E_1)\to E_2 \\ (E_3-E_1)\to E_3}]{E_1\to E_1} \begin{cases} x+y-z=0 \\ -5y+3z=0 \\ -5y+3z=0 \end{cases} \xrightarrow[(E_3-E_2)\to E_3]{E_1\to E_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -5y+3z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -5y+3z=0 \end{cases}$$

دستگاه جواب غیرصفر دارد و بی‌نهایت جواب دارد.

با فرض $\boxed{y=b}$ داریم $\boxed{z=\frac{5}{3}b}$ و $x=z-y=\frac{5}{3}b-b \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{3}b}$ که در آن $b\in\mathbb{R}$ دلخواه است.

مثال ۱۰: دستگاه معادلات خطی همگن زیر را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+4y-z=0 \\ 3x+2y+2z=0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(E_2-2E_1)\to E_2 \\ (E_3-3E_1)\to E_3}]{E_1\to E_1} \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y+z=0 \\ -y+5z=0 \end{cases} \xrightarrow[E_2\to E_2]{E_1\to E_1} (E_2+2E_3)\to E_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y+z=0 \\ 11z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

دستگاه فقط جواب بدیهی دارد.

تمرین: دستگاه‌های زیر را حل کنید.

۱) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+2z=1 \\ x-3y+4z=2 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 5x+4y+3z=2 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x+5y+2z=0 \\ 3x-y-4z=0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+5y+2z=0 \\ x+4y+7z=0 \\ x+3y+3z=0 \end{cases}$

۵) $\begin{cases} x-2y+3z-2t=0 \\ 3x-7y-2z+4t=0 \\ 4x+3y+5z+2t=0 \end{cases}$

۶- مقدار a را طوری معین کنید که دستگاه $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z=2 \end{cases}$ سازگار باشد.

۷- a و b و c را طوری معین کنید که دستگاه $\begin{cases} x-2y+7z=a \\ x+2y-3z=b \\ 2x+6y-11z=c \end{cases}$ جواب منحصر بفرد داشته باشد.

۸- مقدار a و b و c و d را طوری معین کنید که دستگاه مقابل سازگار باشد.

$$\begin{cases} 2x+3y-z+t=a \\ x+5y+z-2t=b \\ -x+2y+2z-3t=c \\ 3x+y-3z+4w=d \end{cases}$$

ماتریس و دترمینان ماتریس و کاربرد آن در حل دستگاه معادلات خطی

تعریف (ماتریس) یک آرایش مستطیل شکل از عددهای حقیقی که در m سطر و n ستون به صورت زیر مرتب شده باشد را یک ماتریس روی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می نامیم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس ها را با حروف بزرگ انگلیسی A و B و C و ... نمایش می دهیم. ماتریس A را از مرتبه $m\times n$ می نامیم چون دارای m سطر و n ستون است. به هریک از اعداد داخل ماتریس یعنی a_{ij} ها را یک درایه ماتریس می نامیم.

برای راحتی ماتریس A را می توان با $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نشان داد که در آن $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$

تعریف (تساوی دو ماتریس) دو ماتریس $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ را مساوی نامیم و می نویسیم $A=B$ هرگاه هر دوی A و B هم مرتبه باشند و درایه های نظیر به نظیر آنها باهم برابر باشند یعنی $a_{ij}=b_{ij}$ برای هر i و j.

جمع و تفریق دو ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ دو ماتریس هم مرتبه باشند آنگاه

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}] \quad \text{و} \quad A-B=[a_{ij}-b_{ij}]$$

ضرب اسکالر یک ماتریس (ضرب عدد در ماتریس) اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس روی میدان F باشد و $k\in F$ (برای راحتی $F=\mathbb{R}$) آنگاه kA هم یک ماتریس است که هم مرتبه A است و $kA=[ka_{ij}]$.

مثال ۱: اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۲ \\ -۷ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & -۶ \end{bmatrix}$ آنگاه $3A$ و $A+B$ و $2A-3B$ را به دست آورید.

حل.

$$3A=\begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۶ \\ -۲۱ & ۳ & ۲۴ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A+B=\begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۵ \\ -۳ & ۶ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$2A-3B=\begin{bmatrix} ۶ & ۰ & ۴ \\ -۱۴ & ۲ & ۱۶ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & -۶ & ۹ \\ ۱۲ & ۱۵ & -۱۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ & -۵ \\ -۲۶ & -۱۳ & ۳۴ \end{bmatrix}$$

قرارداد و تعریف (ماتریس صفر) ماتریسی که تمام درایه های آن صفر باشد را ماتریس صفر می نامیم و با O نمایش می دهیم.

قضیه ۳: اگر مجموعه تمام ماتریس های $m\times n$ روی $\mathbb{R}$ را با $V=MAT_{m\times n}(\mathbb{R})$ نمایش دهیم آنگاه $(V,+)$ یک گروه آبلی است (+ عمل جمع دو ماتریس است)

تعریف (ضرب دو ماتریس) اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ آنگاه ضرب این دو ماتریس به صورت AB برابر است با ماتریس $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ که درایه های ماتریس C به صورت $c_{ij}=\sum_{r=1}^{p} a_{ir}b_{rj}$ محاسبه می گردد. یعنی درایه ی سطر i و ستون j ام ماتریس C، بدین گونه به دست می آید که درایه های سطر i ام ماتریس A را در درایه های متناظر ستون j ام ماتریس B ضرب و با یکدیگر جمع می کنیم

توجه: برای تعریف شدن AB باید تعداد ستون های ماتریس A و تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد.

مثال ۲: حاصل ضرب های زیر را بدست آورید

الف) $\begin{bmatrix}2&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix}=2\times(-1)+3\times2+4\times5=-2+6+20=24$

ب) $\underset{2\times3}{\begin{bmatrix}3&-1&2\\1&0&4\end{bmatrix}}\underset{3\times1}{\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}}=\underset{2\times1}{\begin{bmatrix}3\times3+(-1)\times0+2\times3\\1\times3+0\times0+4\times3\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}15\\15\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}1&5\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&6\\0&8\end{bmatrix}=\underset{2\times2}{\begin{bmatrix}1\times4+5\times0&1\times6+5\times8\\3\times4+1\times0&3\times6+1\times8\end{bmatrix}}=\underset{2\times2}{\begin{bmatrix}4&46\\12&26\end{bmatrix}}$

د) $\begin{bmatrix}4&6\\0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&5\\3&1\end{bmatrix}=\underset{2\times2}{\begin{bmatrix}4\times1+6\times3&4\times5+6\times1\\0\times1+8\times3&0\times5+8\times1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}22&26\\24&8\end{bmatrix}$

$\Rightarrow AB\neq BA$

قضیه ۴: اگر A و B و C سه ماتریس باشند به طوری که جمع و ضرب های زیر تعریف شدنی باشد و k یک اسکالر $(k\in\mathbb{R})$ باشد آنگاه

الف) $(AB)C=A(BC)$ خاصیت شرکت پذیری ضرب ماتریس ها

ب) $A[B\pm C]=AB\pm AC$

ج) $(B\pm C)A=BA\pm CA$

خاصیت توزیع پذیری ضرب روی جمع و تفریق

د) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

مثال ۳: اگر $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}2&5\\3&4\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}3&7\\0&0\end{bmatrix}$ نشان دهید $AB=AC$ و $AD=0$

حل:

$AB=\begin{bmatrix}3&4\\6&8\end{bmatrix}=AC$ و $AD=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

نتیجه مثال ۳: $AB=AC \not\Rightarrow B=C$ و $AD=0 \not\Rightarrow A=0$ یا $D=0$

تعدادی از ماتریس های خاص که در جبر خطی کاربرد دارند

۱- ماتریس ترانهاده (ترانسپوزه) ترانهاده ماتریس $A_{m\times n}$ را با $A^T_{n\times m}$ یا $A'_{n\times m}$ نمایش می دهیم و A^T ماتریسی است که از تبدیل سطرهای ماتریس A به ستون (یا ستونها به سطر) بدست می آید

مثال ۴: $A=\begin{bmatrix}1&2&5\\6&-1&3\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1&6\\2&-1\\5&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} \Rightarrow B^T=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$

قضیه ۵: اگر A و B دو ماتریس باشند بطوری که جمع و تفریق زیر تعریف شوند و K یک اسکالر باشد آنگاه

الف) $(A+B)^T=A^T+B^T$ ب) $(A-B)^T=A^T-B^T$ ج) $(A^T)^T=A$

د) $(KA)^T=KA^T$ ذ) $(AB)^T=B^TA^T$

۲- ماتریس سطری و ستونی (بردار)

ماتریس $1\times n$ را ماتریس سطری نامیده می شود (ماتریسی که فقط از یک سطر تشکیل شده باشد).

ماتریس $m\times 1$ را ماتریس ستونی نامیده می شود (ماتریسی که فقط از یک ستون تشکیل شده باشد).

به ماتریس سطری (یا ستونی) بردار هم گفته می شود.

$A=\begin{bmatrix}2&3&4&5\end{bmatrix}_{1\times 4}$ ماتریس سطری

$B=\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}_{3\times 1}$ ماتریس ستونی

۳- ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستونهای آن برابر باشد ماتریس مربعی نامیده می شود.

ماتریسی که دارای n سطر و n ستون باشد ماتریس مربعی از مرتبه n نامیده می شود

اگر $A_{n\times n}=[a_{ij}]$ یک ماتریس مربعی باشد در این صورت به درایه های a_{11} و a_{22} و ... و a_{nn} اعضای قطر اصلی ماتریس مربعی A گفته می شود همچنین به درایه های a_{1n} و $a_{2(n-1)}$ و $a_{3(n-2)}$ و ... و a_{n1} اعضای قطر فرعی ماتریس مربعی A گفته می شود.

قطر اصلی

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&&\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

قطر فرعی

قطر اصلی

$$A=\begin{bmatrix}3&4&6\\5&6&1\\7&-1&2\end{bmatrix}$$

قطر فرعی

تعریف (اثر) در یک ماتریس مربعی به مجموع عنصرهای قطر اصلی ماتریس را اثر آن ماتریس گفته می شود و یا $Trace(A)=Tr(A)$ نشان داده می شود

$$Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=\underbrace{a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}}$$

۴- ماتریس قطری و ماتریس همانی و ماتریس بالا مثلثی و ماتریس پایین مثلثی

ماتریس مربعی که تمام عنصرهای آن، بغیر از عنصرهای روی قطر اصلی، همگی صفر باشند را ماتریس قطری نامیده می‌شود و ماتریس قطری را با D نمایش داده می‌شود.

ماتریس قطری که همه عنصرهای قطر اصلی آن همگی عدد ۱ باشند را ماتریس همانی یا ماتریس واحد نامیده می‌شود و ماتریس واحد (همانی) را با I نمایش داده می‌شود.

توجه: اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد و $I_{n \times n}$ ماتریس همانی باشد آنگاه $AI = IA = A$

و $I = I^k = \underbrace{I \times I \times \cdots \times I}_{k \text{ بار}}$

ماتریس مربعی که تمام درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس بالا مثلثی می‌نامیم و ماتریس پایین مثلثی، ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشد.

مثال ۵)

$$I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad D_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$ ماتریس پایین مثلثی

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ ماتریس بالا مثلثی

۵- ماتریس متقارن ـ ماتریس پادمتقارن (کج متقارن)

ماتریس مربعی A را متقارن نامیم هرگاه $A^T = A$ و ماتریس مربعی A را پادمتقارن نامیم هرگاه $A^T = -A$.

توجه: در ماتریس متقارن، درایه‌های بالای قطر اصلی و پایین قطر اصلی در مکان‌های متناظر با هم برابر هستند یعنی $a_{ij} = a_{ji} \quad (\forall i, j)$

در ماتریس پادمتقارن $a_{ij} = -a_{ji} \quad (\forall i, j)$ و تمام درایه‌های قطر اصلی صفر است.

مثال ۱۵: $A=\begin{bmatrix}3&4&5\\4&0&6\\5&6&2\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=A \Rightarrow$ A ماتریس متقارن

$B=\begin{bmatrix}0&-3&4\\3&0&2\\-4&-2&0\end{bmatrix} \Rightarrow B^T=\begin{bmatrix}0&3&-4\\-3&0&-2\\4&2&0\end{bmatrix}=-B \Rightarrow$ B ماتریس پادمتقارن

قضیه ۱۶: برای هر ماتریس داده شده A ماتریس های A^TA و AA^T متقارن هستند.
زیرا $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$ و $(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$

قضیه ۱۷: هر ماتریس مربعی دلخواه را می‌توان به صورت مجموع دو ماتریس که یکی متقارن و دیگری پادمتقارن نوشت. زیرا $\frac{1}{2}(A+A^T)$ متقارن و $\frac{1}{2}(A-A^T)$ پادمتقارن
بنابراین

$$A=\left[\frac{1}{2}(A+A^T)\right]+\left[\frac{1}{2}(A-A^T)\right]$$

مثال ۱۷: ماتریس مربعی $A=\begin{bmatrix}3&1&2\\2&1&3\\1&2&1\end{bmatrix}$ را به صورت مجموع دو ماتریس که یکی متقارن و دیگری پادمتقارن بنویسید.

حل:

$$A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)=\underbrace{\begin{bmatrix}3&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&1&\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&1\end{bmatrix}}_{\text{متقارن}}+\underbrace{\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}}_{\text{پادمتقارن}}$$

۶- ماتریس ریشه چند جمله‌ای: اگر A ماتریس مربعی باشد آنگاه برای هر چند جمله‌ای مانند $f(x)$، $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ آنگاه ماتریس $f(A)$ عبارت است از

$$f(A)=a_0I+a_1A+a_2A^2+\dots+a_nA^n$$

اگر $f(A)=0$ می‌گوییم که ماتریس A ریشه چند جمله‌ای $f(x)$ است.

مثال ۱۸: اگر $f(x)=2x^2-3x+5$ و $g(x)=x^2+3x-10$ آنگاه $f(A)$ و $g(A)$ را بدست آورید وقتی که $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&-4\end{bmatrix}$. حل:

$$f(A)=2A^2-3A+5I=\begin{bmatrix}16&-18\\-27&61\end{bmatrix}$$

$$g(A)=A^2+3A-10I=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow$$ A ریشه $g(x)$ است.

Scanned by CamScanner

۷- ماتریس خود توان: ماتریس مربعی A را خود توان نامیم هرگاه $A^2=A$
ماتریس های همانی و ماتریس مربعی صفر خود توان هستند.

قضیه ۸: اگر A یک ماتریس خودتوان باشد آنگاه ماتریس $I-A$ خود توان است

اثبات:
$$(I-A)^2=(I-A)(I-A)=I^2-IA-AI+A^2=I-2A+A=I-A$$

۸- ماتریس خود الحاقی (هرمیتی) ماتریس مربعی $n\times n$ روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ را خود الحاقی (هرمیتی) نامیم هرگاه $(\bar{A})^T=A$ یا عبارت دیگر برای هر i,j داشته باشیم $a_{ji}=\bar{a}_{ij}$ که در آن $\bar{a}_{ij}$ مزدوج a_{ij} است.

قضیه ۹: ماتریس 2×2 هرمیتی است اگر و فقط اگر A به صورت $\begin{bmatrix} c & a+ib \\ a-ib & d \end{bmatrix}$ باشد که در آن a و b و c و d اعداد حقیقی هستند.

تبصره: ماتریس های خاص دیگری هم وجود دارد که بعد از دترمینان ماتریس معرفی می شود.

دترمینان ماتریس

به هر ماتریس مربعی، عددی به نام دترمینان نسبت داده می شود و به کمک دترمینان بسیاری از دستگاههای معادلات خطی حل می شود. همچنین به کمک دترمینان می توان معکوس ماتریس مربعی را محاسبه کرد.
روشهای مختلفی برای تعریف دترمینان وجود دارد. یکی از این روشها روش استقرایی است. در این روش ابتدا دترمینان 1×1 و 2×2 و سپس دترمینان ماتریس های $n\times n$ با روش بسط تعریف می کنیم.

نمادگذاری: دترمینان ماتریس مربعی A را با $\det A$ یا $|A|$ نمایش می دهیم.

تعریف (دترمینان ماتریس 2×2): اگر $A=[a_{11}]$ در این صورت $\det A=|A|=a_{11}$ و اگر $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ آنگاه
$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

به عبارت دیگر برای محاسبه دترمینان ماتریس 2×2، اعضای روی قطر فرعی را در هم ضرب می کنیم و حاصل آن را از حاصل ضرب اعضای روی قطر اصلی کم می کنیم.

مثال ۹: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ آنگاه $\det A$ را بیابید.

حل:
$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=1\times(-4)-2\times 3=-4-6=-10$$

بدیهی است که اگر $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه $\det I=1$

تعریف: اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، فرض کنید که A_{ij} ماتریسی باشد که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A بدست آمده است در این صورت $|A_{ij}|=\det A_{ij}$ را دترمینان کهاد عضو a_{ij} ماتریس

می نامیم و همسازه عضو a_{ij} در ماتریس A را با Δ_{ij} نمایش می دهیم و $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$

مثال ۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-3&4\\0&2&1\\5&1&-2\end{bmatrix}$ آنگاه همسازه های a_{11} و a_{12} و a_{32} و a_{31} را بیابید.

حل:

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix}=-4-1=-5$$ همسازه درایه a_{11}

$$\Delta_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&1\\5&-2\end{vmatrix}=-(0-5)=5$$ همسازه درایه a_{12}

$$\Delta_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&4\\0&1\end{vmatrix}=-(1-0)=-1$$ همسازه درایه a_{32}

$$\Delta_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3&4\\2&1\end{vmatrix}=(-3-8)=-11$$ همسازه درایه a_{31}

تعریف: فرض کنید که $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس باشد و سطر دلخواه i از ماتریس A را در نظر می گیریم و $\det A$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\det A=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij}=a_{i1}(-1)^{i+1}\det A_{i1}+a_{i2}(-1)^{i+2}\det A_{i2}+\cdots$$
$$+\cdots+a_{in}(-1)^{i+n}\det A_{in} \qquad (*)$$

فرمول $(*)$ بسط دترمینان ماتریس A را برحسب سطر iام ماتریس می باشد که در آن i یکی از سطرهای دلخواه A می باشد. اگر $i=1$ آنگاه:

$$\det A=a_{11}(-1)^{1+1}\det A_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}\det A_{12}+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}\det A_{1n}$$

اگر $i=2$ آنگاه

$$\det A=a_{21}(-1)^{2+1}\det A_{21}+a_{22}(-1)^{2+2}\det A_{22}+\cdots+a_{2n}(-1)^{2+n}\det A_{2n}$$

همچنین می توان دترمینان را برحسب ستون دلخواه jام ماتریس A بسط داد که به صورت زیر باشد

$$\det A=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij}=a_{1j}(-1)^{1+j}\det A_{1j}+a_{2j}(-1)^{2+j}\det A_{2j}$$
$$+\cdots+a_{nj}(-1)^{n+j}\det A_{nj} \qquad (**)$$

فرمول $(**)$ بسط دترمینان A برحسب ستون شماره jام ماتریس A می باشد

تبصره ۹: مقدار دترمینان یک ماتریس منحصر به فرد است بستگی به انتخاب سطر یا ستون ماتریس ندارد.

مثال ۱۱: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&-3&4\\0&2&1\\5&1&-2\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل: دترمینان را نسبت به سطر دوم بدست می‌آوریم (بسط می‌دهیم) زیرا یکی از همسازه‌ها در صفر ضرب می‌شود.

$$\Delta_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&4\\5&-2\end{vmatrix}=-2-20=-22 \quad , \quad \Delta_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-3\\5&1\end{vmatrix}=-(1+15)=-16$$

$$\det A=0\times\Delta_{21}+2\times\Delta_{22}+1\times\Delta_{23}=0-44-16=-60$$

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان 3×3 : ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ را دوبار کنار هم می‌نویسیم سه قطر اصلی و سه قطر فرعی ماتریس A را مشخص می‌کنیم در این صورت

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

$\det A=$ (مجموع حاصل ضرب اعضای روی قطر اصلی) $-$ (مجموع حاصل ضرب اعضای روی قطر فرعی)

$$\det A=[a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}]-[a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}]$$

مثال ۱۲: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&0&1\\3&2&2\end{bmatrix}$ را به کمک دستور ساروس حساب کنید.

حل:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&0&1\\3&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&0&1\\3&2&2\end{bmatrix}$$

$$\det A=(\underbrace{1\times0\times2}_{0}+\underbrace{2\times1\times3}_{6}+\underbrace{3\times2\times2}_{12})-(\underbrace{3\times0\times3}_{0}+\underbrace{2\times2\times2}_{8}+\underbrace{1\times1\times2}_{2})=18-10=8$$

مثال ۱۳: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}-1&2&0\\3&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$ را به کمک دستور ساروس حساب کنید.

حل:

$$\begin{bmatrix}-1&2&0\\3&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&0\\3&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$$

$$\det A=(\underbrace{(-1)\times1\times1}_{-1}+\underbrace{2\times2\times1}_{4}+\underbrace{0\times3\times2}_{0})-(\underbrace{0\times1\times1}_{0}+\underbrace{2\times3\times1}_{6}+\underbrace{(-1)\times2\times2}_{-4})=3-2=1$$

خواص دترمینان: برای محاسبه دترمینان می‌توان از قضیه زیر استفاده کرد.

قضیه ۱۰: فرض کنید که $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس $n\times n$ باشد آنگاه

۱) $\det A^T=\det A$

۲) اگر A ماتریس قطری یا بالا مثلثی یا پایین مثلثی باشد آنگاه: $\det A =$ حاصل ضرب اعضای روی قطر اصلی

۳) اگر جای دو سطر (یا دو ستون) ماتریس A را با یکدیگر جابجا کنیم، مقدار دترمینان تغییر علامت می‌دهد (قرینه می‌شود)

۴) اگر دو سطر (یا دو ستون) ماتریس A با هم برابر باشند آنگاه مقدار دترمینان برابر صفر است.

۵) اگر یک سطر (یا یک ستون) ماتریس A صفر باشد آنگاه مقدار دترمینان برابر صفر است.

۶) اگر دو سطر (یا دو ستون) در ماتریس A مضرب هم باشند آنگاه مقدار دترمینان صفر است.

۷) اگر عنصرهای یک سطر (یا یک ستون) ماتریس A در k ضرب کنیم آنگاه دترمینان ماتریس k برابر می‌شود

۸) اگر عنصرهای یک سطر (یا یک ستون) را در عدد k ضرب کنیم و به عنصرهای سطر (یا ستون) دیگر بیفزاییم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند. [اگر R_i سطر شماره iام ماتریس A و R_j سطر شماره jام ماتریس A باشد $(kR_i+R_j\to R_j)$ و اگر C_i و C_j به ترتیب ستون شماره iام و jام ماتریس A باشد $(kC_i+C_j\to C_j)$ در این صورت دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند.]

۹) اگر عنصرهای یک سطر (یا یک ستون) ماتریس A از مجموع p جمله ساخته شده باشند، آنگاه می‌توان دترمینان A را به صورت مجموع p دترمینان مرتبه n نوشت یعنی

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & d_1 & r_1 \\ a_2+b_2+c_2 & d_2 & r_2 \\ a_3+b_3+c_3 & d_3 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & r_1 \\ a_2 & d_2 & r_2 \\ a_3 & d_3 & r_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & r_1 \\ b_2 & d_2 & r_2 \\ b_3 & d_3 & r_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & r_1 \\ c_2 & d_2 & r_2 \\ c_3 & d_3 & r_3 \end{vmatrix}$$

برای سطر هم به همین صورت است.

قضیه ۱۱: اگر A و B دو ماتریس مربعی از مرتبه n باشند آنگاه $\det(AB)=\det A\cdot\det B$

تبصره: به کمک قضیه ۱۰ و ۱۱ (خواص دترمینان) می‌توان به سادگی مانند مثال‌های زیر دترمینان یک ماتریس را محاسبه کرد.

قرارداد: مانند خاصیت ۸ در قضیه ۱۰ می‌توان خاصیت (۳) را با R_{ij} یعنی تعویض دو سطر iام و jام در ماتریس A
و C_{ij} تعویض دو ستون iام و jام در ماتریس A نمادگذاری کرد و به همین صورت خاصیت ۷ هم می‌توان با نماد kR_i و
kC_i نمایش داد یعنی ضرب سطر (یا ستون) iام در عدد k.

مثال ۱۴: به کمک خواص دترمینان، دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

ب) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

ج) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

حل:

الف) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{2C_1+C_3\to C_3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)[-2-6] = 8$

بسط نسبت با سطر دوم صورت گرفته است.

ب) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[4R_2]{6R_1} \frac{1}{24}\begin{vmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[4C_1+C_2\to C_2]{-C_1+C_3\to C_3} \frac{1}{24}\begin{vmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 3 & 14 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{24}\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 14 & -7 \end{vmatrix} =$

بسط نسبت سطر سوم صورت گرفته است.

$= \frac{1}{24}[-42+70] = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}$

ج) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{2R_3+R_2\to R_2 \\ R_3+R_4\to R_4}]{-2R_3+R_1\to R_1} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[-3R_1+R_3\to R_3]{3R_1+R_2\to R_2}$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & -1 & 23 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -19 \\ -1 & 23 \end{vmatrix} = -[23-19] = -4$

مثال ۱۵: دترمینان های زیر را با کمک خواص دترمینان محاسبه کنید.

الف) $\begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$ ب) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & b+a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ج) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

حل:

الف) $\begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2+C_3\to C_1} \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ t+3 & t-3 & 1 \\ t+4 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_2\to R_2} \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 \\ t+4 & -6 & t+4 \end{vmatrix} =$

$= (t-2)\begin{vmatrix} t+3 & 1 \\ t+4 & t+4 \end{vmatrix} = (t-2)(t+4)\begin{vmatrix} t+3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (t-2)(t+4)[t+3-1] = (t-2)(t+2)(t+4)$

ب) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & b+a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2\to R_2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ سطر دوم و سوم مضرب هم هستند.

ج) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2\to R_2} \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ a-c & b-a & c-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$ سطر دوم و سوم مضرب هم هستند.

مثال ۱۶: مقدار K را طوری معین کنید که $\begin{vmatrix} K & K \\ 2 & 2K \end{vmatrix} = 0$

حل: $\begin{vmatrix} K & K \\ 2 & 2K \end{vmatrix} = 2K\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & K \end{vmatrix} = 2K(K-2) = 0 \Rightarrow K=0,\ K=2$

نکته ۱۲: دترمینان ماتریس پاد متقارن از مرتبه فرد صفر است.

روش دوم برای حل دستگاه معادلات خطی n معادله و n مجهول: روش دترمینان یا روش کرامر

قبل از معرفی روش کرامر یا روش دترمینان برای حل یک دستگاه معادلات خطی به نمایش ماتریسی یک دستگاه معادلات خطی می پردازیم؛ برای دستگاه معادلات خطی m معادله و n مجهول زیر

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1)$$

ضرایب مجهولات و مقدار ثابت و خود مجهولات را به صورت ماتریسی می نویسیم

ماتریس ضرایب مجهولات $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

ماتریس مجهولات $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم.

با کمک ضرب ماتریسی بدیهی است که دستگاه معادلات خطی (۱) می توان با فرم ماتریسی $AX=B$ نوشت

روش کرامر یا روش دترمینان برای حل دستگاه معادلات خطی: فرض کنید که $AX=B$ فرم ماتریسی یک دستگاه معادلات خطی n معادله و n مجهول باشد و $\det A\neq 0$ در این صورت جواب های این دستگاه عبارت است از

$$x_1=\frac{\det D_1}{\det A} \text{ و } x_2=\frac{\det D_2}{\det A} \text{ و } \cdots \text{ و } x_i=\frac{\det D_i}{\det A} \text{ و } \cdots \text{ و } x_n=\frac{\det D_n}{\det A}$$

که در آن D_i همان ماتریس A است که به جای ستون iام A ستون $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ قرار گرفته است یعنی ستون iام A را حذف می کنیم و به جای آن مقادیر ثابت قرار می دهیم.

مثال ۱۷ دستگاه های معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 4x+7y=-1 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 2x-5y+2z=7 \\ x+2y-4z=3 \\ 3x-4y-6z=5 \end{cases}$

حل الف)

$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A=14+12=26\neq 0$

$D_1=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}=-7-3=-10$ و $D_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-2+4=2$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\det D_1}{\det A}=\dfrac{-10}{26}=-\dfrac{5}{13} \\ y=\dfrac{\det D_2}{\det A}=\dfrac{2}{26}=\dfrac{1}{13} \end{cases}$$

حل ب)

$A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A=-46\neq 0$ و $D_2=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det D_2=-46$

$D_1=\begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det D_1=-230$ و $D_3=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det D_3=-46$

$$x=\frac{\det D_1}{\det A}=\frac{-230}{-46}=5 \text{ و } y=\frac{\det D_2}{\det A}=\frac{-46}{-46}=1 \text{ و } z=\frac{\det D_3}{\det A}=\frac{-46}{-46}=1$$

معکوس ماتریس

تعریف: ماتریس مربعی A را معکوس پذیر نامیم اگر ماتریس مربعی B هم مرتبه با A وجود داشته باشد بطوریکه $AB=BA=I$

ماتریس B در صورت وجود منحصربفرد است زیرا اگر A دارای دو معکوس B و C باشد آنگاه

$$\left.\begin{array}{l} AB=BA=I \\ AC=CA=I \end{array}\right\} \Rightarrow B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C \Rightarrow B=C$$

ماتریس B در صورت وجود معکوس ماتریس A نامیم و با A^{-1} نمایش می دهیم $(A^{-1}A=AA^{-1}=I)$

قضیه ۱۳. اگر A و B دو ماتریس معکوس پذیر باشند آنگاه

الف) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ب) $(A^{-1})^{-1}=A$ ج) $(A^{-1})^{n}=(A^{n})^{-1}$

سؤال: اگر ماتریس مربعی A دارای معکوس باشد، معکوس A یعنی A^{-1} را چگونه بدست آوریم؟

جواب: با چند روش می توان معکوس A را بدست آورد که به برخی از این روشها می پردازیم.

تعریف (ماتریس الحاقی) ماتریس الحاقی ماتریس A عبارت است از ترانهاده ماتریسی که درایه های آن همسازه های درایه ماتریس A است. ماتریس الحاقی ماتریس A را با $B^T=Adj(A)$ نمایش می دهیم که در آن

$$B=\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & & & \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

قضیه ۱۴: فرض کنید که A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد، آنگاه ماتریس A معکوس پذیر است اگر و فقط اگر $\det A\neq 0$ و در این صورت

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}B^T \quad \text{یا} \quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}adj(A)$$

بنابراین به کمک قضیه ۱۴ می توان معکوس A را یافت.

توجه: برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ چون $\Delta_{11}=d$ و $\Delta_{12}=-c$ و $\Delta_{21}=-b$ و $\Delta_{22}=a$ بنابراین

$$B=\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a\end{bmatrix} \Rightarrow B^T=adj(A)=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}}$$

مثال ۱۸: معکوس ماتریس های زیر را در صورت وجود بیابید $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2\end{bmatrix}$ و AC

حل:

$$\det A=3-2=1\neq 0 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\det C=6-4=2\neq 0 \Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

برای محاسبه معکوس AC از دو روش استفاده می کنیم

$$(AC)^{-1}=C^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2}\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8\end{bmatrix} \Rightarrow \det(AC)=56-54=2 \Rightarrow (AC)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -9 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2}\end{bmatrix}$$

مثال ۱۹. معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&4&5\end{bmatrix}$ را در صورت وجود بیابید.

حل.

$$\det A=1\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=5-8=-3\neq 0$$

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=-3 \qquad \Delta_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=-(10-12)=2 \qquad \Delta_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1$$

$$\Delta_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&2\\0&5\end{vmatrix}=0 \qquad \Delta_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\0&5\end{vmatrix}=5 \qquad \Delta_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}=-2$$

$$\Delta_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\0&4\end{vmatrix}=0 \qquad \Delta_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&4\end{vmatrix}=-4 \qquad \Delta_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,adj(A)=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-3&2&1\\0&5&-2\\0&-4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\\0&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

دو روش دیگر برای محاسبهٔ معکوس وجود دارد که یکی از روشها بیه از عملیات سطری مقدماتی و دیگری در فصل ۴ به آن می‌پردازیم.

بررسی کردیم ۲ حل دستگاه‌ها؛ سومین روش برای حل دستگاه روش معکوس ماتریس است.

روش معکوس ماتریس برای حل دستگاه معادلات خطی n معادله و n مجهول.

فرض کنید که $AX=B$ یک دستگاه معادله خطی از n معادله و n مجهول باشد و $\det A\neq 0$ یعنی ماتریس A معکوس داشته باشد در این صورت $X=A^{-1}B$ جواب دستگاه $AX=B$ است.

مثال ۲۰: دستگاه معادلات زیر را به روش معکوس ماتریس حل کنید.

الف) $\begin{cases}2x+y=3\\5x+3y=1\end{cases}$

ب) $\begin{cases}3x+y+2z=3\\2x-3y-z=-3\\x+2y+z=4\end{cases}$

حل الف)

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}\Rightarrow \det A=6-5=1\neq 0\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,adj A=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}3&-1\\5&2\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9-1\\-15+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\-13\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=8\\y=-13\end{matrix}$$

حل ب)

$$A=\begin{bmatrix}3&1&2\\2&-3&-1\\1&2&1\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\Delta_{11}=-1 & \Delta_{21}=3 & \Delta_{31}=5\\ \Delta_{12}=-3 & \Delta_{22}=1 & \Delta_{32}=7\\ \Delta_{13}=7 & \Delta_{23}=-5 & \Delta_{33}=-11\end{matrix}\Rightarrow adj(A)=\begin{bmatrix}-1&3&5\\-3&1&7\\7&-5&-11\end{bmatrix}$$

$$\det A=3\Delta_{11}+1\Delta_{12}+2\Delta_{13}=3\times(-1)+1\times(-3)+2\times 7=-3-3+14=8$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1&3&5\\-3&1&7\\7&-5&-11\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}3\\-3\\4\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1&3&5\\-3&1&7\\7&-5&-11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-3-9+20}{8}\\\frac{-9-3+28}{8}\\\frac{21+15-44}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow x=1$ و $y=2$ و $z=-1$

عملیات سطری مقدماتی روی یک ماتریس و ماتریس مقدماتی

روی ماتریس دلخواه A سه عمل زیر موسوم به عملیات سطری مقدماتی تعریف می‌شود:

۱- ضرب یک سطر A در عدد ناصفر c $(c\in \mathbb{R})$

۲- افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر

۳- تعویض دو سطر A

تبصره: برای سه عملیات مقدماتی بالا می‌توان نمایش ریاضی بکار برد

۱) cR_i یعنی ضرب سطر iام ماتریس A در عدد ناصفر

۲- $cR_i+R_j \to R_j$ افزودن c برابر سطر iام ماتریس A به سطر jام ماتریس A

۳- R_{ij} تعویض دو سطر i و j در ماتریس A باهم

توجه: قبلاً این سه عملیات را روی دترمینان ماتریس بکار برده‌ام.

تعریف (ماتریس مقدماتی) ماتریس مربعی $E_{n\times n}$ را ماتریس مقدماتی می‌نامیم، اگر بتوان E را از ماتریس همانی I_n با انجام تنها یک عمل سطری مقدماتی به دست آورد یعنی یک عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس همانی I_n اعمال کنیم تا به E برسیم.

مثال ۲۱: ماتریس‌های زیر ماتریس مقدماتی 2×2 هستند.

$$E_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\quad E_4=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$$

E_1 از عمل تعویض دو سطر I_2 بدست آمده است، E_2 سطر اول ماتریس I_2 در عدد ۲ ضرب شده است. E_3 سطر دوم ماتریس I_2 را در (-1) ضرب شده است.

E_4 از عملیات $2R_1+R_2\to R_2$ روی I_2 بدست آمده است.

قضیه ۱۵: اگر ماتریس مقدماتی E از انجام یک عمل سطری مقدماتی مانند e روی ماتریس I_n به دست آمده باشد و اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد آنگاه EA ماتریسی است که از انجام همان عمل سطری مقدماتی e روی A به دست می‌آید (یعنی $e(A)=EA$)

مثال ۲۲: ماتریس مقدماتی

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{3R_1+R_3\to R_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$$ یعنی $$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$$

پس اگر e عمل سطری مقدماتی $3R_1+R_3\to R_3$ باشد آنگاه

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_1+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix} = EA = e(A)$$

قضیه ۱۶: هر ماتریس مقدماتی معکوس پذیر است و معکوس آن نیز یک ماتریس مقدماتی است.

تعریف: دو ماتریس A و B را هم ارز سطری نامیم هرگاه بتوان با تعداد متناهی عملیات سطری مقدماتی از B به A رسید (یا از A به B رسید) به عبارت دیگر

$$E_n E_{n-1} E_{n-2} \cdots E_2 E_1 A = B$$

یا $E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{n-2}^{-1} E_{n-1}^{-1} E_n^{-1} B = A$. و می نویسیم $A \sim B$

قضیه ۱۷: اگر $A \sim I_n$ آنگاه A معکوس پذیر است به عبارت دیگر ماتریس مربعی A هم ارز سطری با ماتریس همانی I_n باشد، آنگاه A معکوس پذیر است.

نتیجه (یافتن A^{-1} از روی عملیات سطری مقدماتی) برای یافتن A^{-1} کافی است که روی ماتریس افزوده $[A|I]$ عملیات سطری مقدماتی انجام دهیم تا اینکه به ماتریس افزوده $[I|A^{-1}]$ برسیم.

$$[A|I] \overset{E_1}{\sim} \overset{E_2}{\sim} \cdots \overset{E_n}{\sim} [I|A^{-1}]$$

اگر در بین راه یکی از سطرهای A صفر شود آنگاه A^{-1} وجود ندارد

مثال ۲۳: معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ در صورت وجود بیابید.

حل:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[2R_2+R_3\to R_3]{-2R_2+R_1\to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-3R_3+R_2\to R_2 \\ -R_3}]{9R_3+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

قضیه ۱۸: اگر A و B دو ماتریس هم ارز سطری باشند یعنی $A \sim B$ آنگاه جوابهای دو دستگاه همگن $AX=0$ و $BX=0$ یکسان هستند.

توجه: قضیه ۱۸ یک روش به نام روش عملیات سطری مقدماتی (که به روش حذف گوس جردن معروف است) را برای حل دستگاه همگن می دهد.

روش عملیات سطری مقدماتی (روش حذف گوس - جردن) برای حل دستگاه معادلات خطی

قضیه ۱۹: برای دستگاه معادلات خطی $AX=B$ فقط یکی از سه حالت زیر برقرار است:

۱- دستگاه جواب منحصر به فرد دارد ۲- دستگاه جواب ندارد. ۳- دستگاه بی نهایت جواب دارد

قضیه ۲۰: اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد آنگاه گزاره های زیر معادل هستند:

الف) ماتریس A معکوس پذیر است.

ب) دستگاه معادلات خطی همگن $AX=0$ تنها جواب بدیهی دارد.

ج) ماتریس A هم ارز سطری ماتریس همانی I_n است.

قضیه ۲۱: فرض کنید که A ماتریسی مربعی باشد

الف) اگر B ماتریس مربعی باشد که در رابطه $BA=I$ صدق کند آنگاه ماتریس A معکوس پذیر است و $B=A^{-1}$

ب) اگر B یک ماتریس مربعی باشد که در رابطه $AB=I$ صدق کند آنگاه ماتریس A معکوس پذیر است و $B=A^{-1}$

قضیه ۲۲: اگر A ماتریس مربعی $n\times n$ باشد، آنگاه گزاره های زیر هم ارز هستند:

الف) A معکوس پذیر است.

ب) دستگاه معادلات خطی همگن $AX=0$ تنها جواب بدیهی دارد.

ج) ماتریس A با ماتریس همانی I_n هم ارز است

د) برای هر ماتریس ستونی B دستگاه $AX=B$ سازگار است (جواب دارد)

توجه: با کمک قضیه های ۱۸ تا ۲۲ می توان روش عملیات سطری مقدماتی را برای حل دستگاه $AX=B$ به صورت زیر شرح داد و به سؤالات مطرح شده در اول فصل جواب داد. برای این منظور به چند تعریف زیر می پردازیم و چند قضیه نیز بیان می کنیم.

تعریف (ماتریس تحویل شده سطری) ماتریس $m\times n$ ماتریس R را یک ماتریس تحویل شده سطری نامیم هرگاه

الف) اولین درایه غیرصفر در هر سطر غیرصفر R عدد یک باشد.

ب) همه درایه های دیگر هر ستون از R که شامل درایه غیرصفر مقدم یک سطر است صفر باشد

مثال ۲۴. ماتریس های $R_1=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ و $R_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ و $R_3=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ همگی ماتریس های تحویل شده سطری هستند ولی ماتریسهای $R_5=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$ و $R_6=\begin{bmatrix}0&1&0&2&0\\0&2&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ تحویل شده سطری نیستند.