فصل ۵ مجموعه های شمارا، نامتناهی و ناشمارا

۱- مجموعه های متناهی و نامتناهی

تعریف ۱: مجموعه X را نامتناهی نامیم هرگاه زیرمجموعه ای محض (سره) مانند Y داشته باشد بطوریکه یک تناظر یک به یک بین X و Y وجود داشته باشد، و مجموعه X را متناهی نامیم هرگاه X نامتناهی نباشد.

به عبارت دیگر، مجموعه X نامتناهی است اگر و تنها اگر یک تابع یک به یک $f: X \to X$ وجود داشته باشد به قسمی که $f(X)$ یک زیرمجموعه سره X باشد. (یعنی $f(X)=Y$) $f: X \to Y$ یک تابع دوسوی وجود داشته باشد. چون $f: X \to f(X)$ پوشا است کافی است یک به یک بودن را نمایش دهیم. همچنین یافتن $Y \subseteq X$ خیلی آسان نیست ولی تابع یک به یک $f: X \to X$ راحت تر پیدا می شود که شرط $X \neq f(X)$ داشته باشد (یعنی $f(X)$ زیرمجموعه محض X باشد).

مثال ۱: مجموعه اعداد طبیعی نامتناهی است، زیرا $f: N \to N$ وجود دارد که f یک به یک است

$f(n)=2n$ $\boxed{f(n_1)=f(n_2) \Rightarrow 2n_1=2n_2 \Rightarrow n_1=n_2}$

در این مثال $f(N)=2N=N_e$ بنابراین چون $N_e \subset N$ است پس $f: N \to N_e$ دوسوی است یعنی N با زیرمجموعه محض خود یعنی N_e در تناظر یک به یک است.

مثال ۲: مجموعه ϕ و مجموعه تک عضوی متناهی هستند.

حل: نشان می دهیم که ϕ و مجموعه تک عضوی نامتناهی نیستند. برای نامتناهی نبودن ϕ به صورت زیر عمل می کنیم: می دانیم که مجموعه ϕ زیرمجموعه محض ندارد بنابراین تابع دوسوی از مجموعه ϕ به زیرمجموعه محض ϕ وجود ندارد. پس ϕ نامتناهی نیست پس ϕ مجموعه متناهی است.

مجموعه تک عضوی $\{a\}$ فقط یک زیرمجموعه محض دارد و آن هم ϕ است و بین $\{a\}$ و ϕ هیچ تابعی برقرار نیست یعنی تابعی از $\{a\}$ به مجموعه ϕ وجود ندارد $f: \{a\} \to \phi$ چون اگر f وجود داشت باید f به a در ϕ عضوی نسبت دهد. و ϕ هم عضوی ندارد که به a نسبت دهیم یعنی $f(a) \in \phi$ برقرار نیست پس $\{a\}$ نامتناهی نیست پس $\{a\}$ متناهی است.

سوال: طبق مثال ۱ و ۲ فقط وضعیت سه مجموعه N و ϕ و $\{a\}$ از نظر متناهی و نامتناهی بودن معین کرده ایم آیا باقی مجموعه هایی که می شناسیم مانند R و Z و Q و N_e و ... و $\{a,b\}$ و $\{a,b,c\}$ متناهی یا نامتناهی اند؟ به عبارت دیگر آیا با کمک تعریف بالا می توان متناهی یا نامتناهی بودن این مجموعه ها را معین کرد؟

جواب این است که همیشه با کمک تعریف نمی توان هر مطلبی را ثابت کرد. برای نمونه طبق تعریف حد اثبات وجود حدها خیلی آسان نیست و با کمک تعریف مشتق همه مشتق گیری ها را ثابت نمی کنیم و اگر بخواهیم این کار انجام دهیم خیلی وقت گیر است. برای این منظور سراغ قضیه ها می رویم:

قضیه ۱: الف) هر ابر مجموعه یک مجموعه نامتناهی، نامتناهی است. (توجه A را ابر مجموعه B می نامیم هرگاه $B \subseteq A$)

ب) هر زیرمجموعه یک مجموعه متناهی، متناهی است.

ادامه صفحه بعد

اثبات الف) فرض کنید که X یک مجموعه نامتناهی باشد و Y یک ابر مجموعه X باشد یعنی $X \subseteq Y$ آنگاه طبق تعریف یک تابع یک یک $f: X \to X$ وجود دارد بطوریکه $f(X) \neq X$.

حال تابع $g: Y \to Y$ را با ضابطه مقابل تعریف می‌کنیم

$$g(y) = \begin{cases} f(y) & y \in X \text{ اگر } \\ y & y \in Y - X \text{ اگر } \end{cases}$$

نشان می‌دهیم که g یک یک است و $g(Y) \neq Y$

یک یک بودن g،

$$g(y_1) = g(y_2) \Longrightarrow \begin{cases} y_1, y_2 \in X \ : \ f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2 \\ y_1, y_2 \in Y - X \ : \ y_1 = y_2 \ \text{طبق تعریف} \end{cases}$$

$$g(Y) = f(X) \cup (Y - X) \xrightarrow[f(X) \neq X]{\text{چون}} g(Y) = f(X) \cup (Y-X) \neq X \cup (Y - X) = Y$$

پس $g(Y) \neq Y$ بنابراین Y مجموعه نامتناهی است.

اثبات (ب) فرض کنید که مجموعه Y نامتناهی باشد و X یک زیر مجموعه Y باشد (یعنی $X \subseteq Y$) برای اینکه نشان دهیم که X متناهی است از فرض خلف استفاده می‌کنیم (فرض خلف) فرض کنید که X نامتناهی باشد بنابراین طبق الف Y هم نامتناهی است چون ابر مجموعه X است که متناقض با فرض است. پس فرض خلف باطل و X یک مجموعه متناهی است.

مثال ۲: در مثال (۱) دیدیم که N مجموعه اعداد طبیعی یک مجموعه نامتناهی است پس طبق قضیه قبل مجموعه‌های $I = N \cup \{0\}$ مجموعه اعداد حسابی و Z و Q و R همگی چون همگی ابر مجموعه N هستند پس نامتناهی هستند.

بنابراین در حال حاضر نشان داده‌ایم که مجموعه‌های R و N و Z و I و Q نامتناهی هستند.

حال چون $N \subset Q^+$ و $N \subseteq R^+$ پس طبق قضیه قبل هر دو مجموعه Q^+ و R^+ نامتناهی هستند.

با کمک قضیه زیر تعداد بیشتری از مجموعه‌های نامتناهی معرفی می‌کنیم

قضیه ۲: فرض کنید که $g: X \to Y$ یک تابع دوسوئی (تناظر یک یک) باشد، اگر مجموعه X نامتناهی باشد آنگاه Y هم نامتناهی است.

اثبات: چون X نامتناهی است طبق تعریف یک تابع $f: X \to X$ وجود دارد بطوریکه $f(X) \neq X$

چون $g: X \to Y$ یک تناظر یک یک است آنگاه $g^{-1}: Y \to X$ هم یک یک است (قضیه ۱۴ فصل توابع) اکنون طبق نمودار زیر داریم

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed] \arrow[d, "g^{-1}"', "1-1"] & Y \\ X \arrow[r, "1-1", "f"'] & X \arrow[u, "1-1", "g"'] \end{tikzcd}$$

$$h = g \circ f \circ g^{-1} : Y \to Y$$

طبق تمرین ۷ که قبلا ثابت کرده‌ایم h یک یک است
زیرا ترکیب توابع یک یک، یک تابع یک یک است

ما بایست نشان دهیم که $h(Y)\neq Y$ چون $h(Y)\subset Y$ (زیرمجموعه سره Y می‌شود).

پس Y ... می‌شود زیرا $h(Y)$ طبق قضیه ۱ نامتناهی است در شرط قضیه ۱ صدق می‌کند)

$$h(Y)=(g\circ f\circ g^{-1})(Y)=(g\circ f)(\underbrace{g^{-1}(Y)}_{X})=g\circ f(X)=g(f(X))\neq Y$$

زیرا

$$g(X)=Y \quad , \quad f(X)\neq X$$

نتیجه: فرض کنید $g: X\longrightarrow Y$ یک تناظر یک‌به‌یک باشد، اگر مجموعه X متناهی باشد آنگاه Y هم متناهی است.

اثبات: فرض خلف فرض کنید که Y نامتناهی باشد چون $g^{-1}: Y\longrightarrow X$ یک تناظر یک‌به‌یک است پس طبق قضیه ۲ باید X نامتناهی باشد که متناقض با فرض است.

پس فرض خلف باطل و حکم (یعنی Y مجموعه متناهی است) برقرار است

مثال ۲: مجموعه اعداد طبیعی زوج $\mathbb{N}_e$ و مجموعه اعداد طبیعی فرد $\mathbb{N}_o$ نامتناهی هستند زیرا $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}_e$ با ضابطه $f(n)=2n$ یک‌به‌یک و پوشا است پس طبق قضیه ۲ قسمت الف چون $\mathbb{N}$ نامتناهی است پس $\mathbb{N}_e$ هم نامتناهی است. و چون $g:\mathbb{N}_e\longrightarrow\mathbb{N}_o$ با ضابطه $g(2n)=2n-1$ یک‌به‌یک و پوشا است پس چون $\mathbb{N}_e$ نامتناهی است پس $\mathbb{N}_o$ هم نامتناهی است.

$\mathbb{N}_o=\{2n-1 \mid n\in\mathbb{N}\}$

$\mathbb{N}_e=\{2n \mid n\in\mathbb{N}\}$

یک‌به‌یک بودن تابع g

$g(2n_1)=g(2n_2)\Rightarrow 2n_1-1=2n_2-1\Rightarrow 2n_1=2n_2$

$\Rightarrow n_1=n_2$

g پوشا است زیرا $\operatorname{Im} g=\mathbb{N}_o$

یک‌به‌یک بودن f

$f(n_1)=f(n_2)\Rightarrow 2n_1=2n_2$

$\Rightarrow n_1=n_2$

f پوشا است زیرا $\operatorname{Im} f=\mathbb{N}_e$

مثال ۳: (تمرین ۱۶ صفحه ۱۲۱) نشان دهید که مجموعه $\{1,4,9,16,25,\dots\}$ نامتناهی است.

حل. $A=\{1,4,9,16,25,\dots\}=\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}$ مجموعه مربعات اعداد طبیعی

نشان می‌دهیم $f:\mathbb{N}\longrightarrow A$ با ضابطه $f(n)=n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ یک‌به‌یک و پوشا است. که در این صورت طبق قضیه ۲ قسمت الف A نامتناهی می‌شود.

یک‌به‌یک بودن f: $f(n_1)=f(n_2)\Rightarrow n_1^2=n_2^2\Rightarrow n_1=\pm n_2 \overset{*}{\Rightarrow} n_1=n_2$

* $n_1=-n_2$ قابل قبول نیست چون هر دو عدد n_1 و n_2 طبیعی هستند پس مثبت می‌باشند

f پوشا است زیرا $\operatorname{Im} f=\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}=A$

Scanned by CamScanner

مثال ۵: در ریاضی عمومی هر تابعی مانند $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ یک دنباله نام دارد.
حال اگر f یک تابع یک به یک باشد آنگاه $f: \mathbb{N} \to Im f$ یک تابع پوشا هم می‌شود
و بنابراین $f: \mathbb{N} \to Im f$ تناظری می‌باشد پس $Im f$ یعنی مجموعه همه اعضای دنباله f یک مجموعه نامتناهی می‌شود. طبق قضیه ۱ (قسمت الف)

معمولاً دنباله اعضای f را با $a_n = f(n)$ نمایش می‌دهند پس $Im f = \{a_n \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ a_n = a_n\}$

مثلاً: دنباله $a_n = 2n$، دنباله $b_n = \frac{n}{2}$ دنباله $c_n = 3n-1$ و ...
تا بی‌نهایت می‌توان مجموعه نامتناهی از روی دنباله‌ها ساخته می‌شود.

قضیه ۳: فرض کنید که X یک مجموعه نامتناهی باشد و $x_0 \in X$ دلخواه و ثابت باشد آنگاه $X-\{x_0\}$ یک مجموعه نامتناهی است.

توجه: در قضیه قبل اگر یک عضو از مجموعه نامتناهی برداریم مجموعه باقی‌مانده نامتناهی باقی می‌ماند و همچنین اگر دو عضو از مجموعه نامتناهی برداریم مجموعه باقی‌مانده باز نامتناهی باقی می‌ماند و با ادامه این روند اگر به تعداد متناهی عضو (یعنی n عضو) از یک مجموعه نامتناهی برداریم، مجموعه باقی‌مانده (تمرین ۸ صفحه ۱۲) نامتناهی باقی می‌ماند.

اثبات قضیه ۳: (اثبات این قضیه برای دانشجویان رشته آمار الزامی نیست)
چون طبق فرض X مجموعه نامتناهی فرض شده است پس طبق تعریف ۱ یک تابع $f: X \to X$ وجود دارد که یک به یک است و $f(X) \neq X$ است.
حال چون $f(X) \subset X$ (زیر مجموعه محض X است) برای عضو x_0 دو حالت در نظر می‌گیریم
حالت ① $x_0 \in f(X)$ حالت ② $x_0 \in (X - f(X))$ یعنی $x_0 \notin f(X)$.

در هر حالت تابعی یک به یک مانند $g: X-\{x_0\} \to X-\{x_0\}$ می‌سازیم که $g(X-\{x_0\}) \neq X-\{x_0\}$ باشد یعنی طبق تعریف ۱، مجموعه $X-\{x_0\}$ نامتناهی می‌شود.

حالت ①: چون $x_0 \in f(X)$ است طبق تعریف $f(X) \subset X$ پس $f: X \to X$ پس $\exists x_1 \in X$ بطوریکه $f(x_1) = x_0$. حال تابع $g: X-\{x_0\} \to X-\{x_0\}$ با ضابطه

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \neq x_1 \\ x_2 & \text{اگر } x = x_1 \in (X-\{x_0\}) \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم

$\boxed{x_2 \in X - f(X) \text{ اختیاری است}}$

شرط اول یعنی اگر $x \neq x_1$ باشد $g(x)$ را همان مقدار $f(x)$ تعریف می‌کنیم. شرط دوم یعنی اگر $x = x_1$ باشد آنگاه به $g(x)$ یک عضو دیگری از $X-\{x_0\}$ مانند x_2 نسبت می‌دهیم که x_2 یک عضو اختیاری و ثابت در مجموعه $X - f(X)$ است.

یک به یک بودن تابع: (دو حالت داریم) $g(x^1) = g(x^2) \Rightarrow$

اگر $x^1 \neq x_1$ و $x^2 \neq x_1$ آنگاه $f(x^1) = g(x^1) = g(x^2) = f(x^2)$ چون f یک به یک است پس $x^1 = x^2$

اگر $x^1 = x_1$ و $x^2 \neq x_1$ که بدیهی است که $x^2 = x_1$ (در این حالت $g(x^1) = x_2 = g(x^2)$)

$$g(X-\{x_0\}) = f(X-\{x_0, x_1\}) \cup \{x_2\} \underset{(*)}{\neq} X-\{x_0\}$$

(*) زیرا g یک تابع دو ضابطه‌ای است و تصویر اعضای $X-\{x_0\}$ توسط g اجتماع تصویرهای هر دو ضابطه یعنی $f(x)$ها (تحت شرط $x \neq x_1$) و مجموعه تک عضوی x_2 می‌شود. حال چون $f(X) \neq X$ پس $f(X-\{x_0, x_1\}) \neq X-\{x_0\}$ است و اضافه شدن x_2 تاثیری به حال $f(X-\{x_0, x_1\})$ ندارد زیرا x_2 عضو $X-f(X)$ است.

حالت ۲) اگر $x_0 \notin f(X)$ (یا $x_0 \in X-f(X)$) در این حالت تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $g: X-\{x_0\} \to X-\{x_0\}$ با ضابطه $g(x) = f(x)$ چون $x_0 \notin f(X)$ نیست که بخواهیم تصویر عضوی باشد x_0 باشد (یعنی x_0 برابر $f(x_1)$ شود)

حال چون f یک به یک است پس g هم یک به یک است و

$$g(X-\{x_0\}) = f(X)-\{f(x_0)\} \neq X-\{x_0\}$$

توجه: در این درس تا حال فقط دو مجموعه متناهی ϕ و مجموعه تک عضوی معرفی کرده ایم در مثال ۶ تعداد زیادی مجموعه متناهی معرفی می‌کنیم.

قرارداد: برای هر عدد طبیعی K مجموعه $\{1, 2, 3, 4, \dots, K\}$ را با N_K نمایش می‌دهیم یعنی $N_1 = \{1\}$، $N_2 = \{1, 2\}$، $N_3 = \{1, 2, 3\}$، $N_4 = \{1, 2, 3, 4\}$، ...

و N_K را قطعه (یا قسمتی از $\mathbb{N}$) از $\mathbb{N}$ می‌نامیم.

مثال ۶: نشان دهید که برای هر $K \in \mathbb{N}$ مجموعه N_K متناهی است.

اثبات: با استقرای ریاضی نشان می‌دهیم که N_K مجموعه متناهی است.

شروع استقرای ریاضی: $K=1$ بدیهی است که $N_1 = \{1\}$ یک مجموعه تک عضوی است و طبق مثال ۱ متناهی است.

شروع استقرای ریاضی: $K=m$ فرض کنید که مجموعه N_m برای هر $m \leq K$ متناهی باشد

حکم استقرای ریاضی: $K=m+1$ نشان می‌دهیم که $N_{m+1} = N_m \cup \{m+1\}$ متناهی است

فرض خلف: فرض کنید که N_{m+1} نامتناهی باشد در این صورت $N_m = N_{m+1} - \{m+1\}$ نامتناهی می‌شود که خلاف فرض استقرای ریاضی است که یک تناقض است پس مجموعه N_{m+1} متناهی است

حال طبق اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی K مجموعه N_K متناهی است.

با کمک قضیه زیر تمام مجموعه‌های متناهی را معرفی می‌کنیم

قضیه ۴: مجموعه X متناهی است $\iff$ $X=\phi$ یا X با یک N_K در تناظر یک‌به‌یک باشد

اثبات: اگر X تهی باشد که طبق مثال ۱ مجموعه متناهی می‌شود و مشکل حل است.

اگر X با یک N_K ای در تناظر یک‌به‌یک باشد یعنی تابع دوسویی $f: N_K \longrightarrow X$ وجود دارد که طبق قضیه ۲ قسمت (ب) X مجموعه متناهی می‌شود پس یک طرف قضیه اثبات شد.

برای اثبات طرف دیگر قضیه یعنی اگر X مجموعه متناهی است اگر $X=\phi$ یا X با یک N_K در تناظر یک‌به‌یک است از روش عکس نقیض کمک می‌گیریم یعنی ثابت می‌کنیم که اگر $X\neq\phi$ و X با هیچ N_K ای در تناظر یک‌به‌یک نباشد آنگاه X نامتناهی است ثابت می‌کنیم.

اگر $X\neq\phi$ پس می‌توان یک x_1 در X انتخاب کنیم حال $X-\{x_1\}$ مخالف تهی است زیرا اگر $X-\{x_1\}$ مساوی تهی باشد یعنی $X=\{x_1\}$ که با N_1 در تناظر یک‌به‌یک است که مخالف فرض است.

حال برای مجموعه $X-\{x_1\}$ یک عضو دیگر x_2 در $X-\{x_1\}$ انتخاب می‌کنیم باز $X-\{x_1,x_2\}$ مخالف تهی است زیرا اگر $X-\{x_1,x_2\}$ مساوی تهی باشد پس $X=\{x_1,x_2\}$ که با N_2 در تناظر یک‌به‌یک است که مخالف فرض است. با ادامه این روند مجموعه $X-\{x_1,x_2,\dots,x_K\}$ ساخته می‌شود (که تهی نیست زیرا در غیر این صورت با N_K تناظر یک‌به‌یک می‌شود چون $X=\{x_1,\dots,x_K\}$ می‌شود). بنابراین طبق اصل استقرای ریاضی مجموعه $X-\{x_1,x_2,\dots,x_K\}$ چون X نامتناهی است وجود دارد. حال قرار می‌دهیم $Y=\{x_1,x_2,\dots\}$ و تابع $f: Y \longrightarrow Y-\{x_1\}$ با ضابطه $f(x_K)=x_{K+1}$ تعریف می‌کنیم یک تابع یک‌به‌یک است پس بین Y و $Y-\{x_1\}$ ($Y-\{x_1\} \subset Y$ زیرمجموعه محض Y است) یک تناظر یک‌به‌یک برقرار می‌شود یعنی Y نامتناهی است پس طبق قضیه ۱ چون X ابرمجموعه Y است پس X نامتناهی است

نتیجه: مجموعه‌های متناهی عبارتند از ϕ و هر مجموعه‌ای که با N_K در تناظر یک‌به‌یک باشد $K\in N$.