صفحه ۱

به نام خدا

«تمرینهای مبانی جبر»

۱- فرض کنید که $G$ و $H$ دو گروه باشند و $L = G\times H$. فرض کنید که $\bar{G}=\{(g,e')\mid g\in G\}$ و $\bar{H}=\{(e,h)\mid h\in H\}$ که در آن $e'$ عضو خنثی گروه $H$ و $e$ عضو خنثی گروه $G$ است.

الف) نشان دهید که $\bar{G}\trianglelefteq L$ و $\bar{H}\trianglelefteq L$.

ب) ثابت کنید که $\bar{G}\cong G$ و $\bar{H}\cong H$

ج) ثابت کنید که $\frac{L}{\bar{G}}\cong \bar{H}$ و $\frac{L}{\bar{H}}\cong \bar{G}$.

۲- فرض کنید که $G$ یک گروه و $H\trianglelefteq G$ و $K\trianglelefteq G$ نشان دهید که $h_1k_1=k_1h_1$ $\forall h_1\in H, \forall k_1\in K$

۳- نشان دهید که اگر $H$ گروهی دوری از مرتبه $n$ و $G$ گروهی دوری از مرتبه $m$ باشند و $(m,n)=1$ آنگاه $H\times G$ دوری است.

۴- ثابت کنید که $G$ گروهی آبلی است اگر و فقط اگر $Inn(G)=\{\varphi_e\}$.

۵- فرض کنید که $f: G\to H$ یک همومورفیسم باشد و $K=\ker f$. اگر برای هر عضو $r$ از $R_f$ داشته باشیم $T_r=\{a\in G\mid f(a)=r\}$ ثابت کنید که $\forall a\in T_r:\ aK=T_r=Ka$

۶- فرض کنید که $f: G\to H$ همومرفیسم باشد و $H$ گروهی آبلی باشد. فرض کنید که $N\le G$ و $\ker f\subseteq N$ ثابت کنید که $N\trianglelefteq G$.

۷- فرض کنید که $G$ یک گروه و $H\le G$. اگر $gHg^{-1}=\{ghg^{-1}\mid h\in H\}$ که در آن $g\in G$. ثابت کنید که $gHg^{-1}\le G$

۸- فرض کنید که $H$ تنها زیرگروه $G$ باشد که از مرتبه $|H|$ است. اگر $G$ متناهی باشد ثابت کنید که $H\trianglelefteq G$.

۹- فرض کنید که $H\le G$ و $N_G(H)=\{g\in G\mid gHg^{-1}=H\}$ ثابت کنید:

الف) $N_G(H)\le G$  ب) $H\trianglelefteq N_G(H)$

ج) اگر $H$ زیرگروه نرمالی از یک زیرگروه $K$ از $G$ باشد آنگاه $K\subseteq N_G(H)$

د) $N_G(H)=G \iff H\trianglelefteq G$

۱۰- فرض کنید که $G$ یک گروه و $N\le G$ و $[G:N]=2$ ثابت کنید که $N\trianglelefteq G$.

۱۱- فرض کنید که $\{H_i\mid i\in I\}$ خانواده‌ای از زیرگروههای نرمال $G$ باشد. ثابت کنید $\bigcap_{i\in I}H_i\trianglelefteq G$.

۱۲- فرض کنید که $A$ و $B$ دو زیرگروه $G$ باشند و $|A|=9$ و $|B|=11$ ثابت کنید که $A\cap B=\{e\}$

۱۳- ثابت کنید که یک گروه، متناهی است $\Longleftrightarrow$ دارای تعداد متناهی زیرگروه باشد

۱۴- نشان دهید که برای هر زیرگروه $H$ از $S_n$ ، $n\geq 2$ یا تمام جایگشت های $H$ زوج یا دقیقا نصفشان زوج است.

۱۵- فرض کنید که $G$ یک گروه آبلی و $H=\{x^2 \mid x\in G\}$ ثابت کنید که $H\trianglelefteq G$

۱۶- فرض کنید که $T\in AUT(G)$ و $T(x)=x^{-1}$ $\forall x\in G$ ثابت کنید که $G$ آبلی است.

۱۷- فرض کنید که $G$ یک گروه آبلی باشد و $|G|=n$ و $m$ یک عدد صحیح مثبت باشد بقسمی که $(m,n)=1$ نشان دهید $f:G\to G$ و $f(x)=x^m$ یک اتومورفیسم است.

۱۸- فرض کنید $G\neq\{e\}$ یک گروه دوری باشد که $G=\langle a\rangle$ آنگاه ثابت کنید که هر همومورفیسم $f:G\to G$ یک اتومورفیسم است اگر و فقط اگر $f(a)$ یک مولد $G$ باشد.

۱۹- مثالی از یک گروه و عناصر $a$ و $b$ از آن ارائه دهید که مرتبه $a$ و $b$ متناهی باشند ولی مرتبه $ab$ نامتناهی باشد.

۲۰- فرض کنید $G$ یک گروه و $H$ و $K$ زیرگروههای $G$ باشند اگر $|H|=12$ و $|K|=5$ ثابت کنید که $H\cap K=\{e\}$