فصل ۴ بردارهای ویژه (خاص) و مقدارهای ویژه (خاص)

در بیشتر مسائل علوم ریاضی، یک عمل‌گر خطی $T: V \longrightarrow V$ داده می‌شود سپس بدست آوردن تمام اسکالرهای مانند λ ($\lambda \in F$) که در آن‌ها معادله $T(X)=AX=\lambda X$ جواب غیر بدیهی دارد و از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است خواسته می‌شود.

تعریف: اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد آنگاه بردار غیرصفر X در $\mathbb{R}^n$ را بردار ویژه ماتریس A می‌نامیم. اگر اسکالر λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) موجود باشد بطوریکه $AX=\lambda X$، این اسکالر λ را مقدار ویژه ماتریس A وابسته به X می‌نامیم. همچنین بردار X را بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه λ می‌نامیم.

به همین ترتیب اگر $T: V \longrightarrow V$ یک عمل‌گر خطی باشد بردار ناصفر X از V را بردار ویژه تبدیل خطی (عمل‌گر خطی) T می‌نامیم هرگاه اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$ موجود باشد که $T(X)=\lambda X$ و X را بردار ویژه وابسته به λ می‌نامیم و λ را هم مقدار ویژه وابسته به بردار ویژه X می‌نامیم.

تبصره: اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، دیدیم که عمل‌گر خطی $T: V \longrightarrow V$ دارای نمایش ماتریسی A نسبت به یک پایه برای V است و یافتن بردار ویژه و مقدار ویژه یک تبدیل خطی معادل با یافتن بردار ویژه و مقدار ویژه ماتریس A است. در این بخش به بردارهای ویژه و مقدارهای ویژه یک ماتریس می‌پردازیم.

مثال ۱: بردار $X=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ بردار ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ وابسته به مقدار ویژه $\lambda=3$ است زیرا

$$AX=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=3X$$

سوال: چگونه مقدار ویژه و بردار ویژه یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را پیدا کنیم؟

جواب: برای یافتن مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ کافی است که معادله $AX=\lambda X$ را حل کنیم. برای این منظور معادله $AX=\lambda X$ را به صورت $AX=\lambda IX$ می‌نویسیم و معادله $(\lambda I-A)X=0$ را حل می‌کنیم و جواب‌های ناصفر بردارهای ویژه وابسته به λ می‌باشد و برای اینکه معادله $(\lambda I-A)X=0$ دارای جواب نابدیهی (غیرصفر) باشد باید $\det(\lambda I-A)=0$. معادله $\det(\lambda I-A)=0$ یک معادله برحسب λ می‌باشد و از حل آن مقادیر ویژه ماتریس A بدست می‌آید.

تعریف: معادله $\det(\lambda I - A)=0$ را معادله مشخص ماتریس (معادله مفسر ماتریس) می‌نامیم. و اسکالرهایی که در این معادله صدق می‌کند (ریشه‌های این معادله) را مقادیر ویژه ماتریس A می‌نامیم.
اگر معادله $\det(\lambda I - A)=0$ را بسط دهیم یک چندجمله‌ای درجه n برحسب λ بدست می‌آید که این چندجمله‌ای را چندجمله‌ای مشخص A می‌نامیم.

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$$

مثال ۲: مقادیر ویژه ماتریس‌های زیر را بیابید:

الف) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix}3&2\\-1&0\end{bmatrix}$

حل الف)

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-1)^2-4=0 \Rightarrow \lambda-1=\pm 2 \;\Big\langle\; \begin{matrix}\lambda=3\\ \lambda=-1\end{matrix}$$

پس مقادیر ویژه ماتریس A عبارت است $\lambda=3$ و $\lambda=-1$

حل ب)

$$\det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix}\lambda-3 & -2\\ 1 & \lambda-0\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)+2 = \lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-2)(\lambda-1)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=2,\ \lambda=1$$

پس مقادیر ویژه ماتریس B عبارت است از $\lambda=1$ و $\lambda=2$

مثال ۳: مقادیر ویژه ماتریس‌های مقابل را بیابید:

الف) $A=\begin{bmatrix}-2&-1\\5&2\end{bmatrix}$، ب) $B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-20&-11&8\end{bmatrix}$

حل الف

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda+2 & 1\\ -5 & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)+5 = \lambda^2-4+5=\lambda^2+1=0$$

این معادله روی میدان $\mathbb{R}$ دارای جواب نیست بنابراین اگر ماتریس A روی میدان اعداد حقیقی در نظر بگیریم یعنی $A\in Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ آنگاه ماتریس A مقادیر ویژه ندارد. ولی اگر $A\in Mat_{2\times2}(\mathbb{C})$ در نظر بگیریم در این صورت چون ریشه‌های $\lambda^2+1=0$ عبارت است از $\lambda=i$ و $\lambda=-i$ بنابراین ماتریس A دارای دو ریشه مختلط (یا دو مقدار ویژه مختلط) است.

حل ب)

$$\det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 20 & 11 & \lambda-8\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 11 & \lambda-8\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}0 & -1\\ 20 & \lambda-8\end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2-8\lambda+11)+20=0$$

$$\Rightarrow \lambda^3-8\lambda^2+11\lambda+20 = (\lambda-4)(\lambda^2-4\lambda-5) = (\lambda-4)\left[(\lambda-2)^2-9\right]=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda=4},\ (\lambda-2)^2=9 \Rightarrow \boxed{\lambda=2+\sqrt{3}},\ \boxed{\lambda=2-\sqrt{3}}$$

بنابراین مقادیر ویژه ماتریس B روی اعداد حقیقی عبارت است از $\lambda=4$ و $\lambda=2+\sqrt{3}$ و $\lambda=2-\sqrt{3}$. اگر ماتریس B را روی میدان $\mathbb{Q}$ در نظر بگیریم فقط یک مقدار ویژه $\lambda=4$ دارد.

تبصره: مقادیر ویژه یک ماتریس ما شدید به میدان F بستگی دارد. در مثال ۲ دیدیم که ماتریس A روی میدان $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ دارای مقدار ویژه نیست ولی روی $\mathbb{C}$ دارای دو مقدار ویژه است. همچنین ماتریس B روی $\mathbb{Q}$ دارای یک مقدار ویژه است درصورتیکه روی میدان $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ دارای سه مقدار ویژه است.

مثال ۴: اگر معادله مشخصه یک ماتریس $A_{5\times5}$ به صورت $\lambda^5-\lambda^4-4\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda-5=0$ باشد آنگاه مقادیر ویژه این ماتریس روی میدان‌های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{C}$ را بدست آورید.

حل:

$$\lambda^5-\lambda^4-4\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda-5=(\lambda-1)(\lambda^2-5)(\lambda^2+1)=0$$

اگر میدان $F=\mathbb{Q}$ باشد ماتریس A فقط مقدار ویژه $\lambda=1$ دارد.

اگر $F=\mathbb{R}$ باشد ماتریس A سه مقدار ویژه $\lambda=1$ و $\lambda=\sqrt{5}$ و $\lambda=-\sqrt{5}$ دارد.

اگر $F=\mathbb{C}$ باشد آنگاه ماتریس A دارای ۵ مقدار ویژه $\lambda=1$، $\lambda=\sqrt{5}$ و $\lambda=-\sqrt{5}$ و $\lambda=i$ و $\lambda=-i$ است.

تبصره: بطور کلی اگر A یک ماتریس روی $\mathbb{C}$ باشد آنگاه A دقیقاً n مقدار ویژه روی میدان $\mathbb{C}$ دارد که بعضی از این مقادیر ویژه تکراری هستند.

قضیه ۱: فرض کنید که A یک ماتریس $n\times n$ روی میدان $F=\mathbb{R}$ باشد، احکام زیر هم ارز (معادل) هستند:

1) λ مقدار ویژه ماتریس A است

2) دستگاه همگن $(\lambda I-A)X=0$ جواب غیرصفر (غیربدیهی) دارد

3) بردار ناصفر X در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که $AX=\lambda X$

4) λ یک جواب حقیقی معادله مشخصه $\det(\lambda I-A)=0$ است (اثبات در کتاب صفحه ۳۲۴)

محاسبه بردارهای ویژه ماتریس A وابسته به مقدار ویژه λ

هدف محاسبه تمام بردارهای ناصفر مانند X در $\mathbb{R}^n$ است که در معادله $AX=\lambda X$ صدق می‌کند و طبق قضیه ۱ یعنی یافتن بردارهای غیرصفری از $\mathbb{R}^n$ که در فضای جواب دستگاه همگن $(\lambda I-A)X=0$ قرار دارد. این فضای جواب را فضای ویژه (خاص) ماتریس A وابسته به λ می‌نامیم و بردارهای ناصفر این فضای ویژه همان بردارهای ویژه ماتریس A وابسته به λ هستند.

بنابراین پایه فضای جواب دستگاه همگن $(\lambda I - A)X=0$ را پیدا کنیم.

مثال ۵: برای فضای ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ یک پایه پیدا کنید.

حل.

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&0\\2&\lambda-3&0\\0&0&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}\lambda-3&2\\2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-5)\left[(\lambda-3)^2-4\right]=0\Rightarrow$$

$$\lambda-5=0\Rightarrow\boxed{\lambda=5}\qquad(\lambda-3)^2=4\Rightarrow\lambda-3=\pm2\Rightarrow\boxed{\lambda=5}\ \text{و}\ \boxed{\lambda=1}$$

محاسبه فضای ویژه ماتریس A وابسته به $\lambda=5$

$$\begin{bmatrix}5-3&2&0\\2&5-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+2y=0\\2x+2y=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{x=-y}$$

با فرض $y=b$ و $z=c$ (دلخواه)
$x=-b$

بردارهای ویژه وابسته $=(-b,b,c)=b(-1,1,0)+c(0,0,1)$ ، (b و c باهم نباید صفر باشند)

پس فضای ویژه ماتریس A وابسته به $\lambda=5$ توسط دو بردار $(-1,1,0)$ و $(0,0,1)$ تولید می‌شود. $\lambda=5$ به

بنابراین $\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$ یک پایه برای این فضای ویژه است.

محاسبه فضای ویژه ماتریس A وابسته به $\lambda=1$

$$\begin{bmatrix}1-3&2&0\\2&1-3&0\\0&0&1-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&2&0\\2&-2&0\\0&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2x+2y=0\Rightarrow\boxed{x=y}\\-4z=0\Rightarrow\boxed{z=0}\end{cases}$$

با فرض $x=a$ (دلخواه) داریم

بردارهای ویژه وابسته به $\lambda=1$ $=(a,a,0)=a(1,1,0)\quad(a\neq0)$

پس $\{(1,1,0)\}$ یک پایه برای فضای ویژه ماتریس A وابسته به $\lambda=1$ است.

قضیه ۲: الف) اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی A باشد آنگاه λ^2 یک مقدار ویژه ماتریس A^2 است.

ب) بطور کلی اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی A باشد آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت K، λ^K یک مقدار ویژه ماتریس A^K است.

ج) اگر X یک بردار ویژه ماتریس مربعی A باشد آنگاه cX نیز یک بردار ویژه ماتریس A است که در آن c یک اسکالر است ($c\in\mathbb{R}$)

د) اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس معکوس پذیر A باشد آنگاه λ^{-1} مقدار ویژه ماتریس A^{-1} است.

ه) اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی A باشد آنگاه $c\lambda$ مقدار ویژه ماتریس cA است که در آن c یک اسکالر است ($c\in\mathbb{R}$)

و) اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی A باشد آنگاه $\lambda+c$ مقدار ویژه ماتریس $A+cI$ است که در آن c یک اسکالر است ($c\in\mathbb{R}$)

ز) اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد و λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی A باشد آنگاه $f(\lambda)$ مقدار ویژه ماتریس $f(A)$ است. (اثبات در کتاب صفحه ۲۴۶)

مثال ۶: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه و فضای ویژه ماتریس‌های مثال ۲ یعنی $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3&2\\-1&0\end{bmatrix}$ را بیابید.

حل: در مثال ۲ دیدیم که مقادیر ویژه ماتریس A عبارت است از $\lambda=3$ و $\lambda=-1$ و مقادیر ویژه ماتریس B عبارت است از $\lambda=1$ و $\lambda=2$ بنابراین:

محاسبه بردارهای ویژه وابسته به $\lambda=3$ برای ماتریس A

$$\begin{bmatrix}3-1&-2\\-2&3-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&-2\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow 2x=2y\Rightarrow x=y$$

با فرض $y=b$ دگوان داریم:

بردارهای ویژه ماتریس A وابسته به $\lambda=3$ $=(b,b)=b(1,1)\quad b\in\mathbb{R}\ ,b\neq 0$

فضای ویژه ماتریس A وابسته به $\lambda=3$ $=\langle(1,1)\rangle$

محاسبه بردارهای ویژه وابسته به $\lambda=-1$ برای ماتریس A

$$\begin{bmatrix}-1-1&-2\\-2&-1-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow -2x=2y\Rightarrow x=-y$$

با فرض $y=b$ داریم:

بردارهای ویژه ماتریس A وابسته به $\lambda=-1$ $=(-b,b)=b(-1,1)\quad b\in\mathbb{R}\ ,b\neq 0$

فضای ویژه ماتریس A وابسته به $\lambda=-1$ $=\langle(-1,1)\rangle$

محاسبه بردارهای ویژه وابسته به $\lambda=1$ برای ماتریس B

$$\begin{bmatrix}1-3&-2\\1&1-0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&-2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow x+y=0\Rightarrow x=-y$$

با فرض $y=b$ دگوان

بردارهای ویژه ماتریس B وابسته به $\lambda=1$ $=(b,-b)=b(1,-1)\quad \forall b\in\mathbb{R}-\{0\}$

محاسبه بردارهای ویژه وابسته به $\lambda=2$ برای ماتریس B

$$\begin{bmatrix}2-3&-2\\1&2-0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&-2\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow x+2y=0,\ x=-2y$$

با فرض $y=b$ دگوان داریم:

بردارهای ویژه ماتریس B وابسته به $\lambda=2$ $=(-2b,b)=b(-2,1)\quad b\in\mathbb{R}-\{0\}$

ادامه در صفحه بعد

$\langle(1,-1)\rangle$ = فضای ویژه ماتریس B وابسته به $\lambda=1$	$\langle(1,-2)\rangle$ = فضای ویژه ماتریس B وابسته به $\lambda=2$

قطری کردن ماتریس

در این بخش دو مسئله زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

مسئله ۱: برای عمل گر خطی $T: V \longrightarrow V$ (که در آن V فضای برداری با بعد متناهی است.) نمایش ماتریسی مانند A وجود دارد که قطری باشد به عبارت دیگر آیا پایه‌ای برای V وجود دارد که ماتریس نمایش T نسبت به این پایه قطری باشد؟

مسئله ۲: اگر V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد آیا برای V یک پایه متعامد یکه وجود دارد که ماتریس نمایش عمل‌گر خطی $T: V \longrightarrow V$ قطری باشد؟

اگر A ماتریس نمایش تبدیل خطی $T: V \longrightarrow V$ نسبت به پایه‌ای دلخواه باشد آنگاه مسئله (۱) در حقیقت معادل این سؤال است که آیا پایه‌ای برای V وجود دارد که با تغییر پایه‌ی فوق به پایه جدید، ماتریس تبدیل خطی T نسبت به این پایه جدید قطری باشد؟

اگر جواب مثبت است یعنی $P^{-1}AP$ یک ماتریس قطری است که در آن P ماتریس انتقال است و اگر V فضای ضرب داخلی باشد و پایه‌های در نظر گرفته شده برای V متعامد یکه باشند آنگاه ماتریس انتقال P متعامد خواهد بود بنابراین دو مسئله قبل را می‌توان به صورت زیر بازگو کرد

مسئله ۱: ماتریس مربعی A داده شده است آیا ماتریس معکوس پذیر P وجود دارد که $P^{-1}AP$ قطری باشد؟

مسئله ۲: برای ماتریس مربعی داده شده A آیا ماتریس متعامد P وجود دارد که $P^{-1}AP$ قطری باشد؟

تعریف: ماتریس مربعی A را قابل قطری شدنی گویند، اگر یک ماتریس معکوس پذیر P وجود داشته باشد بطوریکه $P^{-1}AP$ یک ماتریس قطری باشد به ماتریس P ماتریس قطری کننده A گفته می‌شود

قضیه ۳: اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد آنگاه احکام زیر معادلند

الف) ماتریس A قابل قطری شدنی است ب) ماتریس A دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد

(اثبات در کتاب صفحه ۳۲۸)

اثبات قضیه ۳ یک روش عملی برای قطری کردن یک ماتریس مربعی را به ما می‌دهد که به صورت زیر است:

روش عملی برای قطری کردن ماتریس مربعی A: برای قطری کردن یک ماتریس مربعی $n\times n$ مانند A سه عمل زیر را به صورت پیاپی انجام می‌دهیم

عمل اول: برای ماتریس A، n بردار ویژه مستقل خطی $P_1, P_2, \ldots, P_n$ به ترتیب وابسته به مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 و ... و λ_n را بدست می‌آوریم

عمل دوم: بردارهای ویژه مستقل خطی $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ستون‌های ماتریس P را تشکیل می‌دهند یعنی

ماتریس انتقال P عبارت است از $P=[P_1\ P_2 \cdots P_n]$

عمل سوم: ماتریس $P^{-1}AP=D$ یک ماتریس قطری است و عناصر روی قطر D به ترتیب عبارتند از $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (اگر جای ستون‌های P عوض کنیم ترتیب λ_iها هم عوض می‌شود.)

مثال ۱: نشان دهید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ قطری شدنی است و ماتریس P را که A را قطری می‌کند بیابید.

حل: در مثال ۵ دیدیم که مقادیر ویژه ماتریس A عبارت است از $\lambda=5$ و $\lambda=1$ و بردارهای ویژه وابسته به $\lambda=5$ عبارت بودند از $P_1=(-1,1,0)$ و $P_2=(0,0,1)$، همچنین بردارهای ویژه وابسته به $\lambda=1$ عبارت بود از $P_3=(1,1,0)$. بنابراین بدیهی است که مجموعه $\{P_1,P_2,P_3\}$ مستقل خطی اند پس $P=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ ماتریس A را قطری می‌کند و $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}=D$

و همچنین $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&0&2\\1&1&0\end{bmatrix}$ است.

توضیح: یادآوری می‌شود که اگر جای ستون‌های P عوض شود در ماتریس D هم جای مقادیر ویژه عوض می‌شود پس در مثال قبل اگر جای P_2 و P_3 را عوض کنیم یعنی $P=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ آنگاه

$$P^{-1}AP=D=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

مثال ۲: آیا ماتریس $A=\begin{bmatrix}-3&2\\-2&1\end{bmatrix}$ قطری شدنی است؟

حل: $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+3&-2\\2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-1)+4=\lambda^2-\lambda+3\lambda-3+4=0$

$\Rightarrow \lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2=0 \Rightarrow \lambda=-1$ مقدار ویژه ماتریس

$\begin{bmatrix}-1+3&-2\\2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&-2\\2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow 2x-2y=0\Rightarrow\boxed{x=y}$

بردارهای ویژه ماتریس A متناظر با $\lambda=-1$ عبارت است از $(x,y)=x(1,1)$ بنابراین ماتریس A دارای دو بردار ویژه مستقل خطی نیست، که طبق قضیه ۳، A قطری شدنی نمی‌شود پس A قطری شدنی نیست.

نتیجه: اگر $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ باشد A قطری شدنی است هرگاه مجموعه بردارهای ویژه ماتریس A یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ تشکیل دهند. (طبق قضیه ۳ بدیهی است که مجموعه $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ مستقل خطی هستند و تعداد آنها هم n تا هستند و $\dim \mathbb{R}^n = n$ پس این مجموعه یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهند)

در مثال ۱ و ۲ دیدیم که برای ماتریس $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ مجموعه بردارهای ویژه ماتریس A یعنی $\{P_1, P_2, P_3\}$ را چون مستقل خطی هستند پس یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهند ولی در ماتریس $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ چون مجموعه $\{(1,1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ نیست پس A قطری شدنی نیست.

قضیه ۴: اگر α_1 و α_2 و ... و α_n بردارهای ویژه ماتریس A وابسته به مقدارهای ویژه دو به دو متمایز λ_1 و λ_2 و ... و λ_n باشند آنگاه مجموعه $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ مستقل خطی هستند (و بنابراین یک پایه $\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهند به شرطی که $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$)

(اثبات در کتاب صفحه ۳۳۰)

قضیه ۵: اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ روی $\mathbb{R}$ باشد که دارای n مقدار ویژه دو به دو متمایز λ_1 و λ_2 و ... و λ_n است آنگاه ماتریس A قطری شدنی است

اثبات: در قضیه قبل قرار می‌دهیم $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ مستقل خطی است پس ماتریس A قطری شدنی است.

مثال ۳: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ را به صورت قطری بنویسید، بعلاوه اینکه ماتریس قطری کننده P را به دست آورید.

حل:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\left[(\lambda-2)^2 - 3\right] = 0 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = 4$ و $\lambda_2 = 2+\sqrt{3}$ و $\lambda_3 = 2-\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ λ_1 و λ_2 و λ_3 متمایز هستند پس ماتریس A قطری شدنی است و

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

توجه: عکس قضیه ۵ برقرار نیست. یعنی ممکن است A قطری شدنی باشد و مقادیر ویژه، دو به دو متمایز نداشته باشد (مثال ۴ صفحه بعد)

مثال ۱۴: نشان دهید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ قطری شدنی است (هرچند که خودش قطری است)

حل: روش اول: چون خود A قطری است پس با فرض $P=I$ داریم $P^{-1}AP = IAI = A$

روش دوم: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-3 & 0 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ x و y هر دو دلخواه هستند پس

با فرض $x=a$ و $y=b$ داریم $(x,y) = (a,b) = a(1,0) + b(0,1)$

یعنی مجموعه $\{(1,0),(0,1)\}$ یعنی مجموعه بردارهای ویژه ماتریس A مستقل خطی است پس A قطری شدنی است هرچند که A دارای دو مقدار ویژه متمایز نیست.

تعریف: ماتریس $A_{n\times n}$ را قطری شدنی با صورت عمودی نامیم هرگاه ماتریس متعامد P وجود داشته باشد بطوریکه $P^{-1}AP = P^{T}AP = D$ که در آن D ماتریس قطری است و ماتریس P را قطری کننده ماتریس A بطور عمودی می‌نامیم.

قضیه ۶: اگر A ماتریس مربعی $n\times n$ روی $\mathbb{R}$ باشد آنگاه احکام زیر معادل هستند:

الف) ماتریس A بطور عمودی قطری شدنی است

ب) ماتریس A دارای یک مجموعه متعامد یکه شامل n بردار ویژه است

(اثبات در کتاب صفحه ۳۳۱)

قضیه ۷: اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد آنگاه احکام زیر معادل یکدیگر هستند:

الف) ماتریس A بطور عمودی قابل قطری شدنی است، ب) A ماتریس متقارن است

(اثبات صفحه ۳۳۲ کتاب)

قضیه ۸: اگر A یک ماتریس مربعی متقارن روی $\mathbb{R}$ باشد آنگاه بردارهای ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ مربوط به مقادیر ویژه دو به دو متمایز A متعامد هستند. (اثبات در کتاب صفحه ۳۳۲)

روش عملی برای قطری کردن بطور عمودی ماتریس متقارن (طبق قضیه قبل)

عمل اول: برای هر فضای ویژه ماتریس A یک پایه پیدا می‌کنیم

عمل دوم: به کمک فرایند گرام-اشمیت این پایه را متعامد می‌کنیم (یا یک پایه متعامد یکه تبدیل می‌کنیم)

عمل سوم: بردارهای متعامد بدست آمده را ستونهای ماتریس P در نظر می‌گیریم.

آنگاه ماتریس P، ماتریس متقارن A را بطور عمودی قطری می‌کند.

مثال ۵: ماتریس متعامد P را بیابید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$ را قطری کند

حل:

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-2\\-2&\lambda-4&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2}\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-2\\2-\lambda&\lambda-2&0\\2-\lambda&0&\lambda-2\end{vmatrix}=$$

$$(2-\lambda)^2\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-2\\1&-1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2\left[1\begin{vmatrix}-2&-2\\-1&0\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}\lambda-4&-2\\1&-1\end{vmatrix}\right]=$$

$$=(2-\lambda)^2\left[-2+(\lambda-4-2)\right]=(2-\lambda)^2(\lambda-8)=0 < \begin{matrix}\lambda=2\\\lambda=8\end{matrix}$$ مقادیر ویژه

محاسبه بردارهای ویژه وابسته به $\lambda=2$

$$\begin{bmatrix}2-4&-2&-2\\-2&2-4&-2\\-2&-2&2-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow x+y+z=0$$

با فرض $z=c$ و $y=b$ (دلخواه) داریم

$$x=-b-c\Rightarrow (x,y,z)=(-b-c,\ b,\ c)=b(-1,1,0)+c(-1,0,1)$$

پس دو بردار مستقل خطی ویژه وابسته به $\lambda=2$ عبارت است از $\alpha_1=(-1,1,0)$ و $\alpha_2=(-1,0,1)$

یعنی فضای ویژه ماتریس A وابسته به $\lambda=2$ عبارت است از: $\langle\{\alpha_1,\alpha_2\}\rangle$

محاسبه بردارهای ویژه ماتریس A وابسته به $\lambda=8$

$$\begin{bmatrix}8-4&-2&-2\\-2&8-4&-2\\-2&-2&8-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_3+R_2\to R_2]{2R_3+R_1\to R_1}$$

$$\begin{bmatrix}0&-6&6\\0&6&-6\\-2&-2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{6}R_2,\ \frac{1}{2}R_3]{R_2+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+R_3\to R_3}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y-z=0\\-x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=z\\x=z\end{cases}$$

با فرض $z=c$ دلخواه داریم:

بردارهای ویژه ماتریس A وابسته به $\lambda=8$: $(x,y,z)=(c,c,c)=c(1,1,1)$

بنابراین مجموعه $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=(1,1,1)\}$ تشکیل یک پایه برای فضای ویژه ماتریس A می‌دهد

با مجموعه $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می دهد

با فرایند گرام - اشمیت این پایه را با یک پایه متعامد تبدیل می کنیم.

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$$

$$\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle = (-1,0,1)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2 - \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle \beta_1}{\|\alpha_2 - \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle \beta_1\|} = \frac{(-1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}} = \frac{(-1,-1,2)}{\sqrt{6}}$$

زیرا

$$(-1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = (-1,0,1) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\Longrightarrow \beta_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$$

$$\beta_3 = \frac{\alpha_3 - \langle \alpha_3, \beta_1 \rangle \beta_1 - \langle \alpha_3, \beta_2 \rangle \beta_2}{\|\alpha_3 - \langle \alpha_3, \beta_1 \rangle \beta_1 - \langle \alpha_3, \beta_2 \rangle \beta_2\|} = \frac{(1,1,1) - 0 - \frac{1}{\sqrt{6}}(0)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

زیرا

$$\alpha_3 - \langle \alpha_3, \beta_1 \rangle \beta_1 - \langle \alpha_3, \beta_2 \rangle \beta_2 = (1,1,1) - 0 - 0 = (1,1,1)$$

$$\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle = (1,1,1)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = 0$$

$$\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle = (1,1,1)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, 2\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}} = 0.$$

بنابراین می توان نوشت

$$P^TAP = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = P^T = P^{-1}$$

قضیه ۹: الف) معادله مشخص یک ماتریس متقارن A فقط دارای ریشه های حقیقی است.

ب) اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس متقارن A باشد که k بار ریشه مکرر معادله مشخص A است آنگاه فضای ویژه مربوط به این مقدار ویژه k بعدی است؛ یعنی اگر W فضای ویژه ماتریس متقارن A وابسته به λ باشد آنگاه $\dim W = k$.

مثال ۶: بعد فضاهای ویژه مربوط به مقدارهای ویژه ماتریس متقارن

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

را بدست آورید.

حل: ماتریس A را می توان به صورت $A = \left[\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$ نوشت. B ماتریس 2×2 و C ماتریس 3×3 است.

$$\det(\lambda I_{5\times5} - A) = \det(\lambda I_{2\times2} - B)\cdot\det(\lambda I_{3\times3} - C) = 0$$

$$\det(\lambda I_{2\times2} - B) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda - 3 = \pm 1 \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \lambda = 4 \\ \lambda = 2 \end{array}}$$

ادامه در صفحه بعد

$$\det(\lambda I - C) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2\left[1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right] = (1-\lambda)^2[-1-(2-\lambda+1)] = (1-\lambda)^2(\lambda-4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \ , \ \lambda = 4$$

$$\Rightarrow \det(\lambda I - A) = (\lambda-4)^2(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 4 \rightarrow \text{دوبار تکرار} \quad K=2 \text{ باتکرار} \\ \lambda = 1 \rightarrow \text{دوبار تکرار} \quad K=2 \text{ باتکرار} \end{cases}$$

بنابراین طبق قضیه قبل بعد فضای ویژه ماتریس متقارن A نسبت به $\lambda=4$ و همچنین $\lambda=1$ برابر با ۲ است و بعد فضای ویژه ماتریس متقارن A نسبت به $\lambda=2$ برابر عدد ۱ است.

مثال ۷: بعد فضاهای ویژه مربوط با مقدارهای ویژه ماتریس

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$ را بدست آورید.

حل: اگر $B = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$\det(\lambda I_{4\times4} - A) = \det(\lambda I_{2\times2} - B)\cdot\det(\lambda I_{2\times2} - C) = (\lambda-4)^2(\lambda^2+3) = 0$$

زیرا

$$\det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda-10 & 9 \\ -4 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-10)(\lambda+2)+36 = \lambda^2+2\lambda-10\lambda-20+36 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda-4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \quad (K=2 \text{ باتکرار})$$

$$\det(\lambda I - C) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 7 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)+7 = \lambda^2-4+7 = \lambda^2+3 = 0$$

روی $\mathbb{R}$ دارای ریشه نیست

بنابراین نمی‌توان از قضیه قبل بعد فضای خاص ماتریس را یافت زیرا ماتریس A متقارن نیست.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4-10 & 9 & 0 & 0 \\ -4 & 4+2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4+2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 4-2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} -6 & 9 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{6}{4}R_2+R_1\to R_1]{6R_4+R_3\to R_3} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x+6y=0 \\ 19t=0 \\ -z+2t=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z=t=0 \\ x=\frac{3}{2}y \end{cases}$$

با فرض $y=2b$ (b دلخواه) داریم:

$$(x,y,z,t) = (3b, 2b, 0, 0) = b(3,2,0,0)$$

پس بعد فضای ویژه ماتریس A نسبت به $\lambda=4$ برابر با یک است.

کاربرد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه برای ماتریس های متشابه:

یادآوری: در فصل تبدیل خطی دو ماتریس متشابه را تعریف کردیم و گفتیم که دو ماتریس مربعی A و B را متشابه نامیم هرگاه ماتریس مربعی و معکوس پذیر P وجود داشته باشد که $B=P^{-1}AP$.

و دیدیم که اگر $T: V \longrightarrow V$ یک عملگر خطی باشد که در آن $\vec{V}$ یک فضای برداری با بعد متناهی است در این صورت دو ماتریس نمایش عملگر خطی T نسبت به دو پایه متفاوت برای $\vec{V}$ متشابه هستند.
و اگر A و B دو ماتریس متشابه باشند آنگاه $\det A = \det B$.

قضیه ۱۰. ماتریس $A_{n\times n}$ با یک ماتریس قطری متشابه است $\Longleftrightarrow$ بردارهای ویژه ماتریس A فضای برداری $\mathbb{R}^n$ را تولید کنند (یعنی ماتریس A دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد)
(این قضیه به نوعی صورت دیگر قضیه ۴ است).

طبق این قضیه و مثال های ۱ و ۳ و ۵ بدیهی است که $A=\begin{bmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ با ماتریس قطری $D=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ متشابه است.

و $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\3&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$ با ماتریس قطری $D=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2+\sqrt{3}&0\\0&0&2+\sqrt{3}\end{bmatrix}$ متشابه است

ماتریس $A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$ با ماتریس قطری $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{bmatrix}$ متشابه است.

نتیجه ۱: دو ماتریس قطری متشابه هستند $\Longleftrightarrow$ اختلاف آنها در ترتیب اعضای قطری آنها باشند زیرا اعضای روی قطر ماتریس قطری مقدارهای ویژه یک عملگر خطی هستند.

نتیجه ۲: اگر مقادیر ویژه دو ماتریس A و B یکی باشند آنگاه A و B متشابه هستند.

مثال ۸: نشان دهید که ماتریس های $A=\begin{bmatrix}-10&6&3\\-26&16&8\\16&-10&-5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0&-6&-16\\0&17&45\\0&-6&-16\end{bmatrix}$ متشابه هستند.

حل: نشان می دهیم که مقادیر ویژه این دو ماتریس یکی هستند.

$$\det(\lambda I-B)=\begin{vmatrix}\lambda&6&16\\0&\lambda-17&-45\\0&6&\lambda+16\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-17&-45\\6&\lambda+16\end{vmatrix}=\lambda\left[(\lambda-17)(\lambda+16)+270\right]=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=0 \ , \ \lambda^2-\lambda-272+270=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \Rightarrow$$

$$\lambda_2=-1,\ \lambda_3=2$$

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+10&-6&-3\\26&\lambda-16&-8\\-16&10&\lambda+5\end{vmatrix}=(\lambda+10)\begin{vmatrix}\lambda-16&-8\\10&\lambda+5\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}26&-8\\-16&\lambda+5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}26&\lambda-16\\-16&10\end{vmatrix}$$

$= (\lambda+10)[(\lambda-16)(\lambda+5)-80] + 6(26\lambda+130-128) - 3(260+16\lambda-256) =$

$(\lambda+10)(\lambda^2-11\lambda)+156\lambda+\cancel{12}-48\lambda-\cancel{12} = \lambda^3-11\lambda^2+10\lambda^2+110\lambda+108\lambda = \lambda(\lambda^2-\lambda-2\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1=0 ,\ \lambda^2-\lambda-2\lambda=(\lambda+1)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda_3=2 ,\ \lambda_2=-1$

چون مقادیر ویژه این دو ماتریس با هم یکی هستند پس دو ماتریس A و B متشابه هستند.

مثال ۹: ماتریس قطری متشابه با ماتریس های (الف) $B=\begin{bmatrix}1&-5\\1&-1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}-1&6&-12\\0&-13&30\\0&-9&20\end{bmatrix}$ را بیابید:

حل (الف) $\det(\lambda I-B)=\begin{vmatrix}\lambda-1&5\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)+5=\lambda^2-1+5=\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda_1=-2i ,\ \lambda_2=2i$

اگر ماتریس B را روی میدان $\mathbb{C}$ در نظر بگیریم با ماتریس قطری $D=\begin{bmatrix}2i&0\\0&-2i\end{bmatrix}$ متشابه است زیرا λ_1 و λ_2 متمایز هستند (طبق قضیه ۵)

ولی اگر ماتریس B را روی میدان $\mathbb{R}$ و یا $\mathbb{Q}$ در نظر بگیریم در این صورت ماتریس B قطری شدنی نیست، و ماتریس قطری متشابه با B وجود ندارد.

حل ب) $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+1&-6&12\\0&\lambda+13&-30\\0&9&\lambda-20\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda+13&-30\\9&\lambda-20\end{vmatrix}=(\lambda+1)[\lambda^2-7\lambda-260+270]=0$

$\lambda+1=0$ و $\lambda^2-7\lambda+10=0 \Rightarrow \lambda_1=-1 ,\ (\lambda-2)(\lambda-5)=0 \Rightarrow \lambda_2=2 ,\ \lambda_3=5$

چون λ_1 و λ_2 و λ_3 متمایز هستند پس طبق قضیه ۵، A قطری شدنی است و با ماتریس قطری $D=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ متشابه است.

تمرین: ماتریس معکوس پذیر P را طوری بیابید که $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ (در مثال ۹ یعنی $A=\begin{bmatrix}-1&6&-12\\0&-13&30\\0&-9&20\end{bmatrix}$)

مثال ۱۰: ماتریس قطری متشابه با ماتریس $C=\begin{bmatrix}17&-10&-5\\45&-28&-15\\-30&20&12\end{bmatrix}$ در صورت وجود بیابید:

حل: $\det(\lambda I-C)=\begin{vmatrix}\lambda-17&10&5\\-45&\lambda+28&15\\30&-20&\lambda-12\end{vmatrix} \xrightarrow[2R_1+R_3\to R_3]{-3R_1+R_2\to R_2} \begin{vmatrix}\lambda-17&10&5\\-3\lambda+6&\lambda-2&0\\2\lambda-4&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\begin{vmatrix}\lambda-17&10&5\\-3&1&0\\2&0&1\end{vmatrix}=$

$(\lambda-2)^2\left[2\begin{vmatrix}10&5\\1&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}\lambda-17&10\\-3&1\end{vmatrix}\right]=(\lambda-2)^2[-10+\lambda-17+30]=(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0$

$\lambda_1=2$ با تکرار $k=2$ و $\lambda_2=-3$

چون مقادیر ویژه متمایز نیستند از قضیه ۱۰ کمک می‌گیریم و بردارهای ویژه ماتریس C را می‌یابیم:

محاسبه بردارهای ویژه ماتریس C وابسته به $\lambda = 2$ ؛

$$(\lambda I - C)X = \begin{bmatrix} 2-17 & 10 & 5 \\ -45 & 2+28 & 15 \\ 30 & -20 & 2-12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -15 & 10 & 5 \\ -45 & 30 & 15 \\ 30 & -20 & -10 \end{bmatrix} \underset{-\frac{1}{5}R_1}{\overset{2R_1+R_3 \to R_3}{\underset{-3R_1+R_2 \to R_2}{\sim}}} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$3x - 2y - z = 0 \Longrightarrow x = a,\ y = b$ دلخواه $z = 3a - 2b \Rightarrow (x,y,z) = (a, b, 3a-2b) \Longrightarrow$

$(x,y,z) = a(1,0,3) + b(0,1,-2) \Rightarrow$ بردارهای ویژه وابسته به $\lambda = 2$ عبارت است از $(1,0,3)$ و $(0,1,-2)$

محاسبه بردارهای ویژه ماتریس C وابسته به $\lambda = -3$

$$(-3I - C)X = \begin{bmatrix} -3-17 & 10 & 5 \\ -45 & -3+28 & 15 \\ 30 & -20 & -3-12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -20 & 10 & 5 \\ -45 & 25 & 15 \\ 30 & -20 & -15 \end{bmatrix} \underset{-\frac{1}{5}R_2}{\overset{-\frac{1}{5}R_1}{\sim}} ,\ \frac{1}{5}R_3 \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 9 & -5 & -3 \\ 6 & -4 & -3 \end{bmatrix} \overset{-3R_1+R_2 \to R_2}{\underset{-3R_1+R_3 \to R_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{-R_3+R_2 \to R_2}{\underset{2R_3+R_1 \to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - z = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

x دلخواه

$\boxed{x = a}$

$z = -2a$

$y = 2a$

$(x, y, z) = (a, 2a, -2a) = a(1, 2, -2)$ پس بردار ویژه وابسته به $\lambda = -3$ عبارت است از $(1,2,-2)$

بنابراین مجموعه $\{(1,0,3), (0,1,-2), (1,2,-2)\}$ فضای $\mathbb{R}^3$ را (طبق قضیه ۱۰) را تولید می‌کند

پس ماتریس C با ماتریس قطری $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ متشابه است.

قضیه ۱۱ (قضیه کیلی هامیلتون) هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در معادله مشخصه خود صدق می‌کند.
به عبارت دیگر اگر معادله مشخصه ماتریس A به صورت زیر باشد

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n+1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

آنگاه $A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_n I = 0$

$$0 = \det(AI - A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_n I = 0$$

توجه: از قضیه کیلی هامیلتون می‌توان توانهای ماتریس A و همچنین معکوس ماتریس A (در صورت وجود) پیدا کرد.

برای محاسبه A^k برای $k \geq n$ به صورت زیر A^k را به صورت یک چندجمله‌ای برحسب A با درجه حداکثر $(n-1)$ نوشت

$$A^{k-n}(A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_nI) = A^k + a_1A^{k-1} + \cdots + a_nA^{k-n} = 0$$

مثال ۱۱: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1\end{bmatrix}$ آنگاه مطلوب است محاسبه A^9 و A^{12}.

حل:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda-2 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)-2 = \lambda^2-3\lambda+2-2 = \lambda^2-3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - 3A = 0 \Rightarrow \boxed{A^2 = 3A} \Rightarrow A^3 = 3A^2 = 3(3A) = 3^2A \text{ و } A^4 = 3^2A^2 = 3^2(3A)$$

$$\Rightarrow A^4 = 3^3A \Rightarrow \boxed{\forall n \quad A^n = 3^{n-1}A} \Rightarrow A^9 = 3^8A \text{ و } A^{12} = 3^{11}A$$

مثال ۱۲: اگر $A=\begin{bmatrix}-4 & 6\\ -3 & 5\end{bmatrix}$ آنگاه A^7 را بیابید.

حل:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda+4 & -6\\ 3 & \lambda-5\end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda-5)+18 = \lambda^2-\lambda-20+18 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow A^2-A-2I=0 \Rightarrow \boxed{A^2 = A+2I}$$

$$A^4 = (A+2I)^2 = A^2+4A+4I = (A+2I)+4A+4I = 5A+6I$$

$$A^3 = A^2+2A = (A+2I)+2A = 3A+2I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A^4 = 5A+6I}$$

$$A^7 = A^4A^3 = (5A+6I)(3A+2I) = 15A^2+28A+12I$$

$$\boxed{A^3 = 3A+2I}$$

$$\Rightarrow A^7 = 15(A+2I)+28I+12I = 43A+42I \Rightarrow \boxed{A^7 = 43A+42I}$$

$$A^7 = 43\begin{bmatrix}-4 & 6\\ -3 & 5\end{bmatrix} + 42\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-130 & 258\\ -129 & 257\end{bmatrix}$$

توضیح: اگر $A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI = 0$ آنگاه $\lambda^n + a_1A^{n-1}$

همچنین $a_n = (-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

$a_n = (-1)^n\det A$

زیرا اگر λ_1 و λ_2 و ... و λ_n ریشه‌های معادله مشخصه باشد (یعنی مقادیر ویژه ماتریس A باشند) آنگاه با کمک تجزیه داریم:

$$\lambda^n + a_1A^n + \cdots + a_{n-1}A + a_nI = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$\Rightarrow a_n = (-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n) = (-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

بنابراین اگر $a_n = 0$ آنگاه $\det A = 0$ و ماتریس A معکوس ندارد. پس اگر $a_n \neq 0$ آنگاه می‌توان معکوس ماتریس A را یافت.

(ادامه در صفحه بعد)

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \Rightarrow A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_n I = 0$$

$$\Rightarrow a_n I = -(A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A) \xrightarrow[A^{-1}]{\text{ضرب در}} a_n A^{-1} = -(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \cdots + a_{n-1} I)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{a_n}\left[A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \cdots + a_{n-1} I\right]$$

مثال ۱۳: معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\4&0&1\end{bmatrix}$ در صورت وجود بیابید.

حل:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\-4&0&\lambda-1\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}\lambda&-1\\0&\lambda-1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}0&-1\\-4&0\end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)-4=0$$

$$\Rightarrow \lambda^3-\lambda^2-4=0 \Rightarrow A^3 - A^2 - 4I = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2-A)$$

زیرا

$$A^3 - A^2 = 4I \Rightarrow A^{-1}(A^3-A^2) = 4A^{-1} \Rightarrow 4A^{-1} = A^2 - A$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2-A)$$

ماتریس مربعی

توجه: برای محاسبه توان‌های A می‌توان از تشابه معادل A با یک ماتریس قطری هم استفاده کرد زیرا اگر A با ماتریس قطری D متشابه باشد در این صورت ماتریس معکوس پذیر P وجود دارد که $P^{-1}AP=D$ بنابراین $A=PDP^{-1}$ پس $A^n = PD^nP^{-1}$

و داریم که ستون‌های P همان بردارهای ویژه ماتریس A است.

مثال ۱۴: در مثال ۱۲، A^7 را به کمک توجه بالا بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-4&6\\-3&5\end{bmatrix}$$

حل: در مثال ۱۲ دیدیم که $\det(\lambda I - A) = \lambda^2-\lambda-2=0$ بنابراین $(\lambda-2)(\lambda+1)=0$ پس $\lambda=2$ و $\lambda=-1$

کافی است ماتریس P را بدست آوریم پس بردارهای ویژه وابسته با $\lambda=2$ و $\lambda=-1$ را بدست می‌آوریم.

محاسبه بردارهای ویژه متناظر با $\lambda=-1$

$$(-I-A)X = \begin{bmatrix}-1+4&-6\\3&-1-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}3&-6\\3&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow 3x-6y=0 \Rightarrow x=2y \Rightarrow (x,y)=(2y,y)=y(2,1)$$

$(2,1)$ بردار ویژه وابسته با $\lambda=-1$ است

محاسبه بردارهای ویژه متناظر با $\lambda=2$

$$(2I-A)X = \begin{bmatrix}2+4&-6\\3&2-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}6&-6\\3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow 6x-6y=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow$ (۱،۱) بردار ویژه وابسته به $\lambda=2$ است.

$(x,y)=(x,x)=x(1,1)$

پس $P=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$ و $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}$ پس $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}\Rightarrow A=P\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}P^{-1}$

$$\Rightarrow A^7=P\begin{bmatrix}(-1)^7&0\\0&2^7\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&128\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-130&258\\-129&257\end{bmatrix}$$

قضیه ۱۲: (تجزیه طیفی) اگر A ماتریس متقارن $k\times k$ باشد آنگاه $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\beta_i\beta_i^T$

که در آن $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ مقادیر ویژه ماتریس A (طبق قضیه ۹ همه مقادیر ویژه ها حقیقی هستند) و $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ بردارهای ویژه وابسته به ترتیب به مقدار ویژه $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ هستند که با روش گرام-اشمیت به بردارهای $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k$ تبدیل شده اند و بنابراین برای هر i داریم $\beta_i^T\beta_i=1$ و برای $i\neq j$، $\beta_i^T\beta_j=0$

رابطه $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\beta_i\beta_i^T$ را تجزیه طیفی ماتریس A نامیده می شود.

مثال ۱۵: تجزیه طیفی ماتریس $A=\begin{bmatrix}13&-4&2\\-4&13&-2\\2&-2&10\end{bmatrix}$ را بنویسید.

حل:

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-13&4&-2\\4&\lambda-13&2\\-2&2&\lambda-10\end{vmatrix}\xrightarrow[2C_3+C_2\to C_2]{C_2+C_1\to C_1}\begin{vmatrix}\lambda-9&0&-2\\\lambda-9&\lambda-9&2\\0&2\lambda-18&\lambda-10\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda-9)^2\begin{vmatrix}1&0&-2\\1&1&2\\0&2&\lambda-10\end{vmatrix}=(\lambda-9)^2\left[1(\lambda-10-4)-2(2-0)\right]=(\lambda-9)^2(\lambda-18)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\lambda=9 & k=2\ \text{با تکرار} \\ \lambda=18 & \end{matrix}\ \text{مقادیر ویژه ماتریس}}$$

محاسبه بردارهای ویژه متناظر با $\lambda=9$:

$$\lambda=9\Rightarrow\begin{bmatrix}-4&4&-2\\4&-4&2\\-2&2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[2R_3+R_2\to R_2]{-2R_3+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-2&2&-1\end{bmatrix}\Rightarrow -2x+2y-z=0 \Rightarrow z=-2x+2y$$

با فرض $a=x$ و $y=b$ داریم

$(x,y,z)=(a,b,-2a+2b)=a(1,0,-2)+b(0,1,2)$

پس $\alpha_1=(1,0,-2)$ و $\alpha_2=(0,1,2)$ بردارهای ویژه متناظر با $\lambda=9$ هستند.

محاسبه بردارهای ویژه متناظر با $\lambda=18$:

$$\lambda=18\Rightarrow\begin{bmatrix}5&4&-2\\4&5&2\\-2&2&8\end{bmatrix}\xrightarrow[4R_1+R_3\to R_3]{R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}5&4&-2\\9&9&0\\18&18&0\end{bmatrix}\xrightarrow[-2R_2+R_3\to R_3]{\frac{1}{9}R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5R_2+R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y-2z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2z \\ x=-y \end{cases}$$

$y=b$ دلخواه

$(x,y,z)=(-b,b,-2b) \Rightarrow b(-1,1,-2) \Rightarrow$

پس بردار $\alpha_3=(-1,1,-2)$ بردار ویژه متناظر با $\lambda=18$ است.

حال باید $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ را با روش فرایند گرام-اشمیتس به یک پایه متعامد تبدیل می‌کنیم.

$\|\alpha_1\|=\sqrt{0+1+4}=\sqrt{5}$

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt5}(1,0,-2)=\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)$$

$$\beta_2=\frac{\alpha_2-\langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1}{\|\alpha_2-\langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1\|}=\frac{(0,1,2)+\frac{4}{\sqrt5}\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)}{\|(\frac45,1,\frac25)\|}=\frac{(\frac45,1,\frac25)}{\sqrt{\frac{16}{25}+1+\frac{4}{25}}}$$

$$\boxed{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle=(0,1,2)\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)=0+0-\frac{4}{\sqrt5}}$$

$$\Rightarrow \beta_2=\frac{\sqrt5}{3}\left(\frac45,1,\frac25\right)=\left(\frac{4\sqrt5}{15},\frac{\sqrt5}{3},\frac{2\sqrt5}{15}\right)$$

$$\beta_3=\frac{\alpha_3-\langle\alpha_3,\beta_1\rangle\beta_1-\langle\alpha_3,\beta_2\rangle\beta_2}{\|\alpha_3-\langle\alpha_3,\beta_1\rangle\beta_1-\langle\alpha_3,\beta_2\rangle\beta_2\|}=\frac{(-1,1,-2)-\frac{3}{\sqrt5}\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)-\frac{\sqrt5}{5}\beta_2}{\|(-1,1,-2)-\frac{3}{\sqrt5}\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)-\frac{\sqrt5}{5}\beta_2\|}$$

$$\langle\alpha_3,\beta_2\rangle=(-1,1,-2)\cdot\left(\frac{4\sqrt5}{15},\frac{\sqrt5}{3},\frac{2\sqrt5}{15}\right)=-\frac{4\sqrt5}{15}+\frac{\sqrt5}{3}-\frac{4\sqrt5}{15}=\frac{-3\sqrt5}{15}=-\frac{\sqrt5}{5}$$

$$\langle\alpha_3,\beta_1\rangle=(-1,1,-2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)=-\frac{1}{\sqrt5}+\frac{4}{\sqrt5}=\frac{3}{\sqrt5}$$

$$-\frac{\sqrt5}{5}\beta_2=\left(\frac{4\sqrt5}{15},\frac{\sqrt5}{3},\frac{2\sqrt5}{15}\right)\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right)=\left(-\frac{4}{15},-\frac13,-\frac{2}{15}\right)$$

$$-\frac{3}{\sqrt5}\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)=\left(-\frac35,0,\frac65\right)$$

$$\Rightarrow \beta_3=\frac{\left(-1-\frac35-\frac{4}{15},\ 1+0-\frac13,\ -2+\frac65-\frac{2}{15}\right)}{\sqrt{\left(\frac{-28}{15}\right)^2+\frac49+\left(\frac{-14}{15}\right)^2}}=\frac{\left(\frac{-28}{15},\frac23,\frac{-14}{15}\right)}{2\frac{\sqrt6}{\sqrt5}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta_3=\left(\frac{-14\sqrt5}{15\sqrt6},\frac{\sqrt5}{3\sqrt6},\frac{-7\sqrt5}{15\sqrt6}\right)}$$

$$\Rightarrow \beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt5},0,\frac{-2}{\sqrt5}\right),\ \beta_2=\left(\frac{4\sqrt5}{15},\frac{\sqrt5}{3},\frac{2\sqrt5}{15}\right),\ \beta_3=\left(\frac{-14\sqrt5}{15\sqrt6},\frac{\sqrt5}{3\sqrt6},\frac{-7\sqrt5}{15\sqrt6}\right)$$

$$A=\lambda_1\beta_1\beta_1^T+\lambda_2\beta_2\beta_2^T+\lambda_3\beta_3\beta_3^T=9\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\0\\-\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&0&-\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}+$$

$$+9\begin{bmatrix}\frac{4\sqrt5}{15}\\\frac{\sqrt5}{3}\\\frac{2\sqrt5}{15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4\sqrt5}{15}&\frac{\sqrt5}{3}&\frac{2\sqrt5}{15}\end{bmatrix}+18\begin{bmatrix}\frac{-14\sqrt5}{15\sqrt6}\\\frac{\sqrt5}{3\sqrt6}\\\frac{-7\sqrt5}{15\sqrt6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-14\sqrt5}{15\sqrt6}&\frac{\sqrt5}{3\sqrt6}&\frac{-7\sqrt5}{15\sqrt6}\end{bmatrix}$$

$$=9\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&-\frac{2}{5}\\0&0&0\\-\frac{2}{5}&0&\frac{4}{5}\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}\frac{16}{45}&\frac{4}{9}&\frac{8}{45}\\\frac{4}{9}&\frac{5}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{8}{45}&\frac{2}{9}&\frac{4}{45}\end{bmatrix}+18\begin{bmatrix}\ &\ &\ \end{bmatrix}$$

تبصره: در مثال قبل می‌توانستیم دستگاه‌های همگن که جواب‌های آن بردارهای ویژه بودند با ثابت فرض کردن متغیرهای دیگری حل کنیم در واقع پایه دیگری برای فضای جواب دستگاه همگن پیدا کنیم در این صورت تجزیه طیفی ماتریس A تغییر می‌کرد. یعنی تجزیه طیفی ماتریس A منحصر به فرد نیست: اگر $\alpha_1=(1,1,0)$ و $\alpha_2=(-1,1,4)$ در نظر می‌گرفتیم (یعنی z و y را دلخواه فرض می‌کردیم) و $\alpha_3=(2,-2,1)$ انتخاب می‌کردیم (یعنی z را دلخواه فرض می‌کردیم)، در این صورت پایه $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ با فرایند گرام اشمیت به پایه متعامد یکه تبدیل می‌شود.

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0),\ \beta_2=\frac{1}{\sqrt{18}}(-1,1,4),\ \beta_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)$$

پس تجزیه طیفی A به صورت زیر درمی‌آید:

$$A=9\times\left(\frac12\right)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}+9\times\left(\frac{1}{18}\right)\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&4\end{bmatrix}+18\left(\frac19\right)\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac92\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac12\begin{bmatrix}1&-1&-4\\-1&1&4\\-4&4&16\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}4&-4&2\\-4&4&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$$

کاربرد تجزیه طیفی ماتریس

① با استفاده از تجزیه طیفی می‌توان ثابت کرد که ماتریس متقارن A معین مثبت است اگر و فقط اگر مقادیر ویژه ماتریس A مثبت باشند و همچنین ماتریس متقارن A معین نامنفی است اگر و فقط اگر مقادیر ویژه ماتریس A بزرگتر یا مساوی صفر باشند.

② با استفاده از تجزیه طیفی می‌توان معکوس یک ماتریس مربعی را برحسب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه بیان نمود و همچنین ریشه دوم (جذر) یک ماتریس را محاسبه کرد.

③ قضیه تجزیه طیفی، ابزار تحلیلی بسیار مهمی است که در آمار کاربرد فراوانی دارد و به وسیله آن آن دسته از ماتریس‌های مشخصی را تشریح می‌کند.

تعریف: اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $X^T=[x_1\ x_2 \dots x_n]$ آنگاه X^TAX را صورت درجه دوم ماتریس A گویند (در انتهای فصل به این مطلب پرداخته شده)

مثال ۱۶: نشان دهید که صورت درجه دوم $3x_1^2+2x_2^2-2\sqrt{2}x_1x_2$ معین مثبت است.

حل: قرار می‌دهیم $A=\begin{bmatrix}3 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 2\end{bmatrix}$ بنابراین

$$X^TAX=[x_1\ x_2]\begin{bmatrix}3 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=3x_1^2+2x_2^2-2\sqrt{2}x_1x_2$$

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-2)-2=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-4)(\lambda-1)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=4$$

طبق تجزیه طیفی A داریم: $A=4\beta_1\beta_1^T+1\beta_2\beta_2^T$ که در آن β_1 و β_2 به ترتیب بردارهای ویژه متعامد یکه به دست آمده از فرایند گرام اشمیت مربوط به بردارهای ویژه وابسته با $\lambda=4$ و $\lambda=1$ هستند. از این رو داریم:

$$X^TAX=4X^T\beta_1\beta_1^TX+X^T\beta_2\beta_2^TX=4y_1^2+y_2^2\geq 0$$

که در آن $y_1=X^T\beta_1=\beta_1^TX$ و $y_2=X^T\beta_2=\beta_2^TX$ است. اینک نشان می‌دهیم که y_1 و y_2 هر دو با هم صفر نیستند که در نتیجه $X^TAX=4y_1^2+y_2^2>0$ یعنی A و یا صورت درجه دوم آن معین مثبت است.

برای اینکه نشان دهیم که y_1 و y_2 با هم صفر نیستند از تعریف های y_1 و y_2 استفاده می‌کنیم و نتیجه را به صورت

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1^T\\ \beta_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$ یا $Y=EX$ که در آن E ماتریس متعامد است و در نتیجه $X=E^TY$ و چون X بردار غیرصفر است پس $X=E^TY\neq 0$ پس $Y\neq 0$.

مثال ۱۷: با استفاده از تجزیه طیفی معکوس ماتریس A را بیابید که در آن یک ماتریس معین مثبت $k\times k$ است.

حل: می دانیم که (طبق تجزیه طیفی) $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P_i P_i^T$. فرض کنید که P ماتریسی باشد که ستونهای آن بردارهای ویژه متعامد نرمال A باشد که از فرا اینه کرام - اشمیت بدست آمده اند یعنی $P=[P_1 P_1 \cdots P_k]$ آنگاه

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P_i P_i^T = PDP^T$$ که در آن D ماتریس قطری است و $PP^T=P^TP=I$

و $D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 \cdots & 0\\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & \lambda_k\end{bmatrix}$ که در آن $\lambda_i>0$ بنابراین $A^{-1}=PD^{-1}P^T=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}P_iP_i^T$

$$(PD^{-1}P^T)(PAP^T)=PD^{-1}IDP^T=PD^{-1}DP^T=PP^T=I$$

تعریف: ماتریس $A^{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\lambda_i}P_iP_i^T=PD^{\frac{1}{2}}P^T$ را ریشه دوم (جذر) ماتریس A گویند و دارای ویژگی های زیر است.

الف) $(A^{\frac{1}{2}})^T=A^{\frac{1}{2}}$ یعنی $A^{\frac{1}{2}}$ متقارن است.

ب) $A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}=A$

ج) $(A^{\frac{1}{2}})^{-1}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}P_iP_i^T=PD^{-\frac{1}{2}}P^T$ که در آن $D^{-\frac{1}{2}}$ یک ماتریس قطری است و عناصر روی قطر عبارتند از $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$

د) $A^{-\frac{1}{2}}=(A^{\frac{1}{2}})^{-1}$ که در آن $A^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}=A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}=I$

مثال ۱۸: فرض کنید که $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. نشان دهید که:

الف) ماتریس A قابل قطری شدن است، اگر $(a-d)^2+4bc>0$ باشد.

ب) ماتریس A قابل قطری شدن نیست، اگر $(a-d)^2+4bc<0$ باشد.

حل: معادله مشخصه ی ماتریس A را بدست می آوریم.

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-d)-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$$

$$\Delta=(a+d)^2-4\times1\times(ad-bc)=a^2+d^2+\underbrace{2ad-4ad}_{-2ad}+4bc=(a-d)^2+4bc$$

اگر $\Delta>0$ یعنی $(a-d)^2+4bc>0$ آنگاه معادله مشخصه دارای دو ریشه متمایز (دو مقدار ویژه متمایز) است و طبق قضیه ۵ ماتریس A قابل قطری شدن است.

اگر $\Delta<0$ آنگاه معادله مشخصه دارای ریشه حقیقی نیست در نتیجه A قابل قطری شدن نیست.

مثال ۱۹: برای ماتریس های زیر ماتریس P را طوری پیدا کنید که ماتریس داده شده بطور عمودی قطری کند سپس P^TAP را نیز بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}5 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

حل الف) $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)-27=\lambda^2+\lambda-5\lambda-5-27=0$

مقدارهای ویژه ماتریس A $\Rightarrow \lambda^2-4\lambda-32=(\lambda+4)(\lambda-8)=0 \Rightarrow \lambda=-4,\ \lambda=8$

$$\lambda=-4 \Rightarrow \begin{bmatrix}-4-5 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & -4+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-9x-3\sqrt{3}y=0\\ -3\sqrt{3}x-3y=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=-\sqrt{3}x \Rightarrow x=a \Rightarrow (x,y)=(a,-\sqrt{3}a)=a(1,-\sqrt{3}) \xRightarrow{a=-\frac{1}{\sqrt{3}}} \alpha_2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$$

$$\lambda=8 \Rightarrow \begin{bmatrix}8-5 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 8+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3x-3\sqrt{3}y=0\\ -3\sqrt{3}x+9y=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x \xRightarrow{x=a} \left(a, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)=a\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \xRightarrow{a=\sqrt{3}} \alpha_1=(\sqrt{3},1)$$

بردارهای ویژه وابسته به $\lambda=8$

$\Rightarrow S=\left\{\alpha_1=(\sqrt{3},1),\ \alpha_2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)\right\}=$ یک پایه برای فضای ویژه ماتریس A

با فرایند گرام-اشمیت این پایه را به یک پایه متعامد یکه تبدیل می کنیم.

$$\|\alpha_1\|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2 \Rightarrow \beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\beta_2=\frac{\alpha_2-\langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1}{\|\alpha_2-\langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1\|}=\frac{\alpha_2-0}{\|\alpha_2\|}=\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}},\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\langle\alpha_2,\beta_1\rangle=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1=0$$

$$\|\alpha_2\|=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow S'=\left\{\beta_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\ \beta_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$ پایه متعامد برای فضای ویژه ماتریس A.

$$\Rightarrow P=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},\ P^TAP=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$$

P ماتریس بطور عمودی قطری کننده A است.

Scanned by CamScanner

حل ب)

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xrightarrow[-c_3+c_2 \to c_2]{-c_3+c_1 \to c_1} \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & 1 \\ -\lambda+3 & -\lambda+3 & \lambda-2 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda-3)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 \left[1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right] = (\lambda-3)^2 \left[\lambda-2+1+1 \right] = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 0 , \lambda = 3$ مقادیر ویژه ماتریس $A_{3\times 3}$

$$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-2 & 1 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x+y+z=0$$

$$y = b , z = c \Rightarrow (x,y,z) = (-b-c , b , c) = b(-1,1,0) + c(-1,0,1)$$

$\Rightarrow \alpha_2 = (-1,1,0) , \alpha_3 = (-1,0,1)$ بردارهای ویژه ماتریس A وابسته به $\lambda = 3$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0-2 & 1 & 1 \\ 1 & 0-2 & 1 \\ 1 & 1 & 0-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_3+R_2 \to R_2]{2R_3+R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}R_1]{R_1+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 0 & \Rightarrow y = z \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z$$

$\Rightarrow (x,y,z) = x(1,1,1)$ بردارهای ویژه ماتریس $A_{3\times 3}$ وابسته به $\lambda = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 = (1,1,1) \Rightarrow S = \{ \alpha_1 = (1,1,1) , \alpha_2 = (-1,1,0) , \alpha_3 = (-1,0,1) \}$$

یک پایه دلخواه برای فضای ویژه ماتریس A:

با فرایند گرام-اشمیت این پایه را به یک پایه متعامد تبدیل می کنیم.

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\ ,\ \beta_2=\frac{\alpha_2-\langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1}{\|\alpha_2-\langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1\|}=\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$\langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1=\left(-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}+0\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\beta_1=0\beta_1=0\Rightarrow\alpha_2-\langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1=\alpha_2\ ,\ \|\alpha_2\|=\sqrt{2}$$

$$\beta_3=\frac{\alpha_3-\langle\alpha_3,\beta_1\rangle\beta_1-\langle\alpha_3,\beta_2\rangle\beta_2}{\|\alpha_3-\langle\alpha_3,\beta_1\rangle\beta_1-\langle\alpha_3,\beta_2\rangle\beta_2\|}=\frac{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\langle\alpha_3,\beta_1\rangle=(-1)\times\frac{1}{\sqrt{3}}+0\times\frac{1}{\sqrt{3}}+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}=0\ ,\ \langle\alpha_3,\beta_2\rangle=(-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+0\times\frac{1}{\sqrt{2}}+1\times0=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\alpha_3-\langle\alpha_3,\beta_1\rangle\beta_1-\langle\alpha_3,\beta_2\rangle\beta_2=\alpha_3-\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_2=(-1,0,1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

$$\Rightarrow\|\alpha_3-\langle\alpha_3,\beta_1\rangle\beta_1-\langle\alpha_3,\beta_2\rangle\beta_2\|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow S'=\left\{\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \beta_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \beta_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

S' پایهٔ متعامد یکه برای فضای ویژه ماتریس A است.

$$\Rightarrow P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\ ,\ P^TAP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

تمرین:

۱- برای ماتریس های زیر الف) مقادیر ویژه را بیابید. ب) بردارهای ویژه را بیابید.
ج) یک پایه برای فضای ویژه ماتریس های داده شده را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}3&0\\8&-1\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}10&-9\\4&-2\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}-2&-7\\1&2\end{bmatrix}\ ,\ D=\begin{bmatrix}0&3\\4&0\end{bmatrix}$$

۲- برای ماتریس های

$$A=\begin{bmatrix}4&0&1\\-2&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}3&0&-5\\\frac{1}{5}&-1&0\\1&1&-2\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}-2&0&1\\-6&-2&0\\19&5&-4\end{bmatrix}\ ,\ D=\begin{bmatrix}-1&0&1\\-1&3&0\\-4&13&-1\end{bmatrix}$$

الف) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.
ب) یک پایه برای فضای ویژه ماتریس ها بدست آورید.

۳- برای ماتریس های

$$A=\begin{bmatrix}0&0&2&0\\1&0&1&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\ ,\ B=\left[\begin{array}{cc|cc}10&-9&0&0\\4&-2&0&0\\\hline 0&0&-2&-7\\0&0&1&2\end{array}\right]$$

الف) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.
ب) یک پایه برای فضای ویژه ماتریس های داده شده بدست آورید.

۴- فرض کنید که $T: P_2 \to P_2$ یک تبدیل خطی با ضابطه زیر باشد.

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2) = (5a_0+6a_1+2a_2) - (a_1+8a_2)x + (a_0-2a_2)x^2$$

الف) مقادیر ویژه تبدیل T را بدست آورید. ب) بردارهای ویژه تبدیل خطی T را بیابید.

۵- فرض کنید که $T: Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \to Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ با ضابطه

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$$

الف) مقادیر ویژه تبدیل خطی T را بدست آورید. ب) بردارهای ویژه تبدیل خطی T را بیابید.

۶- نشان دهید که مقادیر ویژه یک ماتریس بالا مثلثی، برابرند با عضوهای روی قطر اصلی.

۷- مقادیر ویژه ماتریس A^9 را بیابید وقتی که

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۸- نشان دهید که ماتریس های زیر قطری شدنی نیستند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & -13 & -1 \end{bmatrix}$$

۹- در هر یک از ماتریس های زیر آیا این ماتریس ها قطری شدنی هستند اگر جواب مثبت است ماتریس قطری کننده آنها یعنی P را بدست آورید و سپس $P^{-1}AP$ را احساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

۱۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ آنگاه A^{10} را بدست آورید.

۱۱- مقادیر ویژه ماتریس های زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

۱۲- برای ماتریس $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$ ماتریس P را طوری پیدا کنید که ماتریس A را بطور عمودی قطری کند و سپس $P^{T}AP$ را احساب کنید.