فصل دوم فضای برداری

تعریف (فضای برداری) فرض کنید که $(V,+)$ یک گروه آبلی باشد و F یک میدان (میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد) باشد. ضرب اسکالر $F\times V \to V$: $\circ$ با صورت $\forall c\in F, \forall \alpha\in V: \circ(c,\alpha)=c\alpha$ تعریف می کنیم. در این صورت گروه $(V,+)$ را یک فضای برداری روی میدان F نامیم هرگاه ضرب اسکالر دارای شرایط زیر روی V باشد:

۱) $\forall \alpha\in V: 1\alpha=\alpha$

۲) $\forall c_1,c_2\in F, \forall \alpha\in V: (c_1c_2)\alpha=c_1(c_2\alpha)$

۳) $\forall c\in F, \forall \alpha,\beta\in V: c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$

۴) $\forall c_1,c_2\in F, \forall \alpha\in V: (c_1+c_2)\alpha=c_1\alpha+c_2\alpha$

قرارداد: در این فصل چون F را میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ در نظر گرفته می شود بنابراین V را یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ در نظر می گیریم و اعضای V را بردار می نامیم هر چند که ممکن است اعضای V اعداد یا دیگر اشیای ریاضی مانند ماتریس، توابع، چندجمله ای ها و ... باشند.

مثال ۱: با فرض $V=\mathbb{R}^n$ مجموعه تمام n تایی های مرتب با صورت $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ (یا بردارهای n بعدی) یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است.

زیرا $(\mathbb{R}^n,+)$ یک گروه آبلی است (عمل جمع همان جمع مؤلفه ای (جمع برداری) است) و ① $1\alpha=\alpha$

③ $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$ ② $(c_1c_2)\alpha=c_1(c_2\alpha)$ ④ $(c_1+c_2)\alpha=c_1\alpha+c_2\alpha$

که در آن $\alpha=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ و $\beta=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ همچنین $c,c_1,c_2\in\mathbb{R}$

توجه: در این مثال عمل جمع همان جمع برداری است و عمل ضرب هم همان ضرب عدد در بردار است.

مثال ۲: مجموعه تمام ماتریس های $m\times n$ روی $\mathbb{R}$ را با $V=Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ نمایش می دهیم. $V=Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ تحت عمل جمع ماتریسی و ضرب عدد در ماتریس یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است.

مثال ۳: در مثال ۲ همچنین $V=Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است.

توجه: $Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$ و $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ هم فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ هستند. همچنین اگر p عددی اول باشد $Mat_{m\times n}(\mathbb{Z}_p)$ و $Mat_{n\times n}(\mathbb{Z}_p)$ هم فضای برداری روی میدان $\mathbb{Z}_p$ هستند.

توجه: $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ و

$$Mat_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)=\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$$

تعداد اعضای فضای برداری $MAT_{2\times2}(\mathbb{Z}_2)$ برابر با ۱۶ است.

مثال ۴: مجموعه تمام توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ را با $V=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ نمایش می‌دهیم. $V=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ تحت جمع توابع و ضرب عدد در تابع یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است.

مثال ۵: مجموعه تمام چندجمله‌ای‌ها روی اعداد حقیقی از درجه متناهی با ضرایب در $\mathbb{R}$ را با $V=\mathbb{R}[x]$ نمایش می‌دهیم به عبارت دیگر

$$\mathbb{R}[x]=\left\{\sum_{i=0}^{n}a_ix^i \mid n\in\mathbb{N}, a_i\in\mathbb{R}\right\}$$

$$f(x)\in\mathbb{R}[x] \Rightarrow f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

یعنی $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است.

$V=\mathbb{R}[x]$ تحت جمع چندجمله‌ای‌ها و ضرب عدد در چندجمله‌ای یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است

مثال ۶: مجموعه تمام توابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ را با $V=C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم.

$V=C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ تحت جمع توابع و ضرب عدد در تابع یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است

توجه: $\mathbb{R}[x]\subseteq\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ و $C(\mathbb{R},\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ و در مثال زیر $D(\mathbb{R},\mathbb{R})\subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

مثال ۷: مجموعه تمام توابع مشتق‌پذیر از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ را با $V=D(\mathbb{R},\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم و $D(\mathbb{R},\mathbb{R})$ هم تحت جمع توابع و ضرب عدد در تابع یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است.

مثال ۸: فرض کنید که S یک صفحه دلخواه باشد که شامل مبداء مختصات باشد در این صورت مجموعه تمام نقاط این صفحه (که زیرمجموعه $\mathbb{R}^3$ است) یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است

معادله هر صفحه‌ای که شامل مبداء است به صورت $ax+by+cz=0$ است.

این مثال می‌گوید که مجموعه تمام (x,y,z) هایی که در معادله صفحه $ax+by+cz=0$ صدق می‌کنند یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است.

مثال ۹: فرض کنید که A یک ماتریس $m\times n$ روی $\mathbb{R}$ باشد. مجموعه V را مجموعه تمام جوابهای دستگاه همگن $AX=0$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است.

$V=\{X\in\mathbb{R}^n \mid AX=0\}$

توجه: $V\subseteq\mathbb{R}^n$ زیرا اگر $X,Y\in V$ آنگاه $X+Y\in V$ زیرا $AX=0$ و $AY=0$ پس $A(X+Y)=0$ است و $(V,+)$ یک گروه آبلی است و اگر $c\in\mathbb{R}$ و $X\in V$ آنگاه

$CX\in V$ زیرا $A(CX)=C(AX)=C0=0$ یعنی عمل ضرب همان ضرب عدد در بردار است و هر چهار خاصیت ضرب در فضای برداری را دارد.

مثال ۱۰. نشان دهید که هر خطی که از مبداء مختصات $\mathbb{R}^3$ می‌گذرد تحت عمل جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در $\mathbb{R}^3$ یک فضای برداری است.

حل: معادله پارامتری هر خطی که از مبداء مختصات $\mathbb{R}^3$ می‌گذرد به صورت $\begin{cases} x=at \\ y=bt \\ z=ct \end{cases}$ است که در آن t پارامتر است ($t\in\mathbb{R}$). بنابراین با فرض اینکه V مجموعه تمام نقاط خط L که از مبداء می‌گذرد در نظر بگیریم آنگاه

$$V=\{(x,y,z) \mid x=at,\ y=bt,\ z=ct,\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

عمل جمع و ضرب همان عمل جمع و ضرب در مثال ۸ است بنابراین V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است.

مثال ۱۱. فرض کنید که V مجموعه تمام نقاط واقع در ربع اول در صفحه مختصات $\mathbb{R}^2$ باشد یعنی $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0\}$. در این صورت V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ نیست زیرا اگر $(x,y)\in V$ آنگاه $(-x,-y)\notin V$. یعنی $(V,+)$ یک گروه نیست.

قضیه ۱. فرض کنید که V یک فضای برداری و $\alpha\in V$ دلخواه و K یک اسکالر در $\mathbb{R}$ باشد در این صورت: الف) $0.\alpha=0$ ب) $K0=0$ ج) $-1\alpha=-\alpha$

د) $K\alpha=0 \Longrightarrow K=0$ یا $\alpha=0$

زیرفضای برداری

تعریف (زیرفضای برداری) فرض کنید که V یک فضای برداری روی میدان F ($F=\mathbb{R}$) باشد. زیرمجموعه W از V را یک زیرفضای برداری V نامیم و می‌نویسیم $W\leq V$ هرگاه W خودش تحت جمع و ضرب اسکالر که روی V تعریف شده است یک فضای برداری باشد.

مثال ۱. با توجه به مثال‌های ذکر شده در فضای برداری، چند زیرفضای برداری به صورت زیر وجود دارد.

۱) مجموعه تمام نقاطی که روی یک صفحه‌ای قرار دارد که از مبداء می‌گذرد یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^3$ است

۲) " " " " یک خط قرار دارد که از مبداء می‌گذرد یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^3$ است

۳) $C(\mathbb{R},\mathbb{R})\leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ۴) $D(\mathbb{R},\mathbb{R})\leq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و $D(\mathbb{R},\mathbb{R})\leq\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

۵) $\mathbb{R}[x]\leq\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ۶) $\mathbb{R}[x]\leq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

توجه: برای بررسی اینکه زیرمجموعه W از V یک زیرفضای V است لازم نیست که تمام اصول فضای برداری را برای W چک کنیم بلکه کافی است که W تحت جمع و ضرب اسکالر V بسته باشد. با قضیه زیر توجه کنید:

قضیه ۲: فرض کنید که W زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضای برداری V باشد. آنگاه W زیرفضای برداری V است اگر و فقط اگر دو شرط زیر برقرار باشد.

۱) W تحت جمع بسته باشد یعنی $\forall \alpha,\beta\in W \Rightarrow \alpha+\beta\in W$

۲) W تحت ضرب اسکالر بسته باشد یعنی $\forall\alpha\in W,\ \forall k\in\mathbb{R}:\ k\alpha\in W$

به جای شرط (۱) و (۲) می‌توان شرط $\forall\alpha,\beta\in W,\ \forall k\in\mathbb{R}\quad k\alpha+\beta\in W$ جایگزین کرد.

این قضیه را می‌توان به صورت زیر هم بیان کرد.

$$\boxed{W\le V \iff \emptyset\ne W\subseteq V\ ,\ \forall\alpha,\beta\in W,\ \forall k\in\mathbb{R}:\ c\alpha+\beta\in W}$$

مثال ۲: فرض کنید که $V=Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ و $W_1=\left\{\begin{bmatrix}0&a\\b&0\end{bmatrix}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$

$W_2=\left\{\begin{bmatrix}a&0\\0&0\end{bmatrix}\,\middle|\,a\in\mathbb{R}\right\}$ و $W_3=\left\{\begin{bmatrix}0&a\\b&c\end{bmatrix}\,\middle|\,a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ و $W_4=\left\{\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$

آنگاه W_1 و W_2 و W_3 و W_4 همگی زیرفضای V هستند.

حل: نشان می‌دهیم که $W_1\le V$ (باقی زیرمجموعه‌های دیگر مشابه است)

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\in W_1 \Rightarrow W_1\ne\emptyset \quad . \quad \forall \begin{bmatrix}0&a_1\\b_1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&a_2\\b_2&0\end{bmatrix}\in W_1\ ,\ \forall k\in\mathbb{R}$$

$$k\begin{bmatrix}0&a_1\\b_1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&a_2\\b_2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&ka_1+a_2\\kb_1+b_2&0\end{bmatrix}\in W_1 \Longrightarrow W_1\le V$$

مثال ۳: نشان دهید که مجموعه تمام جواب‌های دستگاه همگن $AX=0$ (که در آن A ماتریسی $m\times n$ است) زیرفضای برداری $\mathbb{R}^n$ است.

حل: فرض کنید که W مجموعه تمام جواب‌های دستگاه $AX=0$ باشد. بدیهی است که $W\ne\emptyset$ زیرا $X=0\in W$ (چون $A0=0$). از طرفی اگر X و Y دو عضو از W باشند و $k\in\mathbb{R}$ آنگاه

چون $AX=0$ و $AY=0$ پس $A(kX+Y)=k\underbrace{AX}_{0}+\underbrace{AY}_{0}=0\ \in W$

بنابراین $W\le\mathbb{R}^n$

مثال ۴: اگر V یک فضای برداری باشد آنگاه $\{0\}\le V$ و $V\le V$. بنابراین همه فضای برداری V دارای حداقل دو زیرفضای $\{0\}$ و خود V است.

تعریف: زیرفضای $\{0\}$ را زیرفضای بدیهی V می‌نامیم.

مثال ۵: نشان دهید که $W=\{(0,a_2,a_3,\ldots,a_n)\mid a_i\in\mathbb{R}\}$ زیرفضای برداری $\mathbb{R}^n$ است.

حل: بدیهی است که $W\neq\phi$ زیرا $0=(0,0,0,\ldots,0)\in W$.

$$\forall X=(0,a_2,a_3,\ldots,a_n) \text{ و } Y=(0,b_2,b_3,\ldots,b_n)\in W \text{ و } \forall K\in\mathbb{R}$$

$$KX+Y=(0,Ka_2+b_2,Ka_3+b_3,\ldots,Ka_n+b_n)\in W \Longrightarrow W\leq\mathbb{R}^n$$

توجه: در مثال قبل اگر مؤلفه iام nتایی $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ صفر باشد یعنی
$W_i=\{(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},0,a_{i+1},\ldots,a_n)\mid a_i\in\mathbb{R}\}$ آنگاه $W_i\leq\mathbb{R}^n$ $\quad \forall i=1,2,\ldots,n$

تعریف: بردار β را ترکیب خطی از بردارهای α_1 و α_2 و ... و α_n نامیم هرگاه بتوان β را به صورت $\beta=\sum_{i=1}^{n}K_i\alpha_i$ نوشت که در آن $K_1,K_2,\ldots,K_n\in F$ اسکالر هستند.

مثال ۶: بردار $\beta=(9,2,7)$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\alpha_1=(1,2,-1)$ و $\alpha_2=(6,4,2)$ است ولی بردار $\gamma=(4,-1,8)$ یک ترکیب خطی از بردارهای α_1 و α_2 نیست. زیرا

$$\beta=(9,2,7)=-3(1,2,-1)+2(6,4,2)$$

$$\gamma=(4,-1,8)=x(1,2,-1)+y(6,4,2)=(x+6y,2x+4y,-x+2y)\Rightarrow\begin{cases}x+6y=4\\2x+4y=-1\\-x+2y=8\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&6&4\\2&4&-1\\-1&2&8\end{array}\right]\xrightarrow[-2R_1+R_2\to R_2]{R_1+R_3\to R_3}\left[\begin{array}{cc|c}1&6&4\\0&-8&-9\\0&8&12\end{array}\right]\xrightarrow{R_2+R_3\to R_3}\left[\begin{array}{cc|c}1&6&4\\0&-8&-9\\0&0&3\end{array}\right]\Rightarrow 0=3$$

پس دستگاه جواب ندارد بنابراین γ ترکیب خطی از بردارهای α_1 و α_2 نیست.

تعریف: فرض کنید که V یک فضای برداری باشد و $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in V$. اگر هر بردار دلخواه β از V را بتوان به صورت ترکیبی خطی از α_1 و α_2 و ... و α_n نوشت در این صورت می‌گوییم که بردارهای α_1 و α_2 و ... و α_n فضای V را تولید می‌کنند و می‌نویسیم $V=\langle\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\rangle$ و مجموعه $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ را مجموعه مولد فضای V می‌نامیم.

مثال ۷: فضای $\mathbb{R}^2$ توسط دو بردار $i=(1,0)$ و $j=(0,1)$ تولید می‌شود زیرا

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2:\quad (a,b)=ai+bj$$

به همین صورت فضای $\mathbb{R}^3$ توسط سه بردار $i=(1,0,0)$ و $j=(0,1,0)$ و $k=(0,0,1)$ تولید می‌شود زیرا

$$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\quad (a,b,c)=ai+bj+ck$$

و در حالت کلی فضای $\mathbb{R}^n$ توسط n بردار $e_1=(1,0,0,\ldots,0)$ و $e_2=(0,1,0,\ldots,0)$ و ... و $e_n=(0,0,\ldots,1)$ تولید می‌شود زیرا

$$\forall(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n:\quad (a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$$

مثال ۸: تک جمله‌ای‌های $1, x, x^2, \dots, x^n$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که این تک جمله‌ای‌ها فضای برداری P_n را تولید می‌کند که در آن P_n مجموعه تمام چند جمله‌ای‌های از درجه n است.

$$P_n = \{ f(x) \mid f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \}$$

حل: بدیهی است که

$$\forall f(x) \in P_n : \quad f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 \times 1 + a_1 \times x + \dots + a_n \times x^n$$

یعنی $1, x, x^2, \dots, x^n$ فضای برداری P_n را تشکیل می‌دهد زیرا $f(x)$ ترکیب خطی از $1, x, x^2, \dots, x^n$ است.

مثال ۹: آیا بردارهای $\alpha_1 = (1,1,2)$ و $\alpha_2 = (1,0,1)$ و $\alpha_3 = (2,1,3)$ فضای $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کنند؟

حل: فرض کنید که $\alpha = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ دلخواه باشد و

$$(a,b,c) = x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3$$

$$(a,b,c) = x(1,1,2) + y(1,0,1) + z(2,1,3) = (x+y+2z,\ x+z,\ 2x+y+3z) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+2z = a \\ x+z = b \\ 2x+y+3z = c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right] \xrightarrow[-2R_1+R_3 \to R_3]{-R_1+R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & -a+b \\ 0 & -1 & -1 & -2a+c \end{array}\right] \xrightarrow[-R_2]{-R_2+R_3 \to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & -a-b+c \end{array}\right]$$

برای داشتن جواب باید $b+a=c$

بنابراین اگر $b+a \neq c$ دستگاه جواب ندارد.

پس سه بردار α_1 و α_2 و α_3 همه فضای $\mathbb{R}^3$ را تولید نمی‌کنند.

قضیه ۳: اگر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ بردارهای در فضای برداری V باشد آنگاه

الف) مجموعه تمام ترکیب‌های خطی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ زیرفضای برداری V است

ب) اگر مجموعه تمام ترکیب‌های خطی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ را با W نمایش دهیم آنگاه W کوچکترین زیرفضای V است که شامل مجموعه $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ است یعنی هر زیرفضای دیگری از V که شامل S است (یعنی شامل همه اعضای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ است) باید شامل W باشد.

به عبارت دیگر $W = \{\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i \mid c_i \in \mathbb{R}\}$ کوچکترین زیرفضای V شامل مجموعه S است.

قرارداد: فضای تولید شده به وسیله مجموعه بردارهای $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ را با نماد $Lin(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ یا $Lin(S) = \langle S \rangle$ نمایش می‌دهیم

Linear space spanned
فضای خطی تولید شده توسط

مثال ۱۰: طبق قرارداد قبل $\langle i,j\rangle = \text{Lin}(i,j)$ و $\mathbb{R}^2 = \text{Lin}(i,j) = \langle i,j\rangle$ و $\mathbb{R}^3 = \text{Lin}(i,j,k) = \langle i,j,k\rangle$

مثال ۱۱: اگر α_1 و α_2 دو بردار غیر هم‌خط در $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه $\text{Lin}(\alpha_1,\alpha_2)$ را مشخص کنید و همچنین اگر α یک بردار در $\mathbb{R}^3$ یا $\mathbb{R}^2$ باشد آنگاه $\text{Lin}(\alpha)$ را پیدا کنید.

حل: همان صفحه مشخص شده توسط دو بردار α_1 و α_2 یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^3$ است و شامل تمام ترکیبات خطی این دو بردار به صورت $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ است لذا این صفحه همان $\text{Lin}(\alpha_1,\alpha_2)$ است. بطور مشابه؛ همان مجموعه تمام بردارهایی که به صورت $k\alpha$ هستند عبارت است از خطی که به وسیله بردار α مشخص می‌شود لذا این خط همان $\text{Lin}(\alpha) = \langle\alpha\rangle$ است.

تعریف (استقلال خطی و وابسته خطی) اگر $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ یک مجموعه از بردارها در یک فضای برداری V باشد آنگاه معادله برداری $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\dots+c_n\alpha_n=0$ حداقل یک جواب بدیهی به صورت $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ است. اگر این جواب تنها جواب معادله برداری بالا باشد آنگاه می‌گوییم که S یک مجموعه مستقل خطی است و اگر این معادله برداری دارای جواب غیر بدیهی (غیر صفر) باشد می‌گوییم که مجموعه S وابسته خطی است.

مثال ۱۲: اگر $\alpha_1=(2,-1,0,3)$ و $\alpha_2=(1,2,5,-1)$ و $\alpha_3=(7,-1,5,8)$ ثابت کنید که مجموعه $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ یک مجموعه وابسته خطی در $\mathbb{R}^4$ است $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}^4)$

حل.

$$x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=0=(0,0,0,0) \quad (1) \Longrightarrow \begin{cases} 2x+y+7z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ 5y+5z=0 \\ 3x-y+8z=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2R_2+R_1\to R_1 \\ 3R_2+R_4\to R_4}]{\frac{1}{5}R_3} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-5R_3+R_4 \\ \to R_4}]{-5R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y=-z \quad \text{و} \quad x=2y-z=-3z \Longrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-3z \\ z=z \end{cases} \quad z \text{ دلخواه}.$$

اگر $z\neq 0$ در نظر بگیریم معادله برداری (1) جواب ناصفر دارد پس این سه بردار وابسته خطی هستند.

مثال ۱۳: نشان دهید که الف) سه بردار $i=(1,0,0)$ و $j=(0,1,0)$ و $K=(0,0,1)$ مستقل خطی هستند.

ب) دو بردار $i=(1,0)$ و $j=(0,1)$ در $\mathbb{R}^2$ مستقل خطی هستند.

حل: الف)

$$ai+bj+cK=0=(0,0,0) \Rightarrow (a,b,c)=(0,0,0) \Rightarrow a=b=c=0$$

چون a و b و c هر سه صفر است پس i و j و K در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی است.

ب)

$$ai+bj=0=(0,0) \Rightarrow (a,b)=(0,0) \Rightarrow a=b=0$$

چون هر دو a و b صفر است پس مجموعه $\{i,j\}$ در $\mathbb{R}^2$ مستقل خطی است.

تبصره و نکته: برای اینکه n بردار در فضای n بعدی $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی باشند طبق مباحث فصل ۱ کافی است که دترمینان ماتریس A (این n بردار سطرها یا ستونهای) ماتریس A هستند) مخالف صفر شود (یعنی دستگاه همگن $AX=0$ جواب فقط بدیهی صفر داشته باشد) و اگر $\det A=0$ آنگاه این n بردار وابسته خطی می‌شوند.

مثال ۱۴: آیا سه بردار $\alpha=(1,-2,3)$ و $\beta=(5,6,-1)$ و $\gamma=(3,2,1)$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی اند؟

حل:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1(6+2)+2(5+3)+3(10-18)=8+16-24=0$$

پس این سه بردار وابسته خطی اند.

تبصره: از واژه وابسته خطی چنین استنباط می‌شود که بردارها به نحوی با هم وابسته هستند و در واقع هم چنین است. زیرا اگر بردارهای α_1 و α_2 و ... و α_n وابسته خطی باشند آنگاه در معادله برداری $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n=0$ حداقل یکی از ضرایب c_i ها ناصفر است فرض کنید که $c_K\neq 0$ در این صورت

$$\alpha_K=-\frac{1}{c_K}\left[c_1\alpha_1+\cdots+c_{K-1}\alpha_{K-1}+c_{K+1}\alpha_{K+1}+\cdots+c_n\alpha_n\right]$$

یعنی α_K ترکیب خطی از باقی بردارهای α_1 و α_2 و ... و α_{K-1} و α_{K+1} و ... و α_n است.

مثال ۱۵. نشان دهید که مجموعه‌ای شامل دو بردار یا بیشتر از دو بردار وابسته خطی است اگر و فقط اگر حداقل یکی از بردارها به صورت ترکیب خطی از باقی بردارها باشد.

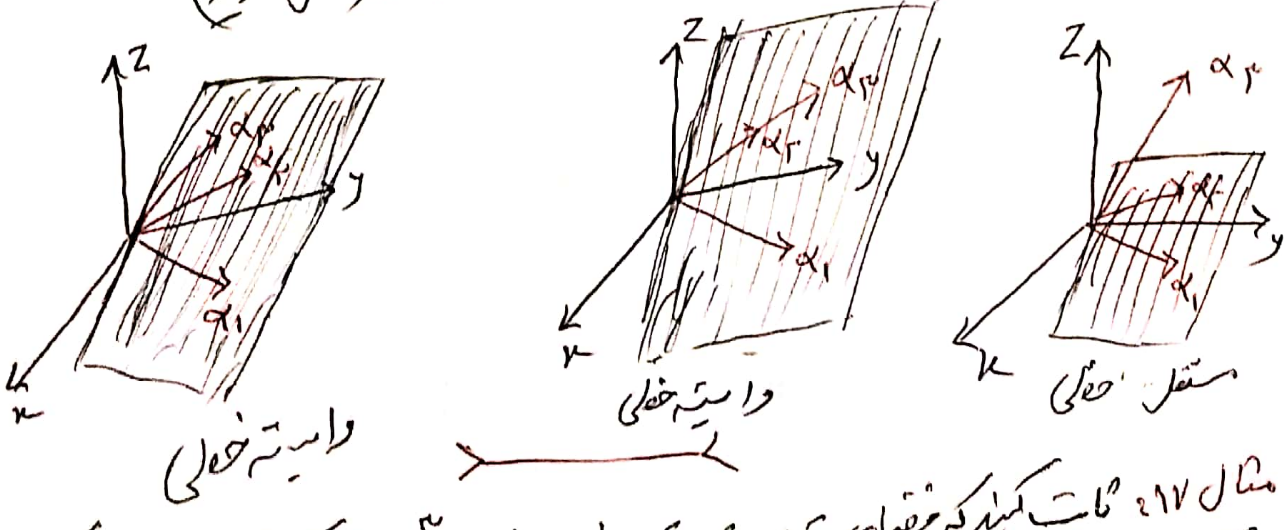
اثبات: اگر $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_K\}$ یک مجموعه وابسته خطی باشد طبق تبصره قبل یکی از بردارها ترکیب خطی از باقی بردارها می‌شود. برعکس اگر یکی از بردارهای مجموعه S مثلاً α_K

ترکیب خطی از باقی بردارها باشد پس اسکالرهای c_1 و c_2 و ... و c_{k-1} و c_{k+1} و ... و c_n وجود دارد که $\alpha_k = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_{k-1}\alpha_{k-1} + c_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + c_n\alpha_n$ بنابراین معادله برداری $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_{k-1}\alpha_{k-1} \underline{- \alpha_k} + c_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + c_n\alpha_n = 0$ جواب نابدیهی دارد یعنی تمام ضرایب c_i ها صفر نیستند پس $S=\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ وابسته خطی است

نتیجه: در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ یا ... یا $\mathbb{R}^n$ دو بردار وابسته خطی است اگر و فقط اگر یکی از بردارها مضربی از بردار دیگر باشد (یعنی دو بردار روی خطی که از مبداء می‌گذرند قرار دارند).

مثال ۱۶: ثابت کنید که اگر α_1 و α_2 و α_3 سه بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه مجموعه $S=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ وابسته خطی اند اگر و فقط اگر این سه بردار در صفحه‌ای که از مبداء می‌گذرد قرار داشته باشد.

حل: طبق مثال ۱۵: سه بردار α_1 و α_2 و α_3 وابسته خطی اند اگر و فقط اگر حداقل یکی از این سه بردار ترکیب خطی از دو بردار دیگر باشد یعنی اگر و فقط اگر یکی از این سه بردار در فضای تولید شده توسط دو بردار دیگر قرار داشته باشد (طبق مثال ۱۷ یا طبق طبق تعریف فضای تولید شده توسط بردارها) فضای تولید شده توسط دو بردار دلخواه در $\mathbb{R}^3$ عبارت است از یک خط است که از مبداء می‌گذرد یا یک صفحه که از مبداء می‌گذرد و یا خود مبداء. در هر یک از این سه حالت فضای تولید شده توسط دو بردار در $\mathbb{R}^3$ همواره بر یک صفحه که از مبداء می‌گذرد قرار دارد (اشکال زیر)



مثال ۱۷: ثابت کنید که فضای تولید شده توسط دو بردار در $\mathbb{R}^3$ یا بر یک صفحه مار بر مبداء قرار دارد و یا بر یک خط قرار دارد که از مبداء می‌گذرد و یا خود مبداء مختصات است.

حل: فرض کنید که α_1 و α_2 دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند که هم‌خط و نقطه آغازین آنها مبداء مختصات باشد در این صورت $\alpha_1 = K\alpha_2$ و $\frac{1}{K}\alpha_1 = \alpha_2$ بنابراین طبق مثال ۱۱ فضای تولید شده توسط دو بردار α_1 و α_2 خطی است که از مبداء می‌گذرد. اگر α_1 و α_2 در یک راستا نباشند و $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^3$ آنگاه طبق مثال ۱۱ فضای تولید شده توسط این دو بردار صفحه‌ای است که از مبداء مختصات می‌گذرد. و اگر بردارهای α_1 و α_2 بردار صفر باشند آنگاه فضای تولید شده توسط این دو بردار همان فضای برداری صفر است یعنی $\{(0,0,0)\}$ یعنی مبداء مختصات.

قضیه ۴: فرض کنید که $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\}$ مجموعه‌ای از بردارها در $\mathbb{R}^n$ باشد اگر $m>n$ آنگاه مجموعه S وابسته خطی است.

اثبات: فرض کنید که $\alpha_1=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n})$ و ... و $\alpha_m=(a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mn})$ آنگاه معادله برداری $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_m\alpha_m=0$ تشکیل یک دستگاه معادلات خطی n معادله و m مجهول تشکیل می‌دهد طبق نتیجه صفحه ۳۱ چون $m>n$ یعنی تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات است پس این دستگاه بی‌نهایت جواب دارد لذا مجموعه S وابسته خطی است.

تمرین:

۱- اگر (a_1, b_1, c_1) جواب معادله $ax+by+cz=0$ باشد آنگاه $(-a_1,-b_1,-c_1)$ جواب $ax+by+cz=0$ است؟

۲- اگر V مجموعه تمام توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد که $f(1)=0$ باشد نشان دهید که V با دو عمل جمع توابع و ضرب عدد در تابع یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است.

۳- فرض کنید که $V=Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ و

$$W_1=\{A\in Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid \det A=0\}$$

و $$W_2=\{A\in Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid A^T=A\}$$

و $$W_3=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \mid a+d=0\right\}$$

بررسی کنید که W_1 و W_2 و W_3 زیرفضای V هستند یا خیر.

۳- کدام یک از بردارهای زیر یک ترکیب خطی از بردارهای $\alpha_1=(-1,1,3)$ و $\alpha_2=(4,2,0)$ هستند؟

الف) $\alpha=(3,3,3)$ ب) $\beta=(2,4,6)$ ج) $\gamma=(5,1,6)$ د) $(0,0,0)$

۴- اگر $A=\begin{bmatrix}-1&2\\1&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2&1\\0&4\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}0&-2\\4&-2\end{bmatrix}$ آنگاه کدام یک از ماتریس‌های زیر ترکیب خطی از A و B و C هستند.

الف) $\begin{bmatrix}0&2\\6&8\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}5&7\\-1&1\end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}-8&-1\\6&-8\end{bmatrix}$

۵- معادله صفحه‌ای بنویسید که توسط بردارهای $\alpha=(1,1,-1)$ و $\beta=(2,2,5)$ تولید می‌شود.

۶- معادله پارامتری خطی بنویسید که توسط بردار $\alpha=(7,2,-1)$ تولید می‌شود.

پایه (مبنا) و بُعد فضای برداری

تعریف: اگر V یک فضای برداری (همراه F) و $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ زیر مجموعه‌ای متناهی از V باشد، S را یک پایه (مبنا) برای V نامیم هرگاه دو شرط زیر داشته باشد:

الف) S مجموعه مستقل خطی باشد   ب) S فضای V را تولید کند.

همچنین فضای برداری غیرصفر V ($V\neq\{0\}$) را متناهی البعد (با بعد متناهی) نامیم هرگاه V شامل یک مجموعه متناهی از بردارها به صورت $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ باشد که این مجموعه S یک پایه برای V باشد. به عبارت دیگر V یک پایه متناهی داشته باشد، و اگر چنین مجموعه‌ای از V وجود نداشته باشد آنگاه V را نامتناهی البعد (با بعد نامتناهی) می‌نامیم.

قرارداد: فضای برداری $V=\{0\}$ را با بعد متناهی در نظر می‌گیریم هرچند که مجموعه مستقل خطی ندارد و در نتیجه پایه‌ای ندارد.

مثال ۱: نشان دهید که $S=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ که در آن $e_1=(1,0,0,\dots,0)$ و $e_2=(0,1,0,\dots,0)$ و ... و $e_n=(0,0,\dots,0,1)$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است [این پایه را پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم].

حل: S مستقل خطی است زیرا

$$x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n=0 \Longrightarrow x_1=x_2=\dots=x_n=0$$

و S فضای $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کند.

$$\forall (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ (x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n$$

پس S یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

نتیجه: مجموعه $S=\{i,j\}$ یک پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^2$ و $S=\{i,j,k\}$ یک پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^3$ است.

مثال ۲: فرض کنید که $\alpha_1=(1,2,1)$ و $\alpha_2=(2,9,0)$ و $\alpha_3=(3,3,4)$ سه بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند. نشان دهید که $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است.

حل: S مجموعه مستقل خطی است زیرا

$$\det\begin{bmatrix}1&2&1\\2&9&0\\3&3&4\end{bmatrix}=1(36-0)-2(8-0)+3(0-9)=-1\neq 0$$

S مولد فضای $\mathbb{R}^3$ است (یا S فضای $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کند)

$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$$

$$x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=(a,b,c) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=a \\ 2x+9y+3z=b \\ x+4z=c \end{cases}$$

چون $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&9&3\\1&0&4\end{bmatrix}$ معکوس پذیر است پس جواب دستگاه منحصر به فرد است پس S فضای $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کند. (تمرین: دستگاه را حل کنید)

مثال ۳: نشان دهید که $S=\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ یک پایه برای P_n مجموعه تمام چندجمله‌ای‌ها از درجه n با ضرایب در $\mathbb{R}$ است.

حل: در مثال ۸ بخش قبل نشان داده شد که S فضای P_n را تولید می‌کند و برای هر $f(x)\in P_n$ داریم

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

برای مستقل خطی بودن مجموعه S: فرض کنید که $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=0$ چون این معادله یک اتحاد است و به ازای جمیع مقادیر x باید برقرار باشد و چون یک چندجمله‌ای از درجه n حداکثر می‌بایست n تا ریشه در $\mathbb{R}$ داشته باشد بنابراین ضرایب باید همگی صفر باشند تا این اتحاد برقرار بماند. پس $a_0=a_1=\dots=a_n=0$ یعنی S مجموعه مستقل خطی است.

مثال ۴: نشان دهید که $S=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ یک پایه برای $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ است.

حل: S فضای $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ را تولید می‌کند زیرا $\forall A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ داریم

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

S یک مجموعه مستقل خطی است زیرا اگر

$$a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a=b=c=d=0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

مثال ۵: اگر $S=\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی در یک فضای برداری دلخواه V باشد. ثابت کنید که مجموعه S یک پایه برای $W=Lin(S)$ است.

اثبات: چون S مستقل خطی است و فضای $W=Lin(S)$ را تولید می‌کند.

قضیه ۵: اگر $S=\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد آنگاه هر مجموعه با بیش از n عضو (بردار) وابسته خطی است.

قضیه ۶: دو پایه متمایز برای یک فضای برداری با بعد متناهی دارای تعداد بردارهای یکسان هستند. به عبارت دیگر اگر $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ و $S_2=\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m\}$ دو پایه متمایز برای فضای برداری V باشند آنگاه $n=m$

توضیح: طبق مثال‌های قبل هر پایه برای فضاهای برداری $\mathbb{R}^n$ و P_{n-1} دارای n عضو است. هر پایه برای $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ دارای ۴ عضو است و هر پایه برای $Mat_{2\times2}(\mathbb{C})$ دارای ۸ عضو است (یعنی میدان در تعداد اعضای پایه تاثیر دارد). هر پایه برای P_n دارای $n+1$ عضو است.

پایه فضای $Mat_{2\times2}(\mathbb{C})$ عبارت است از

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}i&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&i\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\i&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&i\end{bmatrix}\right\}$$

در اینجا $Mat_{2\times2}(\mathbb{C})$ به عنوان یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ در نظر گرفته شده است.

ولی اگر $Mat_{2\times2}(\mathbb{C})$ به عنوان یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ در نظر بگیریم هر پایه آن دارای ۴ عضو است.

تعریف: تعداد بردارهای موجود در یک پایه فضای برداری با بعد متناهی V را بعد فضای برداری V می‌نامیم و با $\dim V$ نمایش می‌دهیم. همچنین بعد فضای برداری صفر ($V=\{0\}$) را صفر تعریف می‌کنیم.

* بنابراین $\dim \mathbb{R}^n=n$ و $\dim P_{n-1}=n$ و $\dim Mat_{2\times2}(\mathbb{R})=4$.

مثال ۶: در بخش قبل دیدیم که مجموعه جواب یک دستگاه معادلات خطی همگن $AX=0$ یک فضای برداری است. برای فضای جواب دستگاه همگن زیر یک پایه بیابید و بعد این فضا را مشخص کنید.

$$\begin{cases}2x+2y-z+w=0\\-x-y+2z-3u+w=0\\x+y-2z-w=0\\z+u+w=0\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&2&-1&0&1\\-1&-1&2&-3&1\\1&1&-2&0&-1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3+R_2\to R_2]{-2R_3+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}0&0&3&0&3\\0&0&0&-3&0\\1&1&-2&0&-1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_{13}}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&-2&0&-1\\0&0&0&-3&0\\0&0&3&0&3\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{3}R_2]{-3R_4+R_3\to R_3}\begin{bmatrix}1&1&-2&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-3&0\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_2+R_4\to R_4]{3R_2+R_3\to R_3}\begin{bmatrix}1&1&-2&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{دو عملیات با ترتیب}]{R_{24}, R_{34}}\begin{bmatrix}1&1&-2&0&-1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{2R_2+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

ادامه در صفحه بعد.

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+w=0 & \Rightarrow x+y=-w \\ z+w=0 & \Rightarrow z=-w \\ u=0 \end{cases}$$

با فرض $w=t$ و $y=s$ داریم

جواب ها $\begin{cases} x=-t-s \\ y=s \\ u=0 \\ w=t \end{cases}$ $z=-t$ حال.

$$(x,y,z,u,w)=(-t-s,\ s,\ -t,0,t)=t(-1,0,-1,0,1)+s(-1,1,0,0,0)$$

بنابراین مجموعه $\{(-1,0,-1,0,1),(-1,1,0,0,0)\}$ یک پایه برای فضای جواب دستگاه می باشد زیرا فضای جواب را تولید می کند و مستقل خطی است (زیرا دو عضو مجموعه مضرب هم نیستند) پس بعد فضای جواب ۲ برابر با ۲ است.

نتیجه عملی برای محاسبه پایه برای فضای جواب یک دستگاه همگن این است که جواب این دستگاه را یافته (با عملیات سطری مقدماتی) اگر دستگاه همگن جواب بدیهی صفر داشته باشد که فضای جواب صفر است و بعد فضای جواب هم صفر است قطعاً.

اگر دستگاه همگن جواب غیرصفر داشته باشد (یعنی بی نهایت جواب داشتیم) در این صورت طبق شکل قبل (نتیجه صفحه ۳۲) فرض کنید که r تعداد سطرهای ناصفر ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R باشد (که $A\sim R$) در این صورت $(n-r)$ تا از مجهول های دستگاه همگن مستقل هستند و می توان آنها را با دلخواه انتخاب کرد و باقی مجهول ها برحسب این $(n-r)$ تا مجهول نوشته می شود (مثال قبل $n=5$ و $r=3$ پس $n-r=5-3=2$)

سپس جواب دستگاه همگن را به صورت ترکیب خطی از مجهولات مستقل می نویسیم و از روی آن پایه را انتخاب می کنیم.

مثال ۷: یک پایه برای فضای جواب دستگاه همگن

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ x-4y+2z=0 \end{cases}$$ را بیابید

حل.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}R_2]{-R_2+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_1\to R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r=2,\ n=3 \Rightarrow n-r=1 \Rightarrow$$ یکی از مجهولات دلخواه است

$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{2}{5}z=0 \\ y-\frac{3}{5}z=0 \end{cases}$ z دلخواه $\Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{5}z \\ y=\frac{3}{5}z \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(-\frac{2}{5},\frac{3}{5},1)z$

بنابراین $S=\{(-\frac{2}{5},\frac{3}{5},1)\}$ یا $S_1=\{(-2,3,5)\}$ دو پایه برای فضای جواب دستگاه همگن هستند.

توضیح: اگر بدانیم که $\dim V=n$ و $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ زیرمجموعه ای از V مستقل خطی باشد آنگاه S یک پایه برای فضای برداری V است و نیازی به مولد بودن و بررسی مولد بودن نیست.

قضیه ۷: الف) اگر $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارهای n بعدی V باشد آنگاه S یک پایه برای V است.

ب) اگر $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ یک مجموعه از بردارهای فضای برداری n بعدی V باشد بطوریکه فضای V را تولید کند در این صورت S یک پایه برای V است.

ج) اگر $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارهای فضای برداری n بعدی V باشد و $r<n$ آنگاه می توان S را به یک پایه برای فضای برداری V توسعه داد یعنی بردارهای ناصفر از V مانند $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$ به S اضافه کرد تا $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n\}$ یک پایه برای V باشد.

فضای سطری و فضای ستونی یک ماتریس

تعریف: فرض کنید که $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $m\times n$ روی $\mathbb{R}$ باشد. سطرهای ماتریس A را بردارهای سطری ماتریس A و همچنین ستونهای ماتریس A را بردارهای ستونی ماتریس A می نامیم. زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ که توسط ستونهای ماتریس A تولید می شود را فضای ستونی ماتریس A می نامیم و به همین صورت زیرفضای از $\mathbb{R}^m$ که توسط سطرهای A تولید می شود را فضای سطری ماتریس A می نامیم.

به کمک دو قضیه زیر می توان فضای سطری یک ماتریس و بعد آن را تعیین کرد.

قضیه ۲۸: عمل های سطری مقدماتی هیچ تغییری در فضای سطری یک ماتریس بوجود نمی آورد.

قضیه ۲۹: بردارهای سطری غیرصفر یک ماتریس سطری پلکانی تحویل شده هم ارز سطری A، یک پایه برای فضای سطری ماتریس A تشکیل می دهند.

توضیح: برای یافتن فضای ستونی ماتریس A، فضای سطری ماتریس A^T را می‌یابیم، بنابراین با کمک قضیه قبل ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم‌ارز از A^T را می‌یابیم و بردارهای ناصفر آن یک پایه برای فضای ستونی ماتریس A تشکیل می‌دهند.

مثال ۸: در مثال ۶ دیدیم که

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $S=\{(1,1,0,0,1),(0,0,1,0,1),(0,0,0,1,0)\}$ یک پایه برای فضای سطری ماتریس A است.

مثال ۹: فضای تولید شده توسط بردارهای زیر را بیابید و بعد آن را حساب کنید.

$\alpha_1=(1,-2,0,0,3)$ و $\alpha_2=(2,-5,-3,-2,6)$ و $\alpha_3=(0,5,15,10,0)$ و $\alpha_4=(2,6,18,8,6)$

حل: فضای تولید شده توسط این بردارها برابر است با فضای سطری ماتریس زیر

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-2R_1+R_4\to R_4 \\ \frac{1}{5}R_3}]{-2R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 18 & 8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{10R_2+R_4\to R_4 \\ -R_2}]{R_2+R_3\to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_{34} \\ 2R_2+R_1\to R_1}]{-\frac{1}{12}R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3R_3+R_2\to R_2]{-6R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $\{(1,0,0,-2,0),(0,1,0,-1,0),(0,0,1,1,0)\}$ یک پایه برای فضای تولید شده توسط بردارهای α_1 و α_2 و α_3 و α_4 است و

$W=\langle(1,0,0,-2,0),(0,1,0,-1,0),(0,0,1,1,0)\rangle$ = W = فضای تولید شده توسط این بردارها

نکته مهم (برای راحتی کار) می‌توان سطرهای ناصفر ماتریس پلکانی هم‌ارز سطری A را به عنوان یک پایه برای فضای سطری A در نظر گرفت، یعنی

$W=\langle(1,-2,0,0,3),(0,1,3,2,0),(0,0,-12,-12,0)\rangle$ و $\dim W=3$

ادامه در صفحه بعد.

تعریف (ماتریس پلکانی) ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ را ماتریس پلکانی گویند، اگر تعداد صفرهای قبل از نخستین درایه غیرصفر سطر با سطر ماتریس افزایش یابد. در مثال قبل ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پلکانی است

مثال ۱۰: یک پایه برای فضای ستونی ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ بدست آورید.

حل:

$$A^T=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \underset{-R_1+R_4\to R_4}{\overset{-R_1+R_3\to R_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_2+R_4\to R_4 \\ \frac{1}{2}R_2}}{\overset{-R_2+R_3\to R_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس $S=\{(1,3,0)\,,\,(0,1,2)\}$ یک پایه برای فضای ستونی A است.

قضیه ۱۰: بعد فضای سطری و ستونی یک ماتریس با هم برابر است.

تعریف: بعد فضای سطری و ستونی ماتریس A را رتبه ماتریس می‌گوییم و با $rank(A)$ یا $ra(A)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۱: در دو مثال قبل مشاهده می‌شود که در مثال ۱۰ $rank(A)=2$ و در مثال ۹، $rank(A)=3$.

قضیه ۱۱: اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه n باشد، آنگاه احکام زیر معادلند.

۱) ماتریس A معکوس پذیر است. ۲) دستگاه $AX=0$ فقط جواب بدیهی صفر دارد.

۳) $A\sim I$ ۴) $\det A\neq 0$ ۵) $rank(A)=n$

۶) دستگاه معادلات خطی $AX=B$ برای هر بردار ستونی B دارای جواب منحصر به فرد دارد.

۷) بردارهای سطری A مستقل خطی اند ۸) بردارهای ستونی ماتریس A مستقل خطی اند.

قضیه ۱۲: دستگاه معادلات خطی $AX=B$ دارای جواب است اگر و فقط اگر B با فضای ستونی ماتریس A تعلق داشته باشد.

اثبات:

$$AX=B \Rightarrow x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌شود که سمت چپ تساوی، یک ترکیب خطی از بردارهای ستونی A است و در نتیجه B در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد و برعکس.

تمرین ها:

۱- بررسی کنید که آیا مجموعه داده شده یک پایه برای فضای برداری معرفی می کنند.

الف) $\alpha=(1,2)$ و $\beta=(0,2)$ و $\gamma=(1,1)$ برای $\mathbb{R}^2$

ب) $\alpha=(1,1,6)$ و $\beta=(-1,3,4)$ برای $\mathbb{R}^3$

ج) $f(x)=x-1$ و $g(x)=1+x+x^2$ برای P_2

۲- کدام یک از مجموعه‌های زیر یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ معرفی می کند (بررسی کنید)

الف) $S=\{(2,0),(2,1)\}$ ب) $T=\{(3,9),(-4,-12)\}$

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر یک پایه برای P_2 تشکیل می دهد

الف) $f_1(x)=1-7x$ و $f_2(x)=1+x+4x^2$ و $f_3(x)=1-3x+2x^2$

ب) $g_1(x)=8+4x+x^2$ و $g_2(x)=6+5x+2x^2$ و $g_3(x)=-4+x+3x^2$

۴- فرض کنید که V فضای تولید شده توسط بردارهای $\alpha_1=\cos^2(x)$ و $\alpha_2=\sin^2(x)$ و $\alpha_3=\cos(2x)$

الف) نشان دهید که $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ نمی تواند یک پایه برای V باشد

ب) یک پایه برای V پیدا کنید.

۵- برای فضای جواب دستگاه معادله‌های خطی

$$\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

پایه ای پیدا کنید و بعد آن را تعیین کنید.

۶- برای فضای جواب دستگاه معادله‌های خطی

$$\begin{cases} 3x+y+3z=0 \\ 4x+5z=0 \\ x-3y+4z=0 \end{cases}$$

پایه‌ای پیدا کنید و بعد آن را تعیین کنید.

۷- بعد هر یک از زیرفضاهای $\mathbb{R}^4$ معرفی شده در زیر را مشخص کنید

الف) تمام بردارها به صورت $(a,b,0,0)$

ب) تمام بردارهای (a,b,c,d) که در آن $d=a+b$ و $c=a-b$

ج) تمام بردارهای (a,b,c,d) که در آن $a=b$ و $c=d$

د) تمام بردارهای (a,b,c,d) که در آن $a=-b$ و $c=-d$

فضای ضرب داخلی

تعریف: یک ضرب داخلی روی فضای برداری V عبارت است از یک تابع حقیقی که به هر زوج از بردارهای α و β از V عدد حقیقی $\langle \alpha , \beta \rangle$ را اختصاص می‌دهد یعنی

$$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(\alpha , \beta) = \langle \alpha , \beta \rangle$$

بطوریکه برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in V$ و $\forall k \in \mathbb{R}$ چهار اصل زیر برقرار باشد:

۱) $\langle \alpha , \beta \rangle = \langle \beta , \alpha \rangle$ ۲) $\langle \alpha + \beta , \gamma \rangle = \langle \alpha , \gamma \rangle + \langle \beta , \gamma \rangle$

۳) $\langle k\alpha , \beta \rangle = k \langle \alpha , \beta \rangle$

۴) $\langle \alpha , \alpha \rangle \geq 0$ و $\alpha = 0 \Longleftrightarrow \langle \alpha , \alpha \rangle = 0$

و یک فضای برداری همراه با یک ضرب داخلی را یک فضای ضرب داخلی می‌گویند.

نتیجه: از چهار اصل بالا می‌توان ویژگی‌های زیر را نتیجه گرفت:

الف) $\langle \alpha , 0 \rangle = \langle 0 , \alpha \rangle = 0$ ب) $\langle \alpha , \beta + \gamma \rangle = \langle \alpha , \beta \rangle + \langle \alpha , \gamma \rangle$

ج) $\langle \alpha , k\beta \rangle = k \langle \alpha , \beta \rangle$.

مثال ۱: در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ ضرب نقطه‌ای (یا ضرب داخلی) یک ضرب داخلی است. این ضرب، ضرب داخلی اقلیدسی هم گفته می‌شود.

$$\alpha = (x_1 , x_2 , \dots , x_n), \quad \beta = (y_1 , y_2 , \dots , y_n) \Rightarrow \alpha \cdot \beta = \langle \alpha , \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

حل: اصل (۱) چون $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ پس داریم: $\langle \alpha , \beta \rangle = \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

اصل (۲) اگر $\gamma = (z_1 , z_2 , \dots , z_n)$ آنگاه

$$\langle \alpha + \beta , \gamma \rangle = (\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = \langle \alpha , \gamma \rangle + \langle \beta , \gamma \rangle$$

اصل (۳) $\langle k\alpha , \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} (k x_i) y_i = k \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = k \langle \alpha , \beta \rangle$

اصل (۴) $\langle \alpha , \alpha \rangle = \alpha \cdot \alpha = |\alpha|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

بدیهی است که $(\alpha , \alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$

مثال ۲: اگر $\alpha = (x_1 , x_2)$ و $\beta = (y_1 , y_2)$ دو بردار ناصفر در $\mathbb{R}^2$ باشند آنگاه ثابت کنید که $\langle \alpha , \beta \rangle = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2$ یک ضرب داخلی را تعریف می‌کند.

حل: اصل (۱)

$$\langle \alpha , \beta \rangle = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2 = 3y_1 x_1 + 2y_2 x_2 = \langle \beta , \alpha \rangle$$

اصل (۲) اگر $\gamma=(z_1,z_2)$ باشد آنگاه

$$\langle \alpha+\beta,\gamma\rangle = 3(x_1+y_1)z_1+2(x_2+y_2)z_2 = 3x_1z_1+3y_1z_1+2x_2z_2+2y_2z_2 =$$

$$= \underbrace{3x_1z_1+2x_2z_2}_{\langle\alpha,\gamma\rangle} + \underbrace{3y_1z_1+2y_2z_2}_{\langle\beta,\gamma\rangle} = \langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$$

اصل (۳)

$$\forall k\in\mathbb{R}\quad \langle k\alpha,\beta\rangle = 3kx_1y_1+2kx_2y_2 = k(3x_1y_1+x_2y_2)=k\langle\alpha,\beta\rangle$$

اصل (۴)

$$\langle\alpha,\alpha\rangle = 3x_1^2+2x_2^2\geq 0 \quad \text{و} \quad \langle\alpha,\alpha\rangle=0 \Leftrightarrow 3x_1^2+2x_2^2=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=0 \Rightarrow \alpha=(0,0)$$

مثال ۳: فرض کنید که $A=\begin{bmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{bmatrix}$ دو عضو $MAT_{2\times2}(\mathbb{R})$ باشند و ثابت کنید که $\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{4} a_ib_i = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$ یک ضرب داخلی روی $MAT_{2\times2}(\mathbb{R})$ است

اثبات: اصل (۱)

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{4} a_ib_i=\sum_{i=1}^{4} b_ia_i=\langle B,A\rangle$$

اصل (۲) اگر $C=\begin{bmatrix}c_1&c_2\\c_3&c_4\end{bmatrix}$ عضوی در $MAT_{2\times2}(\mathbb{R})$ باشد آنگاه

$$\langle A+C,B\rangle = \sum_{i=1}^{4} (a_i+c_i)b_i = \sum_{i=1}^{4} a_ib_i+\sum_{i=1}^{4} c_ib_i = \langle A,B\rangle+\langle C,B\rangle$$

اصل (۳)

$$\forall k\in\mathbb{R}\quad \langle kA,B\rangle=\sum_{i=1}^{4} ka_ib_i = k\sum_{i=1}^{4} a_ib_i = k\langle A,B\rangle$$

اصل (۴)

$$\langle A,A\rangle=\sum_{i=1}^{4} a_i\cdot a_i=\sum_{i=1}^{4} a_i^2\geq 0 \quad \text{و} \quad \langle A,A\rangle=0\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} a_i^2=0 \Rightarrow a_1=a_2=a_3=a_4=0$$

مثال ۴: اگر $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ و $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$ دو بردار دلخواه در P_2 باشند، نشان دهید که $\langle f(x),g(x)\rangle = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$ یک ضرب داخلی روی P_2 است.

اثبات (تمرین، مشابه مثال ۳ و مثال ۲ است)

توجه: در آینده نشان خواهیم داد که $P_2\cong\mathbb{R}^3$ بنابراین ضرب داخلی P_2 همان ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^3$ است زیرا

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \cong (a_0,a_1,a_2)$$

مثال ۵: فرض کنید که $f(x),g(x)\in P_n$ برای دو عدد حقیقی a و b که $a<b$ قرار می‌دهیم $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$ نشان دهید که $\langle f(x),g(x)\rangle$ یک ضرب داخلی روی P_n است.

حل: اصل (۱)

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx=\langle g(x),f(x)\rangle$$

اصل (۲) فرض کنید که $h(x)\in P_n$ آنگاه

$$\langle f(x)+g(x), g(x)\rangle = \int_a^b (f(x)+h(x))\,g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b h(x)g(x)\,dx = \langle f(x), g(x)\rangle + \langle h(x), g(x)\rangle$$

اصل (۳)

$$\forall k\in\mathbb{R} \quad \langle k f(x), g(x)\rangle = \int_a^b k f(x)g(x)\,dx = k\int_a^b f(x)g(x)\,dx = k\langle f(x), g(x)\rangle$$

اصل (۴)

$$\langle f(x), f(x)\rangle = \int_a^b f(x)^2\,dx \geq 0 \quad \text{و} \quad \langle f(x), f(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f^2(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

مثال ۶: فرض کنید که $C[a,b]$ مجموعه توابع پیوسته روی بازه بسته $[a,b]$ باشد یعنی

$C[a,b] = \{f \mid f:[a,b] \xrightarrow[\text{پیوسته}]{\text{تابع}} [a,b]\}$ ، حال اگر $f(x), g(x)\in C[a,b]$ آنگاه

$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ یک ضرب داخلی روی $C[a,b]$ است

حل: همانند مثال قبل.

یادآوری: در ریاضی عمومی دیدیم که اگر α و β دو بردار غیرصفر در $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه $\alpha\cdot\beta = \|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta$

چون $\cos^2\theta \leq 1$ پس $(\alpha\cdot\beta)^2 = \|\alpha\|^2\cdot\|\beta\|^2\cos^2\theta \leq \|\alpha\|^2\|\beta\|^2$

که معادل است با $(\alpha\cdot\beta)^2 \leq (\alpha\cdot\alpha)\cdot(\beta\cdot\beta)$

قضیه ۱۳ (نابرابری کوشی - شوارتس) اگر α و β دو بردار در فضای ضرب داخلی V باشند آنگاه

$$\langle\alpha, \beta\rangle^2 \leq \langle\alpha, \alpha\rangle\cdot\langle\beta, \beta\rangle$$

اثبات در کتاب صفحه ۱۶۸

مثال ۷: اگر $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ دو بردار در فضای ضرب داخلی اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ باشند آنگاه نابرابری کوشی - شوارتس را برای این دو بردار بنویسید.

حل:

$$\langle\alpha, \alpha\rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad \text{و} \quad \langle\beta, \beta\rangle = \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad \text{و} \quad \langle\alpha, \beta\rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

بنابراین نامساوی کوشی - شوارتس به صورت زیر است

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

تمرین

۱- فرض کنید که $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ و $\beta=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند. آیا رابطه $\langle \alpha,\beta\rangle = a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2$ یک ضرب داخلی در $\mathbb{R}^3$ را تعریف می‌کند

۲- درستی نامساوی کوشی-شوارتس برای دو بردار $\alpha=(2,1)$ و $\beta=(1,-3)$ در $\mathbb{R}^2$ با ضرب داخلی $\langle \alpha,\beta\rangle = 3a_1b_1+2a_2b_2$ در $\mathbb{R}^2$ تحقیق کنید

۳- فضای ضرب داخلی $\mathbb{R}^2$ با ضرب داخلی اقلیدسی را در نظر بگیرید. با استفاده از نابرابری کوشی-شوارتس برای بردارهای $\alpha=(a,b)$ و $\beta=(\cos\theta,\sin\theta)$ ثابت کنید که $|a\cos\theta+b\sin\theta|^2\le a^2+b^2$

۴- در نابرابری کوشی-شوارتس نشان دهید که تساوی برقرار است اگر و فقط اگر دو بردار α و β وابسته خطی باشند.

۵- در $\mathbb{R}^n$ نشان دهید که رابطه $\langle \alpha,\beta\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i b_i$ یک ضرب داخلی است که در آن $c_1,c_2,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ عدد حقیقی مثبت هستند و $\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)$، $\beta=(b_1,b_2,\dots,b_n)$

۶- با استفاده از ضرب داخلی $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ در P_3 مقدار $\langle f(x),g(x)\rangle$ را برای هریک از مثال‌های زیر محاسبه کنید.

الف) $f(x)=1-x+x^2+5x^3$ و $g(x)=x-3x^2$

ب) $f(x)=x-5x^3$ و $g(x)=2+8x^2$

۷- با استفاده از ضرب داخلی $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx$ ، مقدار $\langle f(x),g(x)\rangle$ را برای هر یک از مثال‌های زیر به دست آورید که f و g تابع های پیوسته روی $[0,1]$ هستند.

الف) $f(x)=\cos(2\pi x)$ و $g(x)=\sin(2\pi x)$

ب) $f(x)=x$ و $g(x)=e^x$

ج) $f(x)=\tan(\frac{\pi}{4}x)$ و $g(x)=1$

۸- فرض کنید که $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع پیوسته روی $[0,1]$ باشند. با استفاده از ضرب داخلی تمرین ۷ نشان دهید که

$$\left[\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right]^2 \le \left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2\left[\int_0^1 g(x)\,dx\right]^2$$

طول و زاویه در فضای ضرب داخلی

تعریف: اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد آنگاه نرم (طول یا اندازه) بردار α از V را با $\|\alpha\|$ نشان می‌دهیم و به صورت $\|\alpha\| = \langle\alpha,\alpha\rangle^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌کنیم (به عبارت دیگر $\|\alpha\| = \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$)

بنابراین فاصله بین دو نقطه (یا دو بردار) α و β را با $d(\alpha,\beta)$ نشان می‌دهیم و $d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|$

مثال ۱: اگر $V=\mathbb{R}^n$ آنگاه، از $\alpha=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $\beta=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ آنگاه

$$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{و} \quad \|\beta\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \quad \text{و} \quad \|\alpha-\beta\| = d(\alpha,\beta) = \langle\alpha-\beta,\alpha-\beta\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

مثال ۲: در $\mathbb{R}^2$ با ضرب داخلی $\langle\alpha,\beta\rangle = 3x_1y_1+2x_2y_2$، نرم α و $d(\alpha,\beta)$ را بیابید وقتی که $\alpha=(1,0)$ و $\beta=(0,1)$

حل:

$$\|\alpha\| = \langle\alpha,\alpha\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3\times1\times1+2\times0\times0} = \sqrt{3} \quad \text{و} \quad d(\alpha,\beta) = \sqrt{3\times1\times1+2(-1)(-1)} = \sqrt{5}$$

یا:

$$\alpha-\beta=(1,-1) \Rightarrow d(\alpha,\beta) = \sqrt{\langle\alpha-\beta,\alpha-\beta\rangle} = \sqrt{\langle(1,-1),(1,-1)\rangle} = \sqrt{3\times1\times1+2(-1)(-1)} = \sqrt{5}$$

توجه ۱: در یک فضای ضرب داخلی، نرم یک بردار و فاصله دو بردار به ضرب داخلی بستگی دارد و با تغییر ضرب داخلی، مقدار نرم و فاصله تغییر می‌کند.

قضیه ۱۴: اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه نرم (اندازه یا طول) و فاصله دارای ویژگی‌های زیر هستند

الف) $d(\alpha,\beta) \geq 0$ ، $\|\alpha\| \geq 0$

ب) $d(\alpha,\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$ ، $\|\alpha\|=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

$\|k\alpha\| = |k|\,\|\alpha\|$

ج) $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$

د) $d(\alpha,\beta) \leq d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$ ، $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\|+\|\beta\|$

که در آن $\forall \alpha,\beta,\gamma \in V$

توجه: اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد و α و β دو بردار در V باشند، زاویه بین این دو بردار عبارت است از

$$\cos\theta = \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\,\|\beta\|} \quad , \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\,\|\beta\|}\right)$$

مثال ۳: زاویه بین دو بردار $\alpha=(4,3,1,-2)$ و $\beta=(-2,1,2,3)$ در فضای ضرب داخلی اقلیدسی $\mathbb{R}^4$ را بیابید.

حل:

$$\langle\alpha,\beta\rangle = 4\times(-2)+3\times(1)+1\times(2)+(-2)(3) = -8+3+2-6 = -9$$

$$\|\alpha\| = \sqrt{(4)^2+(3)^2+(1)^2+4} = \sqrt{30} \quad \text{و} \quad \|\beta\| = \sqrt{4+1+4+9} = \sqrt{18}$$

$$\cos\theta = \frac{-9}{\sqrt{18}\sqrt{30}} = \frac{-3}{2\sqrt{15}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{2\sqrt{15}}\right)$$

مثال ۴: در فضای ضرب داخلی اقلیدسی $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ با ضرب داخلی $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{4} a_i b_i$
زاویه بین دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ را بدست آورید

حل:
$\|A\| = \sqrt{1\times1 + 0\times0 + 1\times1 + 1\times1} = \sqrt{3}$ و $\|B\| = \sqrt{0\times0 + 2\times2 + 0\times0 + 0\times0} = \sqrt{4}$

$$\langle A, B\rangle = 1\times0 + 0\times2 + 1\times0 + 1\times0 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{\langle A, B\rangle}{\|A\|\|B\|} = \frac{0}{\sqrt{3}\times\sqrt{4}} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

تعریف: دو بردار α و β در فضای ضرب داخلی V متعامد (عمود برهم) نامیم هرگاه $\langle \alpha, \beta\rangle = 0$
همچنین اگر بردار α بر هر بردار فضای برداری V عمود باشد می‌گوئیم بردار α بر فضای V عمود است

توجه: متعامد بودن بردارها به ضرب داخلی بستگی دارد. ممکن است دو بردار در یک فضای ضرب داخلی برهم عمود باشند ولی با ضرب داخلی دیگری برهم عمود نباشند

مثال ۵: در مثال ۴ دو بردار $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ در فضای برداری $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ با ضرب داخلی اقلیدسی متعامد هستند.

مثال ۶: دو بردار $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ در فضای ضرب داخلی P_2 با ضرب داخلی $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ متعامد هستند زیرا

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \langle x, x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x\cdot x^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = 0$$

مثال ۷: (عمومیت قضیه فیثاغورث) اگر α و β دو بردار متعامد در یک فضای ضرب داخلی باشند آنگاه

$$\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$$

حل: چون بردارهای α و β برهم عمود هستند پس $\langle \alpha, \beta\rangle = 0$ و لذا

$$\|\alpha+\beta\|^2 = \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta\rangle = \underbrace{\langle \alpha, \alpha\rangle}_{\|\alpha\|^2} + 2\underbrace{\langle \alpha, \beta\rangle}_{0} + \underbrace{\langle \beta, \beta\rangle}_{\|\beta\|^2} = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$$

پایه‌های متعامد

تعریف: یک مجموعه از بردارهای یک فضای ضرب داخلی را مجموعه متعامد گویند، اگر هر دو بردار مختلف این مجموعه بر هم عمود باشند. یک مجموعه‌ی متعامد که نرم (طول و اندازه) هر بردار آن برابر با یک باشد را مجموعه متعامد یکه (یا یکه متعامد) نامیده می‌شود و اگر این مجموعه پایه برای فضای برداری باشد آن را پایه متعامد یکه می‌نامیم.

مثال ۸: الف) مجموعه $\{i, j, k\}$ یک پایه متعامد برای $\mathbb{R}^3$ با ضرب داخلی اقلیدسی است.

ب) مجموعه $\{\alpha_1=(0,1,0),\ \alpha_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}),\ \alpha_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})\}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathbb{R}^3$ با ضرب داخلی اقلیدسی است.

حل: الف) بدیهی است. حل ب) هر سه بردار α_1 و α_2 و α_3 بردار یکه (واحد) هستند و ضرب داخلی آنها دو به دو مساوی صفر است.

مثال ۹: اگر α یک بردار ناصفر در یک فضای ضرب داخلی باشد آنگاه یک بردار با نرم (اندازه یا طول) یک از این بردار بدست می‌آید. حل:

$$\boxed{u=\frac{\alpha}{\|\alpha\|} \Rightarrow \|u\|=1}$$

قضیه ۱۵: اگر $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای ضرب داخلی V باشد و α یک بردار دلخواهی از V باشد آنگاه

$$\alpha=\langle\alpha,\alpha_1\rangle\alpha_1+\langle\alpha,\alpha_2\rangle\alpha_2+\dots+\langle\alpha,\alpha_n\rangle\alpha_n$$

اثبات: چون S یک پایه متعامد یکه است پس (از پایه بودن) هر بردار α از V را می‌توان به صورت $\alpha=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\dots+c_n\alpha_n$ که در آن $c_1,c_2,\dots,c_n\in\mathbb{R}$. نشان می‌دهیم که $c_i=\langle\alpha,\alpha_i\rangle$

$$\langle\alpha,\alpha_i\rangle=\langle c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\dots+c_n\alpha_n,\alpha_i\rangle=c_1\underbrace{\langle\alpha_1,\alpha_i\rangle}_{0}+c_2\underbrace{\langle\alpha_2,\alpha_i\rangle}_{0}+\dots+c_i\underbrace{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}_{1}+\dots+c_n\underbrace{\langle\alpha_n,\alpha_i\rangle}_{0}=c_i$$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha=\langle\alpha,\alpha_1\rangle\alpha_1+\langle\alpha,\alpha_2\rangle\alpha_2+\dots+\langle\alpha,\alpha_n\rangle\alpha_n}$$

مثال ۹: نشان دهید که مجموعه $S=\{\alpha_1=(0,1,0),\ \alpha_2=(-\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}),\ \alpha_3=(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5})\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای ضرب داخلی اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ است و بردار $\alpha=(1,1,1)$ را با صورت

ترکیب خطی از اعضای S بنویسید.

حل: بدیهی است که $\langle \alpha_1,\alpha_1\rangle = \langle \alpha_2,\alpha_2\rangle = \langle \alpha_3,\alpha_3\rangle = 1$ و اعضای S دو به دو برهم عمود هستند زیرا

$$\langle \alpha_2,\alpha_3\rangle = \langle \alpha_1,\alpha_2\rangle = \langle \alpha_1,\alpha_3\rangle = 0$$

اعضای S مستقل خطی اند زیرا $\det\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5}\end{bmatrix} = \frac{13}{25} \neq 0$ و چون $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ پس مجموعه S یک پایه $\mathbb{R}^3$ است.

$$\alpha = \langle 1,1,1\rangle = \langle \alpha,\alpha_1\rangle \alpha_1 + \langle \alpha,\alpha_2\rangle \alpha_2 + \langle \alpha,\alpha_3\rangle \alpha_3 = 1\alpha_1 \;\; \frac{1}{5}\alpha_2 + \frac{7}{5}\alpha_3$$

$$\langle \alpha,\alpha_1\rangle = 1\times 0 + 1\times 1 + 1\times 0 = 1 \quad \text{و} \quad \langle \alpha,\alpha_2\rangle = 1\times\left(-\frac{4}{5}\right) + 0 + 1\times\frac{3}{5} = \frac{-1}{5}$$

$$\langle \alpha,\alpha_3\rangle = 1\times\frac{3}{5} + 0 + 1\times\frac{4}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

توجه: طبق قضیه قبل اگر S یک فضای برداری با ضرب داخلی V باشد آنگاه هر بردار $\alpha \in V$ را می توان به صورت ترکیب خطی از اعضای S نوشت، حال اگر مجموعه S پایه باشد ولی متعامد نباشد برای یافتن ضرایب ترکیب خطی باید یک دستگاه معادلات خطی حل مشود.

قضیه ۱۶: اگر $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک مجموعه متعامد از بردارهای ناصفر در یک فضای ضرب داخلی باشد آنگاه مجموعه S مستقل خطی است.

اثبات: فرض کنید که $0 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$ نشان می دهیم که $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

طبق قضیه قبل

$$0 = \langle 0, \alpha_i\rangle = \langle c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n, \alpha_i\rangle = c_1\underbrace{\langle \alpha_1,\alpha_i\rangle}_{0} + \dots + c_i\underbrace{\langle \alpha_i,\alpha_i\rangle}_{1} + \dots$$

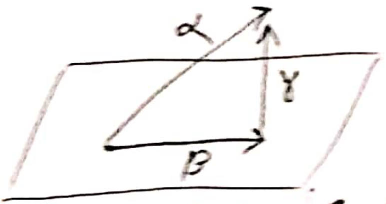
$$+ \dots + c_n\underbrace{\langle \alpha_n,\alpha_i\rangle}_{0} = c_i\langle \alpha_i,\alpha_i\rangle \Rightarrow c_i = 0 \qquad \forall i = 1,2,3,\dots,n$$

قضیه ۱۷: فرض کنید که V یک فضای ضرب داخلی باشد و $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک مجموعه متعامد یکه از بردارهای V باشد. اگر W فضای تولید شده توسط S باشد آنگاه می توان هر بردار α از V را به صورت $\alpha = \beta + \gamma$ نوشت که $\beta \in W$ و عبارت است از

$\beta = \langle \alpha,\alpha_1\rangle\alpha_1 + \dots + \langle \alpha,\alpha_n\rangle\alpha_n$ که تصویر قائم بردار α روی W نامیده می شود

و یا علامت $\beta = proj_W\, \alpha$ نشان می دهند و γ عمود بر W است که عبارت از $\gamma = \alpha - \beta$ و مؤلفه بردار به عمود بر W نامیده می شود (اثبات در کتاب صفحه ۱۷۴)

تبصره: تعبیر هندسی این قضیه در $\mathbb{R}^3$ بصورت مقابل است.



مثال ۱۰: فرض کنید که در $\mathbb{R}^3$ ضرب داخلی اقلیدسی تعریف شده باشد و W فضای تولید شده توسط دو بردار متعامد $\alpha_1 = (0,1,0)$ و $\alpha_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$ باشد یعنی $W = \langle\{\alpha_1, \alpha_2\}\rangle$

تصویر عمودی بردار $\alpha = (1,1,1)$ و مؤلفه ای α عمود بر W را بیابید.

حل:

$$\beta = proj_W\, \alpha = \langle \alpha, \alpha_1 \rangle \alpha_1 + \langle \alpha, \alpha_2 \rangle \alpha_2 = \alpha_1 - \frac{1}{5}\alpha_2 = (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25})$$

$$\gamma = \alpha - \beta = (1,1,1) - (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}) = (\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25})$$

قضیه ۱۸: هر فضای ضرب داخلی با بعد متناهی غیر صفر دارای یک پایه متعامد یکه است.

اثبات (فرایند گرام - اشمیت) فرض کنید که V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی دلخواه n باشد و مجموعه $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه دلخواه از V باشد. به وسیله انجام دنباله ای از اعمال زیر به نام فرایند گرام - اشمیت، از روی پایه S یک پایه متعامد یکه بدست می آوریم.

عمل اول: $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$ واضح است که $\|\beta_1\| = 1$.

عمل دوم: برای ساختن یک بردار β_2 با نرم یک که عمود بر α_1 باشد، مؤلفه های بردار α_2 عمود بر فضای W_1 (فضای تولید شده توسط β_1) را به دست آورده آن را نرمالیزه می کنیم. یعنی

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2 - proj_{W_1} \alpha_2}{\|\alpha_2 - proj_{W_1} \alpha_2\|} \Rightarrow \beta_2 = \frac{\alpha_2 - \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle \beta_1}{\|\alpha_2 - \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle \beta_1\|}$$

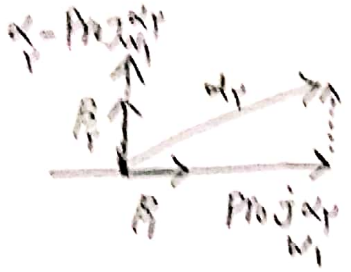
در رابطه بالا اگر $\alpha_2 - \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle \beta_1 = 0$ آنگاه نرمالیزه کردن امکان پذیر نیست ولی چنین حالتی رخ نمی دهد زیرا اگر $\alpha_2 - \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle \beta_1 = 0$ آنگاه داریم:

$$\alpha_2 = \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle \beta_1 = \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\|\alpha_1\|} \alpha_1$$

یعنی α_2 مضربی از α_1 است

، با مستقل خطی بودن مجموعه S متناقض است.

نمودار هندسی این عمل برای بردارهای معمولی در شکل مقابل رسم شده است



عمل سوم: برای ساختن یک بردار β_3 با نرم یک و عمود بر بردارهای β_1 و β_2، مؤلفه‌های بردار α_3 عمود بر فضای W_2 (فضای تولید شده توسط بردارهای β_1, β_2) را بدست آوریم و آن را نرمالیزه کنیم، یعنی

$$\beta_3 = \frac{\alpha_3 - \mathrm{Proj}_{W_2}\alpha_3}{\|\alpha_3 - \mathrm{Proj}_{W_2}\alpha_3\|} = \frac{\alpha_3 - \langle\alpha_3,\beta_1\rangle\beta_1 - \langle\alpha_3,\beta_2\rangle\beta_2}{\|\alpha_3 - \langle\alpha_3,\beta_1\rangle\beta_1 - \langle\alpha_3,\beta_2\rangle\beta_2\|}$$

مشابه عمل دوم در این حالت نیز $\alpha_3 - \langle\alpha_3,\beta_1\rangle\beta_1 - \langle\alpha_3,\beta_2\rangle\beta_2 \neq 0$ زیرا در غیر این صورت خواهیم داشت:

$$\alpha_3 = \langle\alpha_3,\beta_1\rangle\beta_1 + \langle\alpha_3,\beta_2\rangle\beta_2 = \frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\|\alpha_1\|}\alpha_1 + \left(\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\|\alpha_2 - \langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1\|}\right)\left(\alpha_2 - \frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\|\alpha_1\|}\alpha_1\right) =$$

$$= k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

یعنی α_3 ترکیب خطی از بردارهای α_1 و α_2 است که با استقلال خطی S متناقض است
(نمودار هندسی آن در کتاب صفحه ۱۷۶)

عمل چهارم: برای ساختن یک بردار β_4 با نرم یک و عمود بر بردارهای β_1 و β_2 و β_3، مؤلفه‌های بردار α_4 عمود بر فضای W_3 (فضای تولید شده توسط بردارهای β_1 و β_2 و β_3) را بدست می‌آوریم و آن را نرمالیزه می‌کنیم

$$\beta_4 = \frac{\alpha_4 - \mathrm{Proj}_{W_3}\alpha_4}{\|\alpha_4 - \mathrm{Proj}_{W_3}\alpha_4\|} = \frac{\alpha_4 - \langle\alpha_4,\beta_1\rangle\beta_1 - \langle\alpha_4,\beta_2\rangle\beta_2 - \langle\alpha_4,\beta_3\rangle\beta_3}{\|\alpha_4 - \langle\alpha_4,\beta_1\rangle\beta_1 - \langle\alpha_4,\beta_2\rangle\beta_2 - \langle\alpha_4,\beta_3\rangle\beta_3\|}$$

اگر به همین روش ادامه دهیم یک مجموعه (پایه) متعامد نرمال $T = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ بدست می‌آید که طبق قضیه ۱۷ مجموعه T مستقل خطی است و چون بُعد V برابر با n است پس T یک پایه متعامد نرمال برای V است.

مثال ۱۱: فضای برداری $\mathbb{R}^3$ با ضرب داخلی اقلیدسی (متعارف) را در نظر بگیرید اگر $\alpha_1 = (1,1,1)$ و $\alpha_2 = (0,1,1)$ و $\alpha_3 = (0,0,1)$ باشند و $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ باشد آنگاه با کمک فرایند گرام-اشمیت این پایه را به یک پایه متعامد نرمال تبدیل کنید.

حل: عمل اول: $\|\alpha_1\| = \sqrt{3}$ پس $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

عمل دوم: $proj_{W_1}\alpha_2 = \langle \alpha_2, \beta_1\rangle \beta_1 = \frac{2}{\sqrt3}\beta_1 = (\frac23, \frac23, \frac23) \Rightarrow$

$\alpha_2 - proj_{W_1}\alpha_2 = (0,1,1) - (\frac23,\frac23,\frac23) = (-\frac23, \frac13, \frac13) \Rightarrow \|\alpha_2 - proj_{W_1}\alpha_2\| = \sqrt{\frac49+\frac19+\frac19} = \frac{\sqrt6}{3}$

$\beta_2 = \frac{\alpha_2 - proj_{W_1}\alpha_2}{\|\alpha_2 - proj_{W}\alpha_2\|} = \frac{(-\frac23,\frac13,\frac13)}{\frac{\sqrt6}{3}} = (-\frac{2}{\sqrt6}, \frac1{\sqrt6},\frac1{\sqrt6}) \Rightarrow \beta_2 = \frac1{\sqrt6}(-2,1,1)$

عمل سوم: $proj_{W_2}\alpha_3 = \langle\alpha_3,\beta_1\rangle\beta_1 + \langle\alpha_3,\beta_2\rangle\beta_2 = \frac1{\sqrt3}(\frac1{\sqrt3},\frac1{\sqrt3},\frac1{\sqrt3}) + \frac1{\sqrt6}(-\frac2{\sqrt6},\frac1{\sqrt6},\frac1{\sqrt6}) \Rightarrow$

$proj_{W_2}\alpha_3 = (\frac13,\frac13,\frac13) + (-\frac26,\frac16,\frac16) = (0,\frac12,\frac12) \Rightarrow$

$\alpha_3 - proj_{W_2}\alpha_3 = (0,0,1) - (0,\frac12,\frac12) = (0,-\frac12,\frac12) \Rightarrow$

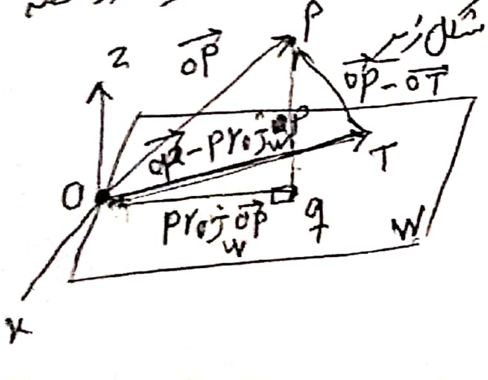
عمل چهارم: $\beta_3 = \frac{\alpha_3 - proj_{W_2}\alpha_3}{\|\alpha_3-proj_{W_2}\alpha_3\|} = \frac{(0,-\frac12,\frac12)}{\sqrt{0+\frac14+\frac14}} = \frac{(0,-\frac12,\frac12)}{\frac{\sqrt2}{2}} = (0,-\frac1{\sqrt2},\frac1{\sqrt2})$

بنابراین پایه متعامد عبارت است از:

$$T = \{\beta_1 = \frac1{\sqrt3}(1,1,1),\ \beta_2 = \frac1{\sqrt6}(-2,1,1),\ \frac1{\sqrt2}(0,1,1) = \beta_3\}$$

قضیه ۱۹ (قضیه تصویر) اگر W یک زیرفضای متناهی البعد از فضای ضرب داخلی V باشد آنگاه هر بردار واحد α در V را دقیقاً فقط به صورت $\alpha = \beta + \gamma$ می‌توان بیان نمود که در آن $\beta \in W$ و بردار γ عمود بر W است. (اثبات در کتاب صفحه ۱۲۷)

توجه: اگر P نقطه‌ای در فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$ و W صفحه‌ای که از مبداء می‌گذرد، آنگاه نزدیکترین نقطه‌ی صفحه‌ی W به نقطه P عبارت است از نقطه q که این نقطه به این صورت به دست می‌آید که از نقطه P بر صفحه‌ی W عمودی کشیم و پای عمود همان نقطه q است طبق شکل زیر



بنابراین فاصله بین P و صفحه W عبارت است از

$$\boxed{\|\vec{OP} - proj_W \vec{OP}\|}$$

با فرض $\vec{\alpha}=\vec{OP}$ و $\vec{\beta}=\vec{OT}$ ، به عبارت دیگر فاصله بین P و صفحه W عبارت است از $\|\alpha-\mathrm{proj}_W\alpha\|$ یعنی در بین تمام بردارهای $\vec{\beta}$ در W، بردار $\vec{\beta}=\mathrm{proj}_W\vec{\alpha}$ فاصله $\|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\|$ را کمینه (می‌نیمم) می‌کند.

می‌توان این مفهوم را به صورت دیگر نیز بیان نمود. با این ترتیب که فرض کنید که $\vec{\alpha}$ یک بردار ثابت باشد و می‌خواهیم آن را توسط یک بردار $\vec{\beta}$ در W برآورد کنیم. هر برآوردی از این نوع نتیجه‌اش دارای خطای $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ است که نمی‌توان این خطا را صفر نمود مگر اینکه بردار $\vec{\alpha}$ در W باشد. اگر $\vec{\beta}$ را $\mathrm{proj}_W\vec{\alpha}$ اختیار کنیم، آنگاه بزرگی بردار خطا را، یعنی

$$\|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\|=\|\vec{\alpha}-\mathrm{proj}_W\vec{\alpha}\|$$

تا اندازه ممکن کوچک می‌شود.

قضیه ۱۲: (قضیه بهترین تقریب) اگر W زیرفضایی متناهی البعد از فضای ضرب داخلی V باشد، آنگاه $\mathrm{proj}_W\vec{\alpha}$ بهترین تقریب (برآورد) برای $\vec{\alpha}$ از W است به این معنی که برای هر بردار دلخواه $\vec{\beta}$ در W به غیر از $\mathrm{proj}_W\vec{\alpha}$ داریم

$$\|\vec{\alpha}-\mathrm{proj}_W\alpha\|\le\|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\|$$

تمرین

۱- فضای برداری $\mathbb{R}^2$ با ضرب داخلی $\langle\alpha,\beta\rangle=3a_1b_1+2a_2b_2$ که در آن $\alpha=(a_1,a_2)$ و $\beta=(b_1,b_2)$ درنظر بگیرید. اگر $\alpha=(-1,2)$ و $\beta=(2,5)$ آنگاه $d(\alpha,\beta)$ را حساب کنید.

۲- فضای برداری P_2 با ضرب داخلی $\langle f(x),g(x)\rangle=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$ که در آن $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ و $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$ مقدار $d(f(x),g(x))$ را بیابید که در آن $f(x)=2-x+x^2$ ، $g(x)=1+5x^2$

۳- فضای برداری $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ با ضرب داخلی $d(A,B)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$ (که در آن $A=\begin{bmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{bmatrix}$) درنظر بگیرید. اگر $A=\begin{bmatrix}1&5\\8&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-5&0\\7&-3\end{bmatrix}$ آنگاه $d(A,B)$ را حساب کنید.

۴- در تمرین قبل کسینوس زاویه $A=\begin{bmatrix}2&6\\1&-3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3&2\\1&0\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

۵- در $\mathbb{R}^3$ با ضرب داخلی $\langle\alpha,\beta\rangle=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3$ که در آن $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ و $\beta=(b_1,b_2,b_3)$ با استفاده از فرایند گرام-اشمیت پایه $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ را به پایه یکه متعامد تبدیل کنید وقتی $\alpha_1=(1,1,1)$ و $\alpha_2=(1,1,0)$ و $\alpha_3=(1,0,0)$

مختصات و تغییر مختصات (تغییر پایه در فضای برداری)

قضیه ۲۱: اگر $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد، آنگاه هر بردار α در V دقیقاً می‌توان فقط به یک روش به صورت $\alpha=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\dots+c_n\alpha_n$ ($\alpha=\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$) نوشت که در آن c_iها در $\mathbb{R}$ وجود دارند. (اثبات در کتاب صفحه ۱۷۹)

تعریف: اسکالرهای c_1 و c_2 و ... و c_n را مختصات بردار α نسبت به پایه S می‌نامیم و به صورت $(\alpha)_S=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ یا به صورت ماتریس ستونی $[\alpha]_S=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$ نمایش می‌دهیم.

طبق قضیه قبل مختصات یک بردار نسبت به یک پایه منحصر به فرد است.

مثال ۱: مختصات بردار $\alpha=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ از $\mathbb{R}^n$ نسبت به پایه استاندارد S خود α است یعنی $(\alpha)_S=\alpha$ ($[\alpha]_S=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$) به عبارت دیگر اگر $S=\{(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\}$ باشد آنگاه $\alpha=x_1(1,0,0,\dots,0)+x_2(0,1,0,\dots,0)+\dots+x_n(0,0,\dots,1)$ پس $\alpha=(\alpha)_S$.

مثال ۲: اگر $\alpha_1=(1,2,1)$ و $\alpha_2=(2,9,0)$ و $\alpha_3=(3,3,4)$ سه بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه

الف) نشان دهید که مجموعه $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است.

ب) مختصات بردار $\alpha=(5,-1,9)$ نسبت به پایه S را بیابید.

ج) برداری مانند β در $\mathbb{R}^3$ بدست آورید که مختصات آن نسبت به پایه S بردار $(-1,3,2)$ باشد.

حل الف) چون $\det\begin{bmatrix}1&2&1\\2&9&0\\3&3&4\end{bmatrix}=36-18+(6-27)=-3\neq 0$ پس چون $\dim\mathbb{R}^3=3$ است بنابراین S یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است (زیرا چون دترمینان مخالف صفر است پس S یک مجموعه مستقل خطی است)

حل ب) از حل معادله برداری $\alpha=(5,-1,9)=x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3$ (1) مختصات بردار α نسبت به پایه S بدست می‌آید:

$$(1)\Rightarrow(5,-1,9)=(x+2y+3z\,,\,2x+9y+3z\,,\,x+4z)\Rightarrow\begin{cases}x+2y+3z=5\\2x+9y+3z=-1\\x+4z=9\end{cases}$$

از حل این دستگاه داریم $x=1$ و $y=-1$ و $z=2$ پس $(\alpha)_S=(1,-1,2)$.

حل ج)

$$\beta=-1\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3=(-1,-2,-1)+(6,27,0)+(6,6,8)=(11,31,7)$$

مثال ۳: مختصات بردار $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ در P_2 نسبت به پایه $S=\{1, x, x^2\}$ بردار $(f(x))_S=(a_0, a_1, a_2)$ است.

مثال ۴: اگر $S=\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای برداری با ضرب داخلی V باشد، دیدیم که مختصات بردار دلخواه α نسبت به این پایه $(\alpha)_S=(\langle\alpha,\alpha_1\rangle, \langle\alpha,\alpha_2\rangle, \dots, \langle\alpha,\alpha_n\rangle)$ است

قضیه ۲۳: اگر مجموعه $S=\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای ضرب داخلی n بعدی V باشد و اگر α و β دو بردار از V باشند بطوریکه $(\alpha)_S=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $(\beta)_S=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ آنگاه داریم:

الف)
$$\|\alpha\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

ب)
$$d(\alpha,\beta)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$$

ج)
$$\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_iy_i=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$$

اثبات در کتاب صفحه (۱۸۱)

سؤال: اگر پایه‌ی یک فضای برداری را به پایه دیگری تغییر دهیم آنگاه بین مختصات ماتریسی یک بردار نسبت به این پایه‌ها چه ارتباطی وجود دارد؟. یا عبارت دیگر اگر B پایه قدیم و B' پایه جدید برای فضای برداری V باشد و α یک بردار دلخواه در V باشد آنگاه بین $[\alpha]_B$ و $[\alpha]_{B'}$ چه رابطه‌ای برقرار است؟.

جواب: اگر $B=\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ و $B'=\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$ آنگاه

$$\boxed{[\alpha]_B=P[\alpha]_{B'}} \quad (1)$$

که در آن P یک ماتریس مربعی معکوس پذیر است و ستونهای آن، همان مختصات ماتریسی بردارهای پایه جدید نسبت به پایه قدیم هستند یعنی بردارهای ستونی ماتریس P عبارتند از $[\alpha'_1]_B, [\alpha'_2]_B, \dots, [\alpha'_n]_B$ یعنی ماتریس P را با صورت زیر می‌توان نوشت

ادامه در صفحه بعد ←

$$P=\begin{array}{ccccc} \Big[\,[\alpha'_1]_\beta & [\alpha'_2]_\beta & \cdots & [\alpha'_n]_\beta\,\Big] \\ \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & & \text{ستون } n\text{ام} \end{array}$$

و ماتریس P را **ماتریس انتقال** از β' به β می نامیم.

توجه: چون P معکوس پذیر است (قضیه ۲۳) بنابراین رابطه زیر را داریم:

$$\boxed{[\alpha]_{\beta'} = P^{-1}[\alpha]_\beta \qquad (2)}$$

مثال ۵) اگر $V=\mathbb{R}^2$ و $\beta=\{(1,0),(0,1)\}$ پایه استاندارد و $\beta'=\{(1,1),(2,1)\}$ پایه جدید باشد آنگاه الف) ماتریس انتقال از β' به β را بیابید.

ب) اگر $[\alpha]_{\beta'}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ آنگاه $[\alpha]_\beta$ را بدست آورید که $\alpha\in V$ دلخواه است.

حل الف) بدیهی است که $P=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$ ماتریس انتقال از β' به β است.

ب)

$$[\alpha]_\beta = P[\alpha]_{\beta'} = \begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$$

پس $\alpha=(7,2)$ زیرا مختصات هر بردار نسبت به پایه استاندارد خود بردار است.

در این مثال، $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&-1\end{bmatrix}$ یعنی ماتریس انتقال از β به β' ماتریس P^{-1} است.

قضیه ۲۳: اگر P ماتریس انتقال از پایه β' به پایه β باشد آنگاه

الف) P معکوس پذیر است

ب) ماتریس انتقال از پایه β به پایه β' عبارت است از معکوس ماتریس P یعنی P^{-1}

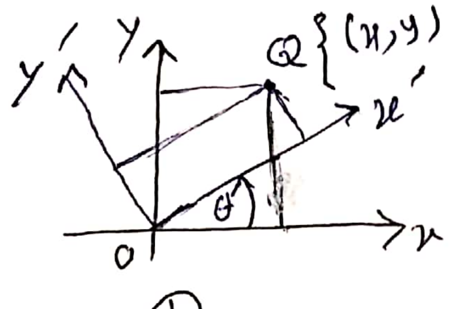
(اثبات در کتاب صفحه ۱۸۵)

مثال ۶) کاربرد ماتریس انتقال در چرخش محورهای مختصات دوبعدی (دستگاه مختصات دکارتی $\mathbb{R}^2$)

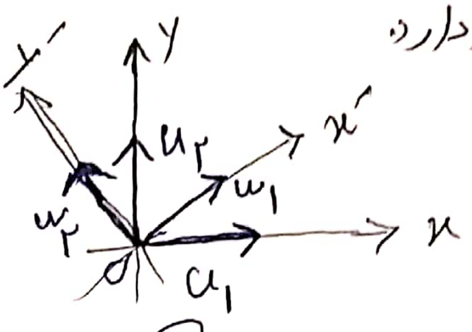
در اغلب مسائل، یک دستگاه مختصات متعامد xOy داده می شود و به وسیله ی چرخش آن در جهت عکس چرخش عقربه های ساعت حول مبداء به میزان θ دستگاه مختصات جدید را بدست می آورند.

با تحقق این موضوع هر نقطه Q در صفحه دارای دو مجموعه از مختصات است: یکی (x,y) نسبت به دستگاه oxy و دیگری (x',y') نسبت به دستگاه $ox'y'$ (شکل زیر ۱)، چه رابطه ای بین این دو مختصات وجود دارد.

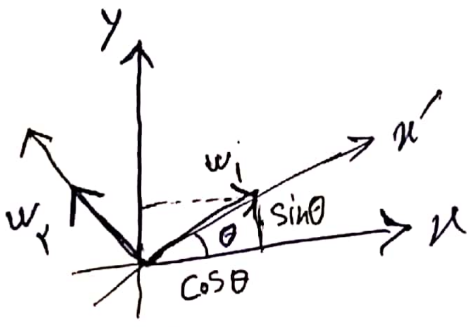
حل:



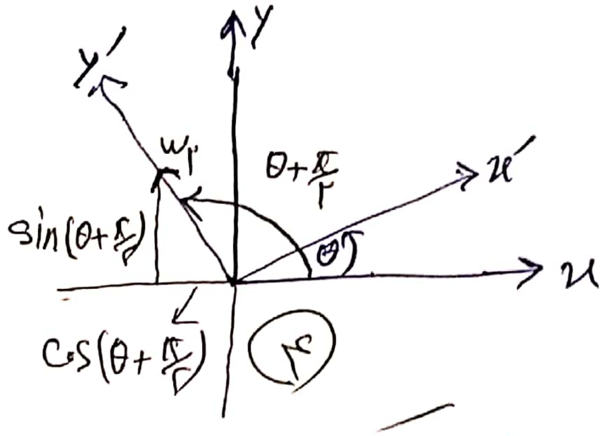
۱



۲



۳



۴

با معرفی بردارهای یکه w_1 و w_2 به ترتیب در امتداد جهت مثبت محورهای مختصات ox' و oy' و بردارهای یکه u_1 و u_2 به ترتیب در امتداد جهت مثبت محورهای ox و oy، می توانیم این چرخش را به عنوان مسئله تغییر پایه از پایه قدیم $B=\{u_1,u_2\}$ به پایه جدید $B'=\{w_1,w_2\}$ تلقی کنیم (شکل ۲) بنابراین مختصات جدید (x',y') و قدیم (x,y) نقطه Q توسط رابطه زیر به یکدیگر مربوط می شوند.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

در اینجا ماتریس P ماتریس انتقال از B' به B است

برای یافتن ماتریس P باید مختصات ماتریسی بردارهای پایه جدید را نسبت به پایه قدیم پیدا کنیم.

با توجه به شکل های ۳ و ۴ ملاحظه می شود که

$$[w_1]_B = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [w_2]_B = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس انتقال از B' به B عبارت است از $P=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ که ماتریس گیون است

و در نتیجه معکوس آن برابر است با ترانهاده آن یعنی $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ و بنابراین.

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$ یعنی $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

و از $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$ داریم

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

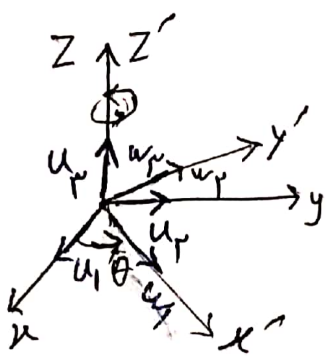
برای نمونه اگر $\theta = \frac{\pi}{4}$ (یعنی محورها به اندازه ۴۵ درجه چرخش کنند)، آنگاه

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$$

اگر مختصات نقطه Q نسبت به دستگاه xOy برابر $(2,-1)$ باشد آنگاه مختصات این نقطه در دستگاه جدید $x'Oy'$ عبارت است از

$$(x', y') = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$ یعنی $$\begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y' = -2\times\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\times\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

مثال ۷: (کاربرد ماتریس انتقال در چرخش مختصات سه بعدی): فرض کنید دستگاه مختصات متعامد $OXYZ$ در خلاف چرخش عقربه های ساعت، حول محور z ها به اندازه θ چرخش نماید (در شکل زیر) بین مختصات جدید و قدیم یک نقطه چه ارتباطی وجود دارد؟



حل: اگر بردارهای یکه همجهت با جهت مثبت محورهای Ox و Oy و Oz را به ترتیب u_1 و u_2 و u_3 و بردارهای یکه همجهت با جهت مثبت محورهای Ox' و Oy' و Oz' را به ترتیب w_1 و w_2 و w_3 نامگذاری کنیم آنگاه می توانیم این چرخش را به عنوان تغییر پایه قدیم $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ به پایه جدید $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ تلقی نماییم. با این ترتیب و با توجه به اینکه w_3 گسترش میدا به اندازه یک واحد به طرف بالا و در جهت مثبت محور oz است. از این رو، داریم:

$$[w_1]_B = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [w_2]_B = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [w_3]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین P ماتریس انتقال از B' به B و همچنین P^{-1} ماتریس انتقال از B به B' عبارتند از

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و اگر (x, y, z) و (x', y', z') به ترتیب

مختصات قدیم و جدید نقطه Q باشند، آنگاه می‌توان دو مختصات را توسط رابطه‌ی زیر به یکدیگر پیوند داد.

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\-\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

توجه: در قضیه زیر که بدون اثبات ارائه می‌شود، نشان داده می‌شود که ماتریس انتقال از یک پایه متعامد یکه به پایه متعامد یکه دیگر، ماتریسی متعامد است. (ماتریس P را متعامد گویند هرگاه $P^T=P^{-1}$)

قضیه ۲۴: اگر P یک ماتریس انتقال از یک پایه‌ی متعامد یکه به پایه‌ی متعامد یکه دیگر فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه P متعامد است.

مثال ۶: می‌دانیم که $B=\{\alpha_1=(1,0), \alpha_2=(0,1)\}$ یک پایه فضای $\mathbb{R}^2$ است (در واقع پایه استاندارد $\mathbb{R}^2$ است)

الف) نشان دهید $B'=\{\alpha'_1=(1,1), \alpha'_2=(-1,1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است.

ب) مختصات بردار $\alpha=(2,3)$ نسبت به پایه B' را بیابید.

حل: الف) چون $\det\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=1+1=2\neq 0$ پس مجموعه B' یک مجموعه مستقل خطی است و چون $\dim\mathbb{R}^2=2$
پس $B'=\{\alpha'_1=(1,1), \alpha'_2=(-1,1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است.

ب) ماتریس $P=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ ماتریس انتقال از پایه B به پایه B' است بنابراین

$$[\alpha]_{B'}=P^{-1}[\alpha]_B \Rightarrow [\alpha]_{B'}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2+3\\-2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

پس مختصات بردار $\alpha=(2,3)$ نسبت به پایه B' عبارت است از $\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

مثال ۷: برای فضای برداری P_1 مجموعه تمام چندجمله‌ای‌ها با ضرایب حقیقی از درجه یک پایه‌های $B=\{f_1(x), f_2(x)\}$ و $B'=\{g_1(x), g_2(x)\}$ در نظر بگیرید که در آن $f_1(x)=6+3x$ و $f_2(x)=10+2x$ و $g_1(x)=2$, $g_2(x)=3+2x$

الف) ماتریس انتقال از B' به B را پیدا کنید

ب) ماتریس انتقال از B به B' را پیدا کنید.

ج) مختصات ماتریس $[f(x)]_B$ را پیدا کنید که در آن $f(x)=-4+x$ همچنین $[f(x)]_{B'}$ را نیز پیدا کنید.

حل: الف) می‌دانیم که ستون‌های ماتریس انتقال از B' به B عبارت است از ماتریس P که ستون‌های آن مختصات بردارهای B' نسبت به پایه B است.

$$g_1(x)=2=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)=c_1(6+3x)+c_2(10+2x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6c_1+10c_2=2\\3c_1+2c_2=0\Rightarrow c_1=-\frac{2}{3}c_2\end{cases} \Rightarrow -\frac{12}{3}c_2+10c_2=2\Rightarrow 6c_2=2\Rightarrow\boxed{c_2=\frac{1}{3}}\Rightarrow c_1=-\frac{2}{9}$$

$$g_2(x)=3+2x=d_1(6+3x)+d_2(10+2x)\Rightarrow\begin{cases}6d_1+10d_2=3\\3d_1+2d_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6d_1+10d_2=3\\-6d_1-4d_2=-4\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow 6d_2 = -1 \Rightarrow d_2 = -\frac{1}{6} \;,\; 3d_1 = 2 - 2d_2 \Rightarrow d_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = \frac{7}{9} \\ d_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = -\frac{27}{6}\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{7}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det P = \frac{2}{9} \times \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{9} = \frac{1}{27} - \frac{7}{27} = -\frac{6}{27}$$

ب) $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس انتقال از پایه B' به B است

ج)

$$[f(x)]_{B'} = P^{-1}[f(x)]_B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[f(x)]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow -4 + x = c f_1(x) + d f_2(x) = c(6+3x) + d(10+2x)$$

$$\Rightarrow -4 + x = (6c + 10d) + (3c + 2d)x \Rightarrow \begin{cases} 6c + 10d = -4 \\ 3c + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3c + 5d = -2 \\ 3c + 2d = 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{تفریق کردن}}$$

$$3d = -3 \Rightarrow \boxed{d = -1} \Rightarrow 3c = 1 - 2d = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \boxed{c = 1} \Rightarrow [f(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

تمرین:

۱- مختصات بردار $\alpha = (2, -1, 3)$ را نسبت به پایه $B = \{\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (2,2,0), \alpha_3 = (3,3,3)\}$ را بیابید.

۲- مختصات بردار $f(x) = 2 - x + x^2$ را نسبت به پایه $B = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$ بیابید که در آن $f_1(x) = 1 + x$ و $f_2(x) = 1 + x^2$ و $f_3(x) = x + x^2$

۳- مختصات برداری $\alpha = (-1, 0, 2)$ را نسبت به پایه‌ی یکه متعامد $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ را بیابید که در آن $\alpha_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ و $\alpha_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ و $\alpha_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

۴- در $\mathbb{R}^3$ دو پایه $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ و $B' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3\}$ را در نظر بگیرید که در آن

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \;,\; \alpha'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha'_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha'_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

الف) ماتریس انتقال از B به B' را پیدا کنید

ب) اگر $\gamma = (-5, 8, -5)$ آنگاه مختصات $[\gamma]_B$ و $[\gamma]_{B'}$ را بیابید

۵- فرض کنید که $V = \langle f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \cos x \rangle$

الف) نشان دهید که $g_1(x) = 2\sin x + \cos x$ و $g_2(x) = 3\cos x$ یک پایه برای V است

ب) ماتریس انتقال از B' به B را بیابید که در آن $B = \{f_1(x), f_2(x)\}$ و $B' = \{g_1(x), g_2(x)\}$

ج) ماتریس انتقال از B به B' را بیابید.