توابع برداری و معادله حرکت و انحنای منحنی

توابع برداری و منحنی های فضایی:

تعریف (تابع برداری) یک تابع برداری، تابعی است که دامنه‌اش مجموعه‌ای از عددهای حقیقی و بردش مجموعه‌ای از بردارها است. به عبارت دیگر یک تابع برداری یک بردار است که همه مؤلفه‌های آن تابع باشند. بنابراین اگر $f_1(t)$ و $f_2(t)$ و ... و $f_n(t)$، n تابع باشند آنگاه $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ یک تابع برداری است و

$$D_{\vec{F}(t)} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap \dots \cap D_{f_n}$$ دامنه تابع برداری $\vec{F}(t)$

اگر به متغیر t مقداری از دامنه تابع برداری بدهیم آنگاه تابع برداری $\vec{F}(t)$ به یک بردار تبدیل می‌شود.

توجه: یک تابع برداری در فضای سه بعدی به صورت $\vec{F}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ است و یک تابع برداری در صفحه به صورت $\vec{F}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ است.

مثال ۱: دامنه توابع زیر را بیابید:

الف) $\vec{F}(t) = e^{t}\vec{i} + \ln(t)\vec{j}$ ب) $\vec{R}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$ ج) $\vec{F}(t) = \sqrt{1-t^2}\,\vec{i} + e^{t}\vec{j} + t^2\vec{k}$

د) $\vec{R}(t) = (t^3, \ln(3-t), \sqrt{t})$

حل: الف)

$$D_{e^t} = \mathbb{R},\ D_{\ln t} = (0, +\infty) \Rightarrow D_{\vec{F}(t)} = D_{e^t} \cap D_{\ln t} = (0, +\infty)$$

ب)

$$D_{\cos t} = D_{\sin t} = D_t = \mathbb{R} \Longrightarrow D_{\vec{R}(t)} = D_{\cos t} \cap D_{\sin t} \cap D_t = \mathbb{R}$$

ج)

$$D_{\sqrt{1-t^2}} = [-1, 1],\ D_{e^t} = D_{t^2} = \mathbb{R} \Rightarrow D_{\vec{F}(t)} = D_{\sqrt{1-t^2}} \cap D_{e^t} \cap D_{t^2} = [-1, 1]$$

د)

$$D_{t^3} = \mathbb{R},\ D_{\ln(3-t)} = (-\infty, 3),\ D_{\sqrt{t}} = [0, +\infty) \Rightarrow D_{\vec{R}(t)} = D_{t^3} \cap D_{\ln(3-t)} \cap D_{\sqrt{t}} = [0, 3)$$

$$\boxed{3-t>0 \Rightarrow 3>t \rightarrow D_{\ln(3-t)} = (-\infty, 3)}$$

حد و مشتق و انتگرال معین توابع برداری و همچنین انتگرال نامعین توابع برداری همانند حد و مشتق و انتگرال توابع است با این تفاوت که باید حد و مشتق و انتگرال تمام مؤلفه‌های تابع برداری وجود داشته باشد.

به عبارت دیگر: اگر $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ آنگاه

برای حد توابع برداری:

$$\lim_{t\to a} \vec{F}(t) = \left(\lim_{t\to a} f_1(t), \lim_{t\to a} f_2(t), \dots, \lim_{t\to a} f_n(t)\right)$$

به شرطی که تمام حدها یعنی $\lim_{t\to a} f_i(t)$ موجود باشند. $i = 1, 2, \dots, n$

برای مشتق توابع برداری: $\vec F'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t))$

به شرطی که مشتق $f_1(t)$ و ... و $f_n(t)$ موجود باشند یعنی $f_1'(t)$ و $f_2'(t)$ و ... و $f_n'(t)$ موجود باشند.

برای انتگرال معین توابع برداری: $\int_a^b \vec F(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \int_a^b f_2(t)\,dt, \dots, \int_a^b f_n(t)\,dt\right)$

مثال ۲: اگر $\vec R(t) = (1+t^3)\vec i + te^{-t}\vec j + \frac{\sin t}{t}\vec k$ آنگاه الف) $\lim_{t\to 0}\vec R(t)$ را بیابید.
ب) $\vec R'(t)$ را بیابید.

حل الف) $\lim_{t\to 0}\vec R(t) = \lim_{t\to 0}(1+t^3)\vec i + \lim_{t\to 0} te^{-t}\vec j + \lim \frac{\sin t}{t}\vec k = 1\vec i + 0\vec j + 1\vec k = \vec i + \vec k$

ب) $\vec R'(t) = 3t^2\vec i + (e^{-t} - te^{-t})\vec j + \frac{\cos t - \sin t}{t^2}\vec k$

مثال ۳: منحنی‌ای که تابع برداری $\vec R(t) = (1+t, 2+5t, -1+6t)$ تعریف می‌کند را توصیف کنید.

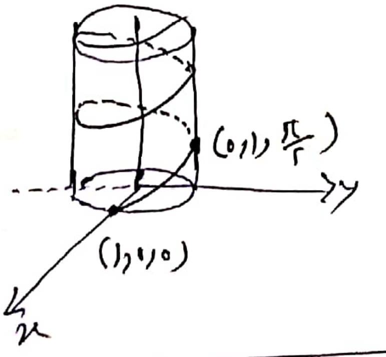
حل: هر تابع برداری در فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$ یک منحنی را در فضای سه بعدی نمایش می‌دهد در این مثال هم $\vec R(t)$ معادله پارامتری یک خط در فضا را نشان می‌دهد زیرا

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+5t \\ z=-1+6t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

این خط از نقطه $P_0(1,2,-1)$ می‌گذرد و با بردار $\vec m=(1,5,6)$ موازی است.

مثال ۴: منحنی‌ای که معادله برداریش $\vec R(t) = \cos t\,\vec i + \sin t\,\vec j + t\vec k$ (قسمت ب مثال ۱) است را توصیف کنید.

حل: با فرض $x=\cos t$ و $y=\sin t$ و $z=t$ چون $1=\cos^2 t+\sin^2 t = x^2+y^2=1$ و $t\in\mathbb{R}$ دلخواه است پس منحنی‌ای که $\vec R(t)$ را معرفی می‌کند روی استوانه دوار $x^2+y^2=1$ قرار دارد که به پیچ (مارپیچ) استوانه‌ای معروف است و نمودار آن به صورت زیر است. (شکل صفحه ۱۰۶۹ کتاب)



مثال ۵: معادله برداری و معادله های پارامتری پاره خطی را که دو نقطه $P(1,3,-2)$ و $Q(2,-1,3)$ را به هم وصل می‌کند پیدا کنید.

حل: به طور کلی اگر $R_0=\vec{OP}=(1,3,-2)$ و $R_1=\vec{OQ}=(2,-1,3)$ آنگاه معادله برداری پاره خط PQ (شروع پاره خط P و انتهای پاره خط Q) به صورت $\vec R(t)=(1-t)\vec R_0+t\vec R_1 :\ 0\le t\le 1$ است (تمرین ... صفحه ... حل شده است)

بنابراین $\vec R(t)=(1-t)(1,3,-2)+t(2,-1,3) = (1-t, 3-3t, -2+2t)+(2t, -t, 3t) \Leftarrow$

$$\vec R(t)=(1+t, 3-4t, -2+5t) \Longrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=3-4t \\ z=-2+5t \end{cases} \quad 0\le t\le 1$$

: معادله پارامتری پاره خط PQ

مثال ۶: الف) مشتق تابع برداری $\vec{R}(t)=(1+t^3)\vec{i}+te^{-t}\vec{j}+\sin 2t\,\vec{K}$ را پیدا کنید.

ب) بردار واحد مماس را در نقطه $t=0$ را پیدا کنید. (یعنی $\vec{T}(0)=\frac{\vec{R}'(0)}{|\vec{R}'(0)|}$)

حل: الف) $\vec{R}'(t)=3t^2\vec{i}+(1-t)e^{-t}\vec{j}+2\cos 2t\,\vec{K}$

ب) چون $\vec{R}(0)=\vec{i}$ و $\vec{R}'(0)=\vec{j}+2\vec{K}$ پس $\vec{T}(0)=\frac{\vec{R}'(0)}{|\vec{R}'(0)|}=\frac{\vec{j}+2\vec{K}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{K}$

توجه: $\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}$ را بردار واحد مماس بر منحنی C با معادله برداری $\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{K}$ می‌نامیم و در معادله حرکت اجسام کاربرد فراوانی دارد) و $\vec{R}'(t)$ بردار مماس بر منحنی C است.

مثال ۷: اگر $\vec{R}(t)=2\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+2t\vec{K}$ آنگاه $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\vec{R}(t)\,dt$ را بیابید.

حل:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\vec{R}(t)\,dt=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\,dt\right)\vec{i}+\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt\right)\vec{j}+\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\,dt\right)\vec{K}=$$
$$=\left[2\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\vec{i}+\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\vec{j}+\left[t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\vec{K}=2\vec{i}+\vec{j}+\frac{\pi^2}{4}\vec{K}$$

مثال ۸: نشان دهید که اگر $|\vec{R}(t)|=c$ که در آن c عددی ثابت است، آن وقت $\vec{R}'(t)\cdot\vec{R}(t)=0 \quad \forall t$ یعنی $\vec{R}'(t)$ بر $\vec{R}(t)$ عمود است.

حل: چون $\vec{R}(t)\cdot\vec{R}(t)=|\vec{R}(t)|^2=c^2 \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} 0=\vec{R}'(t)\cdot\vec{R}(t)+\vec{R}(t)\cdot\vec{R}'(t)=2\vec{R}'(t)\cdot\vec{R}(t)$

بنابراین $\vec{R}'(t)\cdot\vec{R}(t)=0$ یعنی $\vec{R}'(t)$ و $\vec{R}(t)$ بر هم عمود هستند.

تعبیر هندسی این مثال این است که اگر منحنی ای روی کره ای به مرکز مبداء قرار داشته باشد آنگاه بردار مماس $\vec{R}'(t)$ همواره بر بردار مکان $\vec{R}(t)$ عمود است.

مثال ۹: معادله های پارامتری خط مماس بر مارپیچ استوانه ای با معادله پارامتری $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\\ z=t\end{cases}$ در نقطه $(0,1,\frac{\pi}{2})$ را بیابید.

حل: قرار می‌دهیم $\vec{R}(t)=2\cos t\,\vec{i}+2\sin t\,\vec{j}+t\vec{K}$ بنابراین $\vec{R}'(t)=-2\sin t\,\vec{i}+2\cos t\,\vec{j}+K$

پس در نقطه $(0,1,\frac{\pi}{2})$ مقدار t برابر $\frac{\pi}{2}$ است بنابراین $\vec{R}'(\frac{\pi}{2})=(-2,0,1)$

بنابراین معادله پارامتری خط مماس بر منحنی مارپیچ استوانه ای در نقطه $(0,1,\frac{\pi}{2})$ عبارت است از:
$$\begin{cases}x=-2t\\ y=1\\ z=\frac{\pi}{2}+t\end{cases}$$

معادله حرکت و سرعت و شتاب یک متحرک و طول قوس یک منحنی

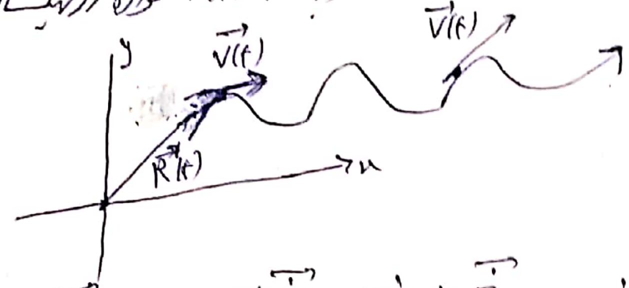
مهمترین تابع برداری که تابع برداری $\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{K}$ است که شروع آن مبداء مختصات و انتهای آن نقطه $(x(t),y(t),z(t))$ است که به معادله حرکت یک متحرک موسوم است و در آن t زمان است. این تابع برداری به بردار مکان متحرک (ذره) نیز نامیده می‌شود و $\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)$ سرعت متحرک و $\vec{a}(t)=\vec{V}'(t)=\vec{R}''(t)$ شتاب متحرک می‌باشد و $|\vec{V}(t)|$ اندازه سرعت متحرک و آن را تندی متحرک نیز گفته می‌شود.

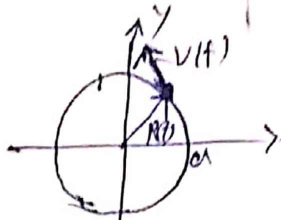
بنابراین $\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k} \Rightarrow \vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$

$\vec{a}(t)=\vec{V}'(t)=\vec{R}''(t)=x''(t)\vec{i}+y''(t)\vec{j}+z''(t)\vec{k}$

$|\vec{V}(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}$

قبلاً گفتیم که $\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)$ بر منحنی که متحرک روی آن حرکت می‌کند مماس است و جهت $\vec{V}(t)$ همواره در جهت افزایش t است.





شکل (۱)

مثال ۱۰: برای دایره $x^2+y^2=a^2$ شکل (۱) داریم

$\vec{R}(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}$

$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=-a\sin t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j}$ و $\vec{a}(t)=-a\cos t\,\vec{i}-a\sin t\,\vec{j}=-\vec{R}(t)$

توجه: $\vec{T}(t)=\dfrac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|}$ = بردار واحد مماسی بر منحنی C در t (قبلاً دیدیم که : $\vec{T}(t)=\dfrac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}$)

برای دایره در مثال ۱۰ دیده می‌شود که چون $|\vec{R}(t)|=a$ پس (طبق مثال ۸) $\vec{V}(t)$ بر $\vec{R}(t)$ عمود است بنابراین برای دایره $\vec{V}(t)$ بر منحنی مماس است و بر بردار مکان $\vec{R}(t)$ عمود است و به همین صورت چون $|\vec{V}(t)|=a$ پس $\vec{a}(t)=\vec{R}''(t)$ بر $\vec{V}(t)$ عمود است.

تعریف (تابع طول قوس) فرض کنید که C یک منحنی در صفحه یا فضا باشد با انتخاب نقطه ثابت a در I، تابع طول قوس منحنی را با $S=S(t)$ برای هر t نشان می‌دهیم و در آن $P(a)=(x(a),y(a),z(a))$ نقطه شروع و $P(t)=(x(t),y(t),z(t))$ نقطه پایان است و

$$s=s(t)=\int_a^t \sqrt{|V(u)|}\,du=\int_a^t\sqrt{(x'(u))^2+(y'(u))^2+(z'(u))^2}\,du$$

به عبارت دیگر $S(t)=\int_a^t\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}\,du$ بنابراین طبق قضیه مشتق انتگرال داریم

تندی متحرک $=\dfrac{ds}{dt}=|\vec{V}(t)|=$ اندازه سرعت

توجه: اگر $I=[a,b]$ و C یک منحنی در صفحه یا فضا باشد در این صورت طول قوس منحنی C از نقطه $P(a)$ تا نقطه $P(b)$ عبارت است از

$$S=\int_a^b|V(t)|\,dt$$

اگر C یک منحنی بسته باشد مانند دایره آنگاه محیط منحنی $C=S=\int_a^b|\vec{V}(t)|\,dt$.

مثال ۱۱: مطلوب است طول یک دور از مارپیچ استوانه‌ای $\vec{R}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$.

حل: $\vec R(t)=\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j+t\,\vec k \Rightarrow \vec V(t)=-\sin t\,\vec i+\cos t\,\vec j+\vec k \Rightarrow |\vec V(t)|=\sqrt{2}$

تک دور از مارپیچ یعنی منحنی S در فاصله $[0,2\pi]$ یعنی: $S=\int_0^{2\pi}|\vec V(t)|\,dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}dt=2\pi\sqrt{2}$

مثال ۱۲: در مثال قبل $\vec T(t)$ بردار واحد مماس را بدست آورید.

حل: $\vec T(t)=\frac{\vec V(t)}{|\vec V(t)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin t\,\vec i+\cos t\,\vec j+\vec k\right)$

توجه: به کمک قاعده زنجیری می‌توان بردار واحد مماس $\vec T(t)$ را برحسب s نوشت یعنی $T(s)$ زیرا

$$\vec T(t)=\frac{\vec V(t)}{|\vec V(t)|}=\frac{\frac{d\vec R}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{\frac{d\vec R}{ds}\cdot\cancel{\frac{ds}{dt}}}{\cancel{\frac{ds}{dt}}}=\frac{d\vec R}{ds}=\vec T(s)$$

مثال ۱۳: بردار واحد مماس T را برای نمودار $\vec R(t)=(\cos t+t\sin t)\,\vec i+(\sin t-t\cos t)\,\vec j$ $(t\geq 0)$ را هم برحسب t و هم برحسب s بنویسید که در آن s طول قوس منحنی از نقطه $\vec R(0)=\vec i=(1,0)$ سنجیده می‌شود.

حل: $\vec V(t)=\vec R'(t)=(-\sin t+\sin t+t\cos t)\,\vec i+(\cos t-\cos t+t\sin t)\,\vec j \Rightarrow$

$\vec V(t)=t\cos t\,\vec i+t\sin t\,\vec j \Rightarrow |\vec V(t)|=\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}=|t|=t \quad (t\geq 0)$

$\Rightarrow \vec T(t)=\frac{\vec V(t)}{|\vec V(t)|}=\frac{1}{t}\left(t\cos t\,\vec i+t\sin t\,\vec j\right)=\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j$

$s(t)=\int_0^t|\vec V(u)|\,du=\int_0^t u\,du=\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^t=\frac{t^2}{2}\Rightarrow t=\sqrt{2s}$

$\Rightarrow T(s)=\cos(\sqrt{2s})\,\vec i+\sin(\sqrt{2s})\,\vec j$

مثال ۱۴: مارپیچ $\vec R(t)=\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j+t\,\vec k$ را نسبت به طول قوس که از $(1,0,0)$ در جهت زیاد شدن t حساب می‌شود پارامتری سازی کنید (یعنی $\vec R$ را برحسب s بنویسید)

حل: در مثال ۱۱ دیدیم که $|\vec V(t)|=\sqrt{2}$ و بنابراین

$s(t)=\int_0^t|\vec V(u)|\,du=\sqrt{2}\int_0^t du=\sqrt{2}\,t$

پس $t=\frac{s}{\sqrt{2}}$ بنابراین $\vec R(t(s))=\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec i+\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec j+\frac{s}{\sqrt{2}}\vec k$

انحنای یک منحنی و مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب

تعریف: منحنی C با معادله برداری $\vec R(t)$ را روی I هموار نامیم هرگاه $\vec R(t)$ پیوسته باشد و $\vec R'(t)\neq 0$. به عبارت دیگر وقتی که بردار مماس (بردار واحد مماس $\vec T$) روی منحنی C همواره بطور پیوسته بچرخد.

تعریف (انحنای منحنی) انحنای منحنی C در نقطه P از منحنی C را با K (کاپا) نمایش می‌دهیم و عبارت است از

$$K = \left|\frac{d\vec{T}}{dS}\right| \quad (1)$$

برای محاسبه انحنای منحنی فرمول‌های دیگری هم وجود دارد که استفاده از آنها آسان‌تر است! به کمک قاعده زنجیری مشتق می‌توان به صورت زیر K را برحسب پارامتر زمان t بدست آورد:

$$K = \left|\frac{d\vec{T}}{dS}\right| = \left|\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{dS}{dt}}\right| = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{V}(t)|} \quad (2)$$

مثال ۱۵: انحنای دایره‌ای با شعاع a را بیابید.

حل: اگر معادله دایره را $x^2+y^2=a^2$ در نظر بگیریم آنگاه معادله برداری آن به صورت $\vec{R}(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}$ است، بنابراین

$$|\vec{V}(t)| = -a\sin t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j} \Rightarrow |\vec{V}(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t} = \sqrt{a^2} = a$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|} = -\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j} \Rightarrow \vec{T}'(t) = -\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j} \Rightarrow |\vec{T}'(t)| = 1 \Rightarrow$$

$$K = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{V}(t)|} = \frac{1}{a}.$$

انحنای دایره‌ای با شعاع a عکس شعاع دایره است طبق فرمول (۲)

دیگر فرمول‌های انحنای منحنی‌ها:

قضیه: انحنای منحنی‌ای که معادله برداری آن $\vec{R}(t)$ است برابر با

$$K = \frac{|\vec{V}(t)\times\vec{a}(t)|}{|\vec{V}(t)|^3}$$

که معادل آن

$$K = \frac{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3} \quad (3)$$

تبصره ۱) اگر یک منحنی در صفحه باشد و معادله آن $y=f(x)$ باشد آنگاه

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

۲) اگر معادله منحنی C در صفحه به صورت $x=f(y)$ باشد آنگاه،

$$K = \frac{|x''|}{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

۳) اگر معادله منحنی C در صفحه به صورت پارامتری $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t)\end{cases}$ باشد آنگاه،

$$(6)\quad K = \frac{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

که در آن $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ و $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$ و $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$ و $\ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2}$ است.

مثال ۱۶: انحنای منحنی C به معادله برداری $\vec{R}(t)=t\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}+t^3\,\vec{k}$ را حساب کنید و انحنای این منحنی در $t=0$ را بیابید.

حل:

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=\vec{i}+2t\,\vec{j}+3t^2\,\vec{k} \Rightarrow |\vec{V}(t)| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$$

$$\vec{a}(t)=\vec{R}''(t)=2\vec{j}+6t\vec{k} \Rightarrow \vec{V}(t)\times\vec{a}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\vec{i}-6t\,\vec{j}+2\vec{k}$$

طبق فرمول شماره (۳) داریم

$$K(t) = \frac{|\vec{V}(t)\times\vec{a}(t)|}{|\vec{V}(t)|} = \frac{\sqrt{36t^4+36t^2+4}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \Rightarrow K(0) = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} = 2$$

مثال ۱۷: الف) انحنای منحنی $x^2 = y$ در نقطه (۱و۱) را بیابید

ب) انحنای بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ در نقطه $(0, b)$ را بیابید

حل: برای الف از فرمول شماره ④ یعنی $k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ استفاده می‌کنیم

$y' = 2x \ , \ y'' = 2$

$y'(1) = 2 \ , \ y''(1) = 2$

$$k(1) = \frac{|2|}{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

برای ب از فرمول شماره ⑥ استفاده می‌کنیم زیرا معادله برداری بیضی به صورت $\vec{R}(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}$ است یعنی معادله پارامتری بیضی عبارت است از $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ پس $\begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = b\cos t \end{cases}$ و $\begin{cases} x'' = -a\cos t \\ y'' = -b\sin t \end{cases}$

در نقطه $(0, b)$ مقدار t برابر با $t=\frac{\pi}{2}$ است پس

$$k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|ab|}{(a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|b|}{a^2}$$

$\begin{cases} x'(\frac{\pi}{2}) = -a \ , \ x''(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \ , \ y''(\frac{\pi}{2}) = -b \end{cases}$

مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب:

می‌دانیم که $\vec{T} = \frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|}$ و $\frac{ds}{dt} = |\vec{V}(t)|$ بنابراین $\vec{V}(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)\cdot\vec{T}$

بنابراین بردار سرعت برحسب $\vec{T}$ نوشته می‌شود. بردار شتاب هم به صورت زیر برحسب $\vec{T}$ و $\vec{N}$ می‌نویسیم:

$$a = \vec{V}'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{T}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \frac{ds}{dt}\vec{T}'(t) \xrightarrow{\text{طبق فرمول ②}} \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + k\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N}$$

زیرا $\vec{N} = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$ و $k = \frac{|\vec{T}'|}{ds/dt}$

بنابراین

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + k\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N}}$$

تعریف: ضریب $\vec{T}$ و ضریب $\vec{N}$ در بردار شتاب را به ترتیب مؤلفه مماسی شتاب و مؤلفه قائم شتاب می‌نامیم و با a_T و a_N نمایش می‌دهیم پس

$$\boxed{a_T = \frac{d^2s}{dt^2}} \quad \text{و} \quad \boxed{a_N = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}$$

و

$k = \frac{a_N}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}$ یا $\boxed{k = \frac{a_N}{|\vec{V}|^2}}$ ⑦ فرمول دیگری برای محاسبه انحنا است.

مثال ۱۸: در مثال ۱۶ یعنی $\vec{R}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$ مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب را بدست آورید.

حل: می‌دانیم که $\frac{ds}{dt} = |\vec{V}(t)| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$ پس

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{8t+36t^3}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$$

چون $K(t) = \frac{\sqrt{36t^4+36t^2+4}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}$ بنابراین

$$a_N = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot K = (1+4t^2+9t^4) \times \frac{\sqrt{36t^4+36t^2+4}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}$$

و بنابراین

$$a_N = \sqrt{\frac{36t^4+36t^2+4}{1+4t^2+9t^4}}$$

مثال ۹: مولفه‌های مماسی و قائم منحنی C با معادله برداری $\vec{R}(t) = t^2\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ را بیابید.

حل:

$$\vec{V}(t) = 2t\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = |\vec{V}(t)| = \sqrt{8t^2+9t^4} \Rightarrow a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{16t+36t^3}{2\sqrt{8t^2+9t^4}} = \frac{8t+18t^3}{\sqrt{8t^2+9t^4}}$$

$$\vec{a}(t) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 6t\vec{k} \Rightarrow |\vec{a}(t)| = \sqrt{8+36t^2}$$

چون محاسبه K طولانی است از نکته زیر برای محاسبه a_N استفاده می‌کنیم

نکته: $|\vec{a}|^2 = |a_T|^2 + |a_N|^2$ بنابراین $a_N = \sqrt{|a|^2 - |a_T|^2}$

پس

$$a_N = \sqrt{8+36t^2 - \frac{(8t+18t^3)^2}{8t^2+9t^4}} = \dots = \frac{6\sqrt{2}\,t^2}{\sqrt{8t^2+9t^4}}$$

معادله دایره بوسان (دایره انحنا)

تعریف: بر هر منحنی هموار C در نقطه P روی منحنی C همواره دو دایره به شعاع $\rho = \frac{1}{K}$ مماس است. دایره‌ای که مرکزش در طرف تقعر منحنی C قرار دارد و بر منحنی C در نقطه P مماس است و شعاع آن $\rho = \frac{1}{K}$ است را دایره بوسان (دایره انحنا) بر منحنی C در نقطه P می‌نامیم.

یافتن معادله دایره بوسان: فرض کنید که مرکز دایره بوسان (x_c, y_c) باشد در این صورت معادله دایره بوسان

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = \left(\frac{1}{K}\right)^2$$

پس کافی است که انحنای منحنی C در نقطه داده شده را پیدا کنیم و مرکز دایره انحنا که در طرف تقعر منحنی C قرار دارد (یعنی روی خط قائم بر منحنی C در نقطه P قرار دارد) را پیدا کنیم.

مثال ۱۰: معادله دایره بوسان بر منحنی $y=x^2$ در نقطه $(1,1)$ را بیابید.

حل: در مثال ۷ دیدیم که $K = \frac{2}{5\sqrt{5}}$ پس شعاع دایره انحنا $\rho = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ است و چون $y'(1) = 2$

پس خط قائم در نقطه $(1,1)$ عبارت است از: $y-1 = -\frac{1}{2}(x-1)$ حال مرکز دایره انحنا روی این خط قرار دارد پس $y_c - 1 = -\frac{1}{2}(x_c - 1)$ (۱) از طرفی $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = \frac{125}{4}$ پس $(1-x_c)^2 + (1-y_c)^2 = \frac{125}{4}$ (۲)

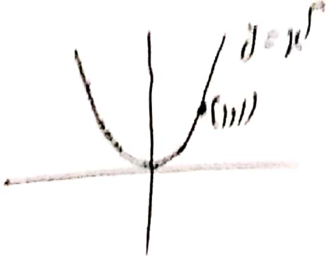
دو معادله (۱) و (۲) را باهم حل می‌کنیم بنابراین داریم (با جایگذاری (۱) در (۲)).

$$(1-x_c)^2 + \frac{1}{4}(1-x_c)^2 = \frac{125}{4}$$

$$\frac{5}{4}(1-x_c)^2 = \frac{125}{4} \Rightarrow (1-x_c)^2 = 25 \begin{cases} 1-x_c = 5 \to x_c = -4 \to y_c = 1+\frac{5}{2} = \frac{7}{2} \\ 1-x_c = -5 \to x_c = 6 \to y_c = 1-\frac{5}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

نقطه $(6, -\frac{3}{2})$ به عنوان مرکز غیرقابل قبول است چون در طرف تقعر منحنی $y=x^2$ در $(1,1)$ نیست پس مرکز $(-4, \frac{7}{2})$

صفحه ۹



است یعنی معادله دایره بوسان عبارت است از

$$(x+4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$$

مثال ۱۲: معادله دایره بوسان به منحنی $y=\cos x$ را در $x=0$ را بیابید.

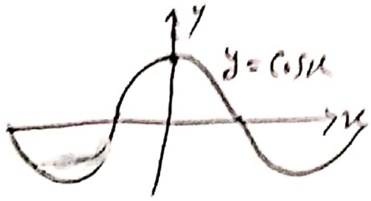
حل: اول انحنای $y=\cos x$ را در نقطه $(0,1)$ را بدست می آوریم

$y'=-\sin x$ و $y''=-\cos x$

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\to k(0,1)=\frac{|-1|}{(1+0^2)}=1\to \rho=\frac{1}{k}=1$$ شعاع دایره بوسان

مثال چون $y'(0)=0$ لذا بردار خط قائم بر منحنی $y=\cos x$ در نقطه $(0,1)$ خط $x=0$ (یعنی محور yها) است.

پس مرکز دایره انحنا (بوسان) $(0,0)$ است زیرا روی محور yها از نقطه $(0,1)$ یک واحد به سمت تقعر (پایین) می آییم پس معادله دایره بوسان عبارت است از



$$(x-0)^2+(y-0)^2=1$$

$$\boxed{x^2+y^2=1}$$

توجه: در کتاب استوارت صفحه ۱۱۰۰ برای a_T و a_N فرمول زیر آمده است می توان از آن برای محاسبه a_T و a_N از آن استفاده کرد ($|\vec r'(t)|=\frac{ds}{dt}=v$ اندازه سرعت = تندی)

$$\boxed{a_T=\frac{\vec v\cdot\vec a}{v}=\frac{\vec r'(t)\cdot\vec r''(t)}{|\vec r'(t)|}}$$

$$\boxed{a_N=kv^2=\frac{|\vec r'(t)\times\vec r''(t)|}{|\vec r'(t)|}}$$

در a_T از ضرب داخلی و در a_N از ضرب خارجی استفاده شده است

توجه: با توجه به اینکه تمرین های کتاب زیاد است تعدادی از آنها را برای حل کردن توسط شما تعیین شده است که عبارتند از:

صفحات ۱۰۱۷ شماره های ۳۳ و ۳۸

صفحات ۱۰۲۶ شماره های ۳۲، ۳۳ و ۵۴، ۵۷ و ۵۹

صفحه ۱۰۳۶ شماره های ۲۸ و ۳۱ و ۳۴ و ۳۷ و ۳۸

صفحه ۱۰۴۹ شماره های ۲۸ و ۳۳ و ۳۵ و ۲۱ و ۲۲ و ۵۷ و ۵۵

صفحه ۱۰۵۹ شماره های ۳ و ۵، ۱۸ و ۳۱ و ۳۴ و ۳۶

صفحه ۱۰۸۱ شماره های ۳، ۱۴، ۱۶ و ۱۸ و ۳۰ و ۲۸ و ۲۳ و ۴۱ و ۴۵

صفحه ۱۱۰۵ شماره های ۳۵ و ۳۷ و ۳۸ صفحه ۱۱۰۸ شماره های ۸ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۵

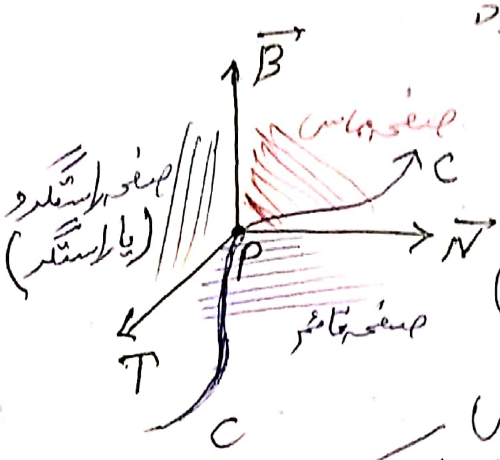
ادامه توابع برداری: دستگاه TNB (معادله های صفحه مماس و قائم و صفحه راستگرد بر یک منحنی در یک نقطه)

یادآوری: فرض میکنیم اگر C یک منحنی در فضای سه بعدی با معادله برداری $\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ باشد و P یک نقطه دلخواه روی C باشد آنگاه سه بردار $\vec{T}$، $\vec{N}$ و $\vec{B}$ در نقطه P روی منحنی C تعریف می‌شوند که عبارتند از: بردار واحد مماس:

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|}=\frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}$$

بردار واحد قائم اول: $\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$ و بردار واحد قائم دوم $\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$

این سه بردار، سه صفحه را در نقطه P روی منحنی C تعریف می‌کنند که عبارتند از: صفحه مماس (صفحه بوسان) که بردار نرمال یا عمود آن $\vec{B}$ است و توسط دو بردار $\vec{N}$ و $\vec{T}$ ساخته می‌شود.



صفحه قائم بر منحنی C در نقطه P که بردار نرمال (عمود آن) بردار $\vec{T}$ است و توسط دو بردار $\vec{N}$ و $\vec{B}$ ساخته می‌شود.

صفحه راستگرد (یا راستگر) که بردار نرمال آن (عمود بر آن) بردار $\vec{N}$ است (این صفحه در کتاب استوارت تعریف نشده است)

مثال ۱- معادله صفحه قائم و صفحه بوسان (صفحه مماس) مارپیچ استوانه‌ای با معادله برداری $\vec{R}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$ در نقطه $P(0,1,\frac{\pi}{2})$ را پیدا کنید.

حل: معادله صفحه قائم:

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow|\vec{V}(t)|=\sqrt{2}$$

$$\vec{T}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}(t)\Rightarrow\vec{T}(\tfrac{\pi}{2})=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-0)+0(y-1)+1(z-\tfrac{\pi}{2})=0$$

معادله صفحه قائم عبارت است از

$$\Rightarrow\boxed{-x+z=\frac{\pi}{2}}$$

معادله صفحه بوسان (صفحه مماس):

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}=(-\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j})$$

زیرا $\vec{T}'(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j})$ و $|\vec{T}'(t)|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-\sin t&\cos t&1\\-\cos t&-\sin t&0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j}+\vec{k})$$

$$B(\tfrac{\pi}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-0\vec{j}+k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

معادله صفحه مماس عبارت است از:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x-0)+0(y-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(z-\tfrac{\pi}{2})=0\Rightarrow\boxed{x+z=\frac{\pi}{2}}$$

مثال ۲ (تمرین ۲۶ صفحه ۱۰۹۳) معادله صفحه قائم و صفحه بوسان بر منحنی $\vec{R}(t)=(t,t^2,t^3)$ در نقطه (۱،۱،۱) را پیدا کنید.

حل: $\vec{R}(t) = (t, t^2, t^3) \Rightarrow \vec{R'}(t) = \vec{V}(t) = (1, 2t, 3t^2) \Rightarrow |\vec{V}(t)| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}(1, 2t, 3t^2) \Rightarrow \vec{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$$

بنابراین معادله صفحه قائم بر منحنی C در نقطه $P(1,1,1)$ عبارت است از: (از ضریب $\frac{1}{\sqrt{14}}$ می‌توان صرف نظر کرد)

$$1(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0 \Rightarrow \boxed{x+2y+3z=6}$$

با نوشتن $\vec{T}(t)$ به صورت $\vec{T}(t) = (1+4t^2+9t^4)^{-\frac{1}{2}}(1, 2t, 3t^2)$ داریم:

$$\vec{T'}(t) = -\frac{1}{2}(8t+36t^3)(1+4t^2+9t^4)^{-\frac{3}{2}}(1, 2t, 3t^2) + (1+4t^2+9t^4)^{-\frac{1}{2}}(0, 2, 6t)$$

$$\Rightarrow \vec{T'}(1) = -\frac{1}{2}(44)(14)^{-\frac{3}{2}}(1, 2, 3) + (14)^{-\frac{1}{2}}(0, 2, 6) \Rightarrow$$

$$\vec{T'}(1) = \frac{1}{\sqrt{14}}\left[\frac{-44}{2\times 14}(1,2,3)+(0,2,6)\right] = \frac{1}{\sqrt{14}}\left[\left(-\frac{11}{7}, -\frac{22}{7}+2, -\frac{33}{7}+6\right)\right]$$

$$\vec{T'}(t) = \frac{1}{7\sqrt{14}}(-11, -8, 9) \Rightarrow$$

از $\vec{T'}(t)$ که مضرب $\vec{N}$ است به جای $\vec{N}$ استفاده می‌کنیم

چون $\vec{N} = \frac{\vec{T'}(t)}{|\vec{T'}(t)|}$ و از $\vec{B_1}(1)$ به جای بردار $\vec{B}$ کمک می‌گیریم

$$\vec{B_1}(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -11 & -8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

چون می‌توان از ضریب عددی در معادله صفحه صرف نظر کرد

$$\vec{B_1}(t) = (18+24)\vec{i} - (9+33)\vec{j} + (-8+22)\vec{k} = 42\vec{i} - 42\vec{j} + 14\vec{k}$$

$\vec{B_1}(1)$ مضرب $\vec{B}(1)$ است که بر صفحه مماس قائم است (یا بردار قائم صفحه مماس است)

بنابراین معادله صفحه بوسان (صفحه مماس) عبارت است از:

$$42(x-1) - 42(y-1) + 14(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{3x-3y+z=1}$$

در مثال قبل بردارهای $\vec{T'}(t)$ و $\vec{B_1}(1)$ بردار واحد نیستند