کاربردهای مشتق گیری   فصل ۴ کتاب استوارت

در این فصل مباحث زیر تدریس می گردد

الف) ماکسیمم و می نیمم نسبی (موضعی) و مطلق توابع و برخی از کاربردهای آن

ب) قضیه رول و قضیه مقدار میانگین و کاربردهای آن

ج) رسم نمودار تابع با تمام توضیحات

د) بهینه سازی و مسائل آن

ماکسیمم و می نیمم نسبی (موضعی) و مطلق توابع

تعریف: فرض کنید که D یک بازه شده و $f(x)$ یک تابع باشد که روی بازه D تعریف شده است و $c\in D$.
تابع f در $x=c$ دارای ماکسیمم نسبی (موضعی) دارد هرگاه یک بازه باز مانند I شامل c موجود باشد بطوریکه

$$\forall x\in I \quad f(x)\le f(c)$$

در این صورت $f(c)$ را مقدار ماکسیمم نسبی تابع f نامیم.

و تابع $f(x)$ در $x=c$ دارای می نیمم نسبی (موضعی) دارد هرگاه یک بازه باز مانند I شامل c موجود باشد بطوریکه

$$\forall x\in I \quad f(x)\ge f(c)$$

در این صورت $f(c)$ را مقدار ماکسیمم نسبی تابع f نامیم.

و تابع f در $x=c$ ماکسیمم مطلق دارد هرگاه برای هر $x\in D$ $\quad f(x)\le f(c)$.

و $f(c)$ را مقدار ماکسیمم مطلق روی D می نامیم.

و تابع f در $x=c$ می نیمم مطلق دارد هرگاه برای هر $x\in D$ $\quad f(x)\ge f(c)$.

و $f(c)$ را مقدار می نیمم مطلق تابع f روی D می نامیم.

توجه: فرق بین ماکسیمم مطلق (می نیمم مطلق) با ماکسیمم نسبی (می نیمم نسبی) تابع در این است که

۱) برای ماکسیمم نسبی (می نیمم نسبی) باید یک بازه باز شامل c وجود داشته باشد که $f(x)\le f(c)$ $(f(x)\ge f(c))$
ولی ماکسیمم مطلق (می نیمم مطلق) روی یک ناحیه (دامنه f) تعریف می شود و نیازی به بازه باز نیست

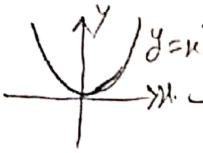
۲) ماکسیمم مطلق (می نیمم مطلق) روی یک بازه بسته می تواند در ابتدا و انتهای بازه باشد ولی در ماکسیمم نسبی (می نیمم نسبی) نقطه ابتدا و انتهای بازه بسته نمی تواند نقطه ماکسیمم و می نیمم نسبی تابع باشد

۳) ماکسیمم و می نیمم نسبی می توانند ماکسیمم و می نیمم مطلق هم باشند ولی برعکس آن همواره برقرار نیست

مثال ۱) چون $-1\le \cos x\le 1$ بنابراین اگر $f(x)=\cos x$ چون $D_f=\mathbb{R}$ بنابراین

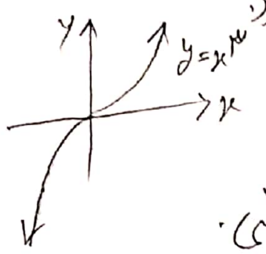
مقدار ماکسیمم مطلق $f(x)$ عدد ۱ است و مقدار مینیمم مطلق $f(x)$ عدد ۱- است که بی‌نهایت بار روی $\mathbb{R}$ تکرار می‌شود. به عبارت دیگر

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} \cos(2n\pi) = 1 \\ \cos(2n+1)\pi = -1 \end{cases}$$



مثال ۲: اگر $f(x) = x^2$ بدیهی است که $f(0)=0$ مینیمم مطلق و مینیمم نسبی تابع است

ولی اگر $f(x) = x^3$ آنگاه $f(x)$ ماکسیمم مطلق و نسبی و مینیمم مطلق و نسبی ندارد.



تعریف: مقدارهای اکسترمم مطلق یعنی مقدار ماکسیمم مطلق یا مقدار مینیمم مطلق و به همین صورت مقدارهای اکسترمم نسبی یعنی مقدار ماکسیمم نسبی یا مقدار مینیمم نسبی.

قضیه (اکسترمم مطلق) اگر تابع $f(x)$ روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه تابع f یک مقدار ماکسیمم مطلق مانند $f(c)$ و یک مقدار مینیمم مطلق مانند $f(d)$ دارد که در آن $c,d \in [a,b]$. به عبارت دیگر $f(x)$ روی این بازه بسته اکسترمم مطلق دارد.

قضیه فرما: اگر f در $x=c$ اکسترمم نسبی داشته باشد و اگر $f'(c)$ موجود باشد (تعریف شود) آنگاه $f'(c)=0$.

تعریف: نقطه $x=c$ را یک نقطه بحرانی تابع f است هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نداشته باشد $(x \in D_f)$

توجه: اگر f در $x=c$ اکسترمم نسبی داشته باشد آنگاه c نقطه بحرانی تابع f است.

چگونه می‌توان نوع اکسترمم نسبی (یعنی ماکسیمم و مینیمم نسبی) یک تابع را تعیین کرد.

با کمک دو آزمون از روی شکل نوع اکسترمم نسبی می‌توان نوع اکسترمم نسبی تابع f را تعیین کرد.

آزمون صعودی و نزولی بودن تابع f روی یک بازه:

الف) اگر روی بازه I، $f'(x) > 0$ آنگاه $f(x)$ روی بازه I صعودی است.

ب) اگر روی بازه I، $f'(x) < 0$ آنگاه $f(x)$ روی بازه I نزولی است

آزمون مشتق مرتبه اول: فرض کنید که c یک نقطه بحرانی تابع پیوسته f باشد.

الف) اگر جدول تعیین علامت f' به صورت

x		c
$f'(x)$	+	−
$f(x)$	↗	↘

باشد آنگاه f در $x=c$ ماکسیمم نسبی دارد

ب) اگر جدول تعیین علامت f' به صورت زیر باشد آنگاه f در $x=c$ مینیمم نسبی دارد

x		c
$f'(x)$	−	+
$f(x)$	↘	↗

ج) اگر جدول تعیین علامت f' با صورت زیر باشد آنگاه f در c اکسترمم نسبی (ماکسیمم و مینیمم نسبی) ندارد

x		c	
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	↘		↘

و

x		c	
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	↗		↗

مثال ۳: صعودی و نزولی بودن و اکسترممهای نسبی تابع $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$ را معین کنید.

حل: $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$

$$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)=12x(x-2)(x+1)=0$$

$\Rightarrow x=0,\ x=-1,\ x=2$ نقاط بحرانی تابع f

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	min نسبی 0	↗	Max نسبی 5	↘	min نسبی	↗	

$\boxed{f(-1)=0\ ,\ f(2)=-27 \text{ مقادیر مینیمم نسبی}}$

$f(0)=5$ مقدار ماکسیمم نسبی

	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-x-2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

در آینده نمودار آن رسم می‌کنیم (نمودار تابع)

مثال ۴: صعودی و نزولی و اکسترممهای تابع $f(x)=5x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$ را معین کنید.

حل: $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$

$$f'(x)=\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2-x)=0 \begin{cases} x=2 \\ x=0 \text{ تعریف نشده است} \end{cases}$$

$\Rightarrow x=2\ ,\ x=0$ نقاط بحرانی تابع f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		↘	min نسبی 0	↗	Max نسبی $3\sqrt[3]{4}$	↘	

$f(0)=0$ (مقدار مینیمم نسبی)	و $f(2)=3\sqrt[3]{4}$ مقدار ماکسیمم نسبی

تعریف (تقعر) اگر نمودار f روی بازه I بالای همه خطهای مماسش باشد آنگاه نمودار تابع $f(x)$ روی بازه I تقعرش رو به طرف بالا است و اگر نمودار f روی بازه I پایین همه خطهای مماسش باشد آنگاه نمودار تابع $f(x)$ روی بازه I رو به طرف پایین است.

آزمون تقعر: الف) اگر به ازای هر x در I، $f''(x)>0$ آنگاه تقعر نمودار تابع f روی I رو به بالا است.

ب) اگر به ازای هر x در I، $f''(x)<0$ آنگاه تقعر نمودار تابع f روی I رو به پایین است.

آزمون مشتق مرتبه دوم: فرض کنید $f''(x)$ در یک همسایگی از c پیوسته باشند.

الف) اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)>0$ آنگاه تابع f در $x=c$ می‌نیمم نسبی دارد.

ب) اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)<0$ آنگاه تابع f در $x=c$ ماکسیمم نسبی دارد.

تعریف (نقطه عطف) نقطه P روی منحنی $y=f(x)$ را یک نقطه عطف می‌نامیم، به شرطی که تابع f در این نقطه پیوسته باشد و تقعر نمودار عوض شود.

مثال ۵: تقعر و نقطه عطف و نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=f(x)=x^4-4x^3$ را تعیین کنید.

حل: $D_f=\mathbb{R}$

$y'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)=0 \;\Rightarrow\; x=0,\; x=3$ نقاط بحرانی تابع

$y''=12x^2-24x=12x(x-2)=0 \;\Rightarrow\; x=0,\; x=2$

تقعر بالا را با $\cup$ نمایش می‌دهیم

تقعر پایین را با $\cap$ نمایش می‌دهیم

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y''		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
y		$\searrow \cup$		$\searrow \cap$		$\searrow \cup$		$\nearrow \cup$	
			عطف 0		عطف -12		min نسبی -27		

$f(0)=0$ ، $f(+2)=-12$ ، $f(3)=-27$

تمرین: در مثال ۳ و ۴ تقعر و نقطه عطف تابع را بیابید.

دستورالعمل اکسترمم مطلق

چگونه می‌توان اکسترمم مطلق تابع $f(x)$ روی بازه بسته $[a,b]$ را بدست آورد؟

جواب: فرض کنید که تابع $f(x)$ روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت:

۱) مقدار تابع $f(x)$ به ازای نقطه‌های بحرانی f در بازه بازه (a,b) را بدست می‌آوریم: فرض کنید که c_1 و c_2 دو نقطه بحرانی تابع f باشد مقدار $f(c_1)$ و $f(c_2)$ را می‌یابیم.

۲) $f(a)$ و $f(b)$ را پیدا می‌کنیم.

۳) بین $f(a)$ و $f(b)$ و $f(c_1)$ و $f(c_2)$ بیشترین مقدار و کمترین مقدار به ترتیب ماکسیمم مطلق و می‌نیمم مطلق تابع f است.

مثال ۶: اکسترمم مطلق تابع $f(x)=x^3-3x^2+1$ به ازای $-\frac{1}{2}\le x\le 4$ را بیابید.

حل: تابع f که یک تابع چندجمله‌ای است و روی $D_f=\mathbb{R}$ پیوسته است و بنابراین روی بازه بسته $[-\frac{1}{2}, 4]$ پیوسته است. نقاط بحرانی این تابع را می‌یابیم.

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

پس $x=0$ و $x=2$ نقاط بحرانی تابع f است.

$$f(0)=1 \ , \quad f(2)=8-12+1=-3$$

$$f(-\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{8} \ , \quad f(4)=17$$

بنابراین طبق قضیه اکسترمم مطلق و دستورالعمل صفحه قبل

$f(2)=-3$ مقدار مینیمم مطلق و $f(4)=17$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع $f(x)$ روی بازه $[-\frac{1}{2}, 4]$ است.

در بخش بهینه‌سازی بیشتر از دستورالعمل قبل و قضیه اکسترمم مطلق استفاده می‌کنیم.

مثال ۷: اکسترمم مطلق و نسبی تابع $g(x)=x+2\sin x$ روی بازه $[0, 2\pi]$ را بدست آورید.

حل: این تابع روی $D_g=\mathbb{R}$ پیوسته است پس روی $[0, 2\pi]$ پیوسته است.

نقاط بحرانی تابع روی بازه $[0, 2\pi]$:

$$g'(x)=1+2\cos x=0 \Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3} \ , \ x=\frac{4\pi}{3}$$

$$g(0)=0 \ , \ g(2\pi)=2\pi \ , \ g(\tfrac{2\pi}{3})=\frac{2\pi}{3}+2(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\cong 3.83$$

$$g(\tfrac{4\pi}{3})=\frac{4\pi}{3}+2(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\cong 2.46$$

بنابراین $g(0)=0$ مقدار مینیمم مطلق تابع $g(x)$ است و $g(2\pi)=2\pi$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع g است.

برای اکسترمم نسبی هم می‌توان از آزمون مشتق مرتبه اول و هم می‌توان از آزمون مشتق مرتبه دوم استفاده کرد.

از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

$$g''(x)=-2\sin x$$

$g''(\frac{2\pi}{3})=-2\sin(\frac{2\pi}{3})=-2(\frac{\sqrt{3}}{2})=-\sqrt{3}<0 \Longrightarrow$ $g(\frac{2\pi}{3})$ مقدار ماکسیمم نسبی است

$g''(\frac{2\pi}{3})=-2\sin(\frac{4\pi}{3})=-2(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}>0 \Longrightarrow$ $g(\frac{4\pi}{3})$ مقدار مینیمم نسبی است

توجه: جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos x=-\frac{1}{2}$ روی $D_f=\mathbb{R}$ به صورت زیر است.

$$\cos x=-\frac{1}{2}=\cos(\frac{2\pi}{3}) \Longrightarrow \boxed{x=2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \qquad k\in\mathbb{Z}}$$

قضیه رول و قضیه مقدار میانگین:

این دو قضیه کاربردی زیادی در ریاضی داشته و برخی از این کاربردها حوالی هایش ...

قضیه رول: فرض کنید که تابع $f(x)$ دارای سه شرط زیر باشد (یا در سه شرط زیر صدق کند)

۱) f روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد ۲) روی بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد

۳) $f(a)=f(b)$

آنگاه عددی مانند c در (a,b) وجود دارد بطوریکه $f'(c)=0$.

یکی از کاربردهای قضیه رول برای اثبات منحصر بفردی ریشه معادله $f(x)=0$ است [همچنین برای اثبات اینکه معادله $f(x)=0$ دقیقاً دارای ۲ یا ۳ یا ... ریشه داشتن است.]

مثال ۱: ثابت کنید که معادله $x^3+x-1=0$ دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد.

حل: ابتدا به کمک قضیه مقدار میانی (نتیجه قضیه مقدار میانی) نشان می‌دهیم که این معادله ریشه حقیقی دارد و برای منحصر به فردی از فرض خلف و قضیه رول استفاده می‌کنیم.

چون تابع $f(x)=x^3+x-1$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و $f(0)\times f(1)<0$ زیرا $f(0)=-1, f(1)=1$

بنابراین طبق نتیجه قضیه مقدار میانی یک عدد مانند c بین ۰ و ۱ وجود دارد که $f(c)=0$ یعنی c ریشه معادله $x^3+x-1=0$ است (یعنی یک ریشه بین صفر و یک دارد پس ریشه حقیقی دارد.)

برای منحصر به فردی از فرض خلف استفاده می‌کنیم، فرض کنید که a و b دو ریشه حقیقی معادله $f(x)=x^3+x-1=0$ باشند (یعنی معادله دو ریشه حقیقی داشته باشد) چون f روی (a,b) مشتق‌پذیر است و $f(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته است و طبق فرض خلف $f(a)=f(b)=0$ پس طبق قضیه رول $\exists d\in(a,b):\ f'(d)=0$ که متناقض با $f'(d)=3d^2+1\neq 0$ است پس فرض خلف باطل و معادله فقط یک ریشه حقیقی دارد.

مثال ۲: نشان دهید که معادله $x^5-5x+1=0$ دقیقاً سه ریشه حقیقی دارد.

حل: در مرحله اول نشان می‌دهیم که معادله دارای سه ریشه حقیقی است فرض کنید که $f(x)=x^5-5x+1$ تابع $f(x)$ چون تابع چندجمله‌ای است روی $\mathbb{R}$ پیوسته است طبق نتیجه قضیه مقدار میانی داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f(-2)=-21 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(-2)<0 \Rightarrow \exists\, c_1\in(-2,0):\ f(c_1)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f(1)=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)f(1)<0 \Rightarrow \exists\, c_2\in(0,1):\ f(c_2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=-3 \\ f(2)=22 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)\cdot f(2)<0 \Rightarrow \exists\, c_3\in(1,2):\ f(c_3)=0$$

پس c_1 و c_2 و c_3 سه ریشه حقیقی معادله هستند.

برای اینکه این معادله دقیقاً سه ریشه دارد از فرض خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید که معادله $f(x)=x^5-5x+1=0$ دارای ۴ ریشه x_1 و x_2 و x_3 و x_4 باشد و فرض کنید که $x_1<x_2<x_3<x_4$.

چون تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر است و روی بازه‌های $[x_1,x_2]$ و $[x_2,x_3]$ و $[x_3,x_4]$ پیوسته است پس طبق قضیه رول داریم

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \exists c\in(x_1,x_2):\ f'(c)=0$$
$$f(x_2)=f(x_3)\Rightarrow \exists d\in(x_2,x_3):\ f'(d)=0$$
$$f(x_3)=f(x_4)\Rightarrow \exists e\in(x_3,x_4):\ f'(e)=0$$

چون $f'(x)=5x^4-5$ و $f'(x)=5(x^4-1)=0$ فقط دو ریشه حقیقی ۱ و ۱- دارد بنابراین وجود سه ریشه c و d و e برای $f'(x)=0$ یک تناقض با دو ریشه داشتن $f'(x)=0$ است. پس فرض خلف باطل و حکم یعنی اینکه معادله $x^5-5x+1=0$ دقیقاً سه ریشه دارد ثابت می‌شود.

از قضیه رول معمولاً برای اثبات دیگر قضایا از جمله قضیه مقدار میانگین استفاده می‌شود.

قضیه مقدار میانگین: فرض کنید که $f(x)$ تابعی باشد که در شرط‌های زیر صدق می‌کند:

۱) $f(x)$ روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته است ۲) $f(x)$ روی بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر است.

در این صورت عددی مانند c در (a,b) وجود دارد به طوری که

$$f(b)-f(c)=f'(c)(b-a)$$

یا معادل آن
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

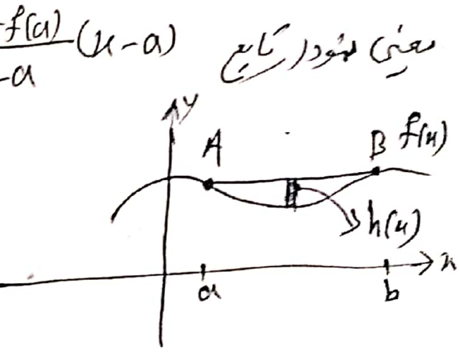
این قضیه را ثابت می‌کنیم و از ایده‌ای که در اثبات این قضیه به کار رفته است (یعنی طرح اثبات) برای استفاده در حل تمرینات و اثبات قضایای دیگر به کار می‌گیریم.

اثبات قضیه مقدار میانگین: تابع جدید (کمکی) $h(x)$ را که تفاضل دو تابع $f(x)$ و تابعی که نمودارش خطی است که از دو نقطه $A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$ می‌گذرد را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

معادله خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد را به صورت $y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ است

یعنی نمودار تابع $y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ ؛ خط راستی است که از دو نقطه A و B می‌گذرد.

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$



نشان می‌دهیم که تابع $h(x)$ در سه شرط قضیه رول صدق می‌کند.

۱) تابع h روی بازه $[a,b]$ پیوسته است. زیرا مجموع تابع f و چندجمله‌ای درجه اول است که هر دو پیوسته‌اند.

۲) تابع h روی (a,b) مشتق‌پذیر است. زیرا f و چندجمله‌ای درجه اول هر دو مشتق‌پذیرند.

در حقیقت $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ یعنی h روی (a,b) مشتق‌پذیر است

۳) $h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$

$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$

$\Rightarrow h(b) = h(a)$

پس طبق قضیه رول عددی مانند c در (a,b) وجود دارد که

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

در نتیجه

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

مثال ۳: فرض کنید که $f(0) = -3$ و برای همه مقادیر x، $f'(x) \leq 5$. مقدار $f(2)$ چقدر ممکن است بزرگ باشد؟

حل: چون $f'(x) \leq 5$ پس f همه جا مشتق‌پذیر و در نتیجه پیوسته است. طبق قضیه مقدار میانگین

پس $f(2) - f(0) = f'(c)(2-0)$

$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c) \leq -3 + 10 = 7$$

پس بیشترین مقدار $f(2)$ برابر با عدد 7 است.

در نتیجه زیر از قضیه مقدار میانگین نتیجه می‌شود:

۱- اگر برای هر x در بازه باز (a,b)، $f'(x) = 0$ آنگاه f روی (a,b) تابعی ثابت است یعنی $[f(x) = c$

۲- اگر برای هر x در بازه باز (a,b) داشته باشیم $f'(x) = g'(x)$ آنگاه تابع $f(x) - g(x)$ روی (a,b) تابعی ثابت است یعنی $f(x) - g(x) = c$ یا $f(x) = g(x) + c$ که در آن c عددی ثابت است.

مثال ۴: ثابت کنید که اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه: $\sin x < x < \tan x$

اثبات: ثابت می‌کنیم که الف) اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\sin x < x$

ب) اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $x < \tan x$.

حل الف) روش اول (قضیه مقدار میانگین) تابع $f(t) = \sin t$ در نظر می‌گیریم تابع، که در آن $0 \leq t \leq x < \frac{\pi}{2}$، $f(t)$ روی بازه بسته $[0,x]$ پیوسته است و روی بازه باز $(0,x)$ مشتق‌پذیر است پس طبق قضیه مقدار میانگین یک عدد c بین 0 و x وجود دارد که

پس $f'(c) = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ پس $\frac{\sin x}{x} = \cos c = f'(c)$ چون $\cos c \leq 1$ بنابراین

$\frac{\sin x}{x} \leq 1$ بنابراین $\sin x \leq x$ و اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\sin x < x$.

روش دوم: نشان می‌دهیم که تابع $g(x) = \sin x - x$ روی $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ مقدار ماکسیمم مطلق صفر در $x = 0$ دارد.

$g'(x) = \cos x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$1 - \frac{\pi}{2}$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow g(x) \leq g(0) \Rightarrow \sin x - x \leq 0 \Rightarrow \sin x \leq x$

حال اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\sin x < x$.

ب) روش اول (قضیه مقدار میانگین) تابع $f(t) = \tan t$ در نظر می‌گیریم که در آن $0 \leq t \leq x < \frac{\pi}{2}$

این تابع روی بازه بسته $[0,x]$ پیوسته و روی بازه باز $(0,x)$ مشتق پذیر است پس طبق قضیه مقدار میانگین عدد c در $(0,x)$ وجود دارد بطوریکه $f'(c)=\frac{\tan x-\tan 0}{x-0}=\frac{\tan x}{x}$. حال چون

$f'(c)=1+\tan^2 c>1$ پس $\frac{\tan x}{x}>1$ یعنی $\tan x>x$

ب) روش دوم: نشان می دهیم که تابع $g(x)=\tan x-x$ برای $0<x<\frac{\pi}{2}$ صعودی است که در این

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow g(0)<g(x)\Rightarrow 0<\tan x-x\Rightarrow x<\tan x$$

تابع $g(x)$ صعودی است. $g'(x)=1+\tan^2x-1=\tan^2x>0\quad \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow$

مثال ل: نشان دهید که نامساوی $|\tan a-\tan b|\le 4|a-b|$ برای اعداد حقیقی a و b در بازه $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ برقرار است.

حل: تابع $f(x)=\tan x$ در بازه $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ پیوسته و روی بازه $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ مشتق پذیر است بنابراین برای هر دو عدد حقیقی a و b در بازه $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ تابع $f(x)=\tan x$ روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و روی بازه باز (a,b) مشتق پذیر است. بنابراین طبق قضیه مقدار میانگین عددی در بازه (a,b) وجود دارد بطوریکه

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\tan b-\tan a}{b-a}$$

چون $f'(c)=1+\tan^2 c$ پس

$$1+\tan^2 c=\frac{\tan b-\tan a}{b-a}$$

بیشترین مقدار $\sec^2 c=1+\tan^2 c$ در بازه $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ برابر عدد ۴ است پس

$$\left|\frac{\tan b-\tan a}{b-a}\right|=|1+\tan^2 c|\le 4\Rightarrow |\tan b-\tan a|\le 4|b-a|$$

طبق خواص قدرمطلق:

$$\Rightarrow |\tan a-\tan b|\le 4|a-b|$$

مثال ۹: مطلوب است محاسبه $\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

حل: (طبق قضیه مقدار میانگین) با فرض $f(t)=\sin\sqrt{t}$ که در آن $t\in[x,x+1]$ و $x>0$

چون $f(t)$ روی بازه بسته $[x,x+1]$ پیوسته و روی بازه باز $(x,x+1)$ مشتق پذیر است پس طبق قضیه مقدار میانگین عددی بین $(x,x+1)$ وجود دارد بطوریکه

$$f'(c)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=\frac{\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}}{1}\Rightarrow \sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=\frac{\cos\sqrt{c}}{2\sqrt{c}}$$

چون $\cos\sqrt{c}$ کراندار است پس $\lim_{c\to+\infty}\frac{\cos\sqrt{c}}{2\sqrt{c}}=0$ بنابراین $x\to+\infty\Rightarrow c\to 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=\lim_{c\to+\infty}\frac{\cos\sqrt{c}}{2\sqrt{c}}=0$$

مثال ۱۷) فرض کنید تابع $f(x)$ روی $[1,2]$ پیوسته باشد و $1<f(x)<2$ و $|f'(x)|<1$. نشان دهید عدد منحصربفرد c بین ۱ و ۲ وجود دارد که $f(c)=c$.

حل: تابع کمکی $g(x)=f(x)-x$ را تعریف می‌کنیم. این تابع روی $[1,2]$ پیوسته است چون تفاضل دو تابع پیوسته است و

$$\begin{cases} g(1)=f(1)-1>0 \\ g(2)=f(2)-2<0 \end{cases} \Longrightarrow g(1)\cdot g(2)<0$$

حال طبق قضیه مقدار میانی عدد c بین ۱ و ۲ وجود دارد که $g(c)=0$ یعنی $f(c)-c=0$ یعنی $f(c)=c$، یعنی معادله $g(x)=f(x)-x$ یک ریشه حقیقی c بین ۱ و ۲ دارد.

فرض خلف: فرض کنید که این معادله دو ریشه مانند a و b بین ۱ و ۲ داشته باشد یعنی $g(a)=g(b)=0$ پس طبق قضیه رول چون $g(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر است پس $\exists c\in(a,b):\ g'(c)=0$ یعنی $f'(c)=1$ و این با فرض $|f'(x)|<1$ در تناقض است پس فرض خلف باطل و منحصربفرد بودن ریشه معادله $g(x)=0$ ثابت می‌شود. پس فقط و فقط یک c (منحصربفرد) بین ۱ و ۲ وجود دارد که $f(c)=c$.

تمرین:

۱) فرض کنید که توابع f و g روی بازه بسته $[-1,1]$ پیوسته و روی بازه باز $(-1,1)$ مشتق‌پذیر باشند و $f(1)=g(1)$ و $f(-1)=g(-1)$. نشان دهید که

$$\exists c\in(-1,1):\ f'(c)=g'(c)$$

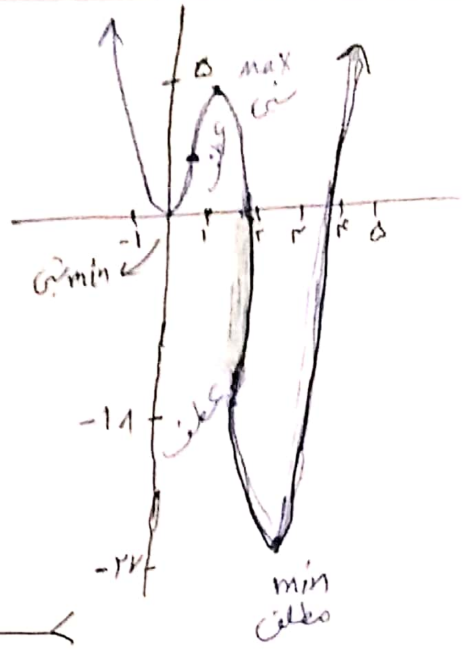
۲- با استفاده از قضیه رول نشان دهید که معادله $\tan x=1-x$ در فاصله $(0,1)$ جواب دارد (راهنمایی: از تابع $f(x)=(1-x)\sin x$ کمک بگیرید)

۳- نشان دهید که معادله $x^3-2x^2+3x-1=0$ دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد

۴- برای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید که $|\sin a-\sin b|\le|a-b|$ (تمرین ۲۹ صفحه ۱۷۸ ج۲)

x	$-\infty$	۰		۲/۳		۱		۲/۴		۳	$+\infty$
$f'(x)$	−		+		+		−		−		+
$f''(x)$	+		+	•	−		−	•	+		+
$f(x)$	↘ ∪	۰	↗ ∪	۱۶/۰	↗ ∩	۵	↘ ∩	−۱۱/۱	↘ ∪	−۲۷	↗ ∪ +∞
	+∞	min		عطف		max		عطف		min	

مقدار تقریبی است



$R_f = [-27, +\infty)$

مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2$ را رسم کنید (با تمام توضیحات)

حل: $D_f = \mathbb{R}$ (چون تابع چندجمله‌ای است) تابع نه زوج و نه فرد است، مجانب قائم و افقی و مایل ندارد

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x^4\Big(1 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x^4 = +\infty$$

$f(x) = 2x^2(x^2 - 4x + 4) = 2x^2(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x=0,\ x=2$ محل تلاقی نمودار با محورها

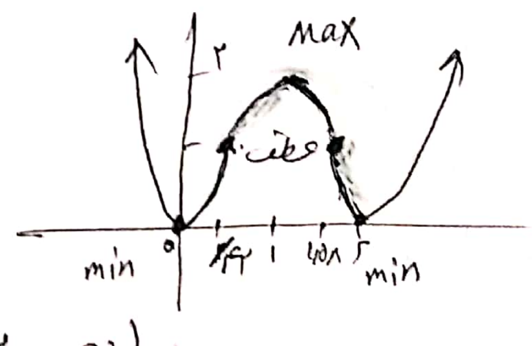
$f'(x) = 8x^3 - 24x^2 + 16x = 8x(x^2 - 3x + 2) = 8x(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x=0,\ x=1,\ x=2$ نقاط بحرانی تابع

$f''(x) = 8(3x^2 - 6x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.42,\ x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 1.58$

چون تابع چندجمله‌ای است نیست

x	$-\infty$	۰		۰/۴۲		۱		۱/۵۸		۲	$+\infty$
$f'(x)$	−	•	+		+	•	−		−	•	+
$f''(x)$	+		+	•	−		−	•	+		+
$f(x)$	↘ ∪	۰	↗ ∪	۱	↗ ∩	۲	↘ ∩	۱	↘ ∪	۰	↗ ∪
		min		عطف		max		عطف		min	

$f(0.42) = f(1.58) \cong 1$



$R_f = [0, +\infty)$

مثال ۳: نمودار تابع $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$ را رسم کنید.

حل: بدیهی است $D_f=\mathbb{R}$ زیرا در تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{6-x}=x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$ فرجه رادیکال‌ها فرد است.
تابع نه زوج است و نه فرد. تابع مجانب قائم و مایل و افقی ندارد زیرا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{6-x}=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2}\cdot\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{6-x}=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

این تابع تناوبی هم نیست.

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(6-x)^{-\frac{2}{3}}\left[2(6-x)-x\right]\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(6-x)^{-\frac{2}{3}}\left[12-3x\right]=\frac{4-x}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}=0 \;\Rightarrow\; x=4$$

$x=0$ ، $x=6$ مشتق تعریف نمی‌شود

$$\boxed{f'(x)=(4-x)x^{-\frac{1}{3}}(6-x)^{-\frac{2}{3}}}$$

پس $x=4$ و $x=0$ و $x=6$ نقاط بحرانی تابع $f(x)$ هستند.

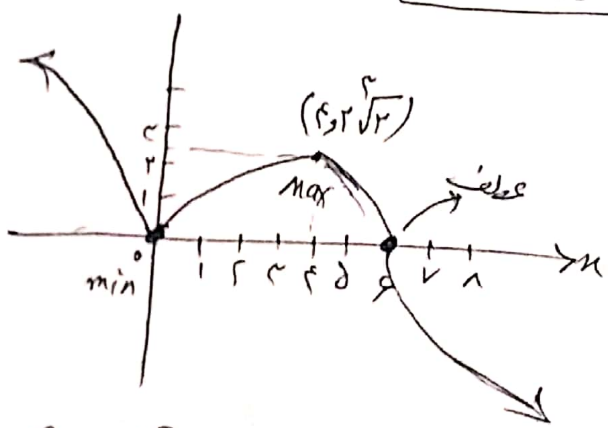
$$f''(x)=-x^{-\frac{1}{3}}(6-x)^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}(4-x)x^{-\frac{4}{3}}(6-x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(4-x)x^{-\frac{1}{3}}(6-x)^{-\frac{5}{3}}\Rightarrow$$

$$f''(x)=-x^{-\frac{4}{3}}(6-x)^{-\frac{5}{3}}\underbrace{\left[x(6-x)+\frac{1}{3}(4-x)(6-x)-\frac{2}{3}(4-x)x\right]}_{\text{پس از ساده شدن }=8}\Rightarrow$$

$\boxed{y=0\Rightarrow x=0 \text{ و } x=6 \quad \text{محل تلاقی با محور } x \text{ ها}}$

$$f''(x)=\frac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}\neq 0$$

x	$-\infty$		0		4		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	ن	$+$	0	$-$	ن	$-$	
$f''(x)$		$+$		$-$	ن	$-$	ن	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	min 0	↗	max $2\sqrt[3]{2}$	↘	عطف 0	↘	$-\infty$



$R_f=\mathbb{R}$

مثال ۴: نمودار تابع $y=\frac{2x^2}{x^2-1}$ را رسم کنید.

حل:

$x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1\Rightarrow R_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$\boxed{y=0\Rightarrow x=0 \quad \text{محل تلاقی با محورها}}$

تابع زوج است زیرا $x\in D_f\Rightarrow -x\in D_f$ و $f(-x)=\frac{2(-x)^2}{(-x)^2-1}=f(x)$

می‌توان تابع را در فاصله $(0,1)\cup(1,+\infty)$ رسم کرد و سپس قرینه آن را نسبت به محور y ها رسم کرد (چون تابع زوج است)

خطوط $x=1$ و $x=-1$ مجانب قائم نمودار تابع است زیرا

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{(0^+)(2)}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{(0^-)(2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{(-2)(0^+)}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{(-2)(0^-)}=+\infty$$

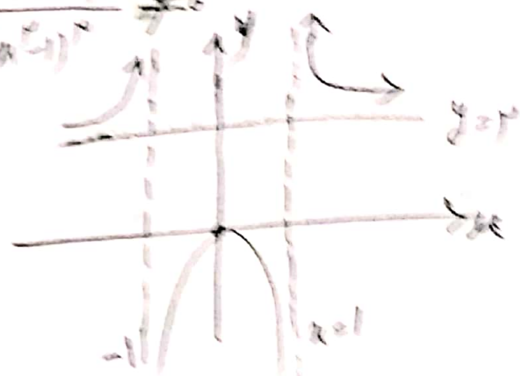
خط $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع است زیرا

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2 \quad , \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)=2$$

$$y'=\frac{4x(x^2-1)-2x(2x^2)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}=0 \Rightarrow \boxed{x=0 \quad \text{نقطه بحرانی}}$$

$$y''=\frac{-4(x^2-1)^2-4x(x^2-1)(-4x)}{(x^2-1)^4}=\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y''		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	2



$$R_f=(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$$

مثال ۵: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ را رسم کنید.

حل: چون $2+\sin x\neq 0$ پس $D_f=\mathbb{R}$.

تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$\boxed{\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \\ y=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)=(2k+1)\frac{\pi}{2} \end{array}}$$

تابع $f(x)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π است زیرا: $f(x+2\pi)=f(x)$

پس کافی است نمودار تابع را در بازه $[0,2\pi]$ رسم کنیم سپس آن را در بازه‌های دیگر تکرار کنیم (بازه‌های $[-2\pi,0]$ و $[2\pi,4\pi]$ و ...).

این تابع مجانب قائم و افقی و مایل ندارد.

$$f'(x)=\frac{(2+\sin x)(-\sin x)-\cos x(\cos x)}{(2+\sin x)^2}=-\frac{2\sin x+1}{(2+\sin x)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2\cos x(2+\sin x)-2\cos x(2+\sin x)(2\sin x+1)}{(2+\sin x)^4}=\frac{-2\cos x(1-\sin x)}{(2+\sin x)^3}=\frac{2\cos x(\sin x-1)}{(2+\sin x)^3}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘ ∩	0 ↘ ∪	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ↗ ∪	0 ↗ ∩	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ↘ ∩	$\frac{1}{2}$

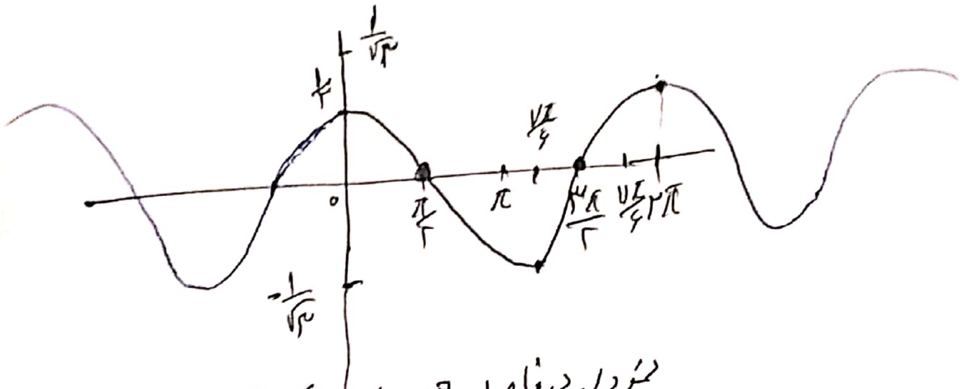
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2\sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}$$

جواب ها در بازه $[0,2\pi]$ عبارت است از

$$x=\frac{7\pi}{6} \quad , \quad x=\frac{11\pi}{6}$$

ربع سوم و چهارم

$$f''(x)=0 \begin{cases} \cos x=0 \rightarrow x=\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2} \\ \sin x=1 \rightarrow x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$R_f=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

نمودار در فاصله $[0,2\pi]$ با رنگ مشکی

مثال ۶: نمودار تابع $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$ را رسم کنید.

حل: $D_f=\mathbb{R}$

تابع فرد است زیرا $f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=-f(x)$

بنابراین نمودار نسبت به مبداء متقارن است.

محل تلاقی با محورهای مختصات

$x=0 \Rightarrow y=0$

$y=0 \Rightarrow x=0$ $\Rightarrow (0,0)$

نمودار مجانب قائم و افقی ندارد ولی مجانب مایل دارد زیرا و مجانب مایل نمودار $y=x$ است.

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \hline x^3+x & x \\ \hline -x & \end{array}$$

با تقسیم داریم

$$\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)-x|=\lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=0$$

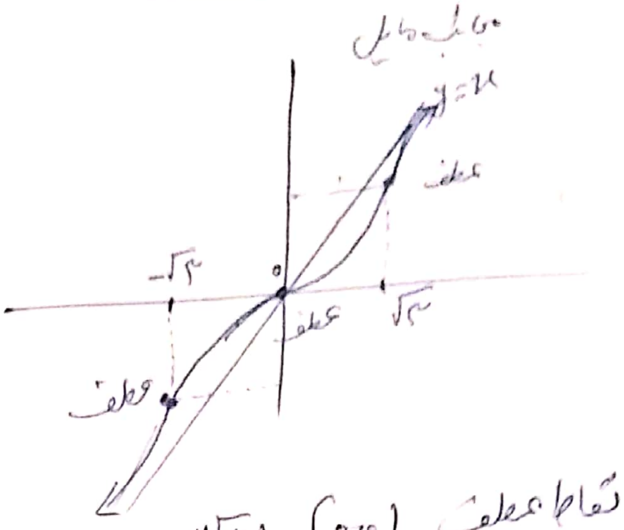
تابع تناوبی نیست.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow x=0$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-(x^4+3x^2)\times 4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
y''		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow \cup$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow \cap$	0	$\nearrow \cup$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow \cap$	

		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$x(3-x^2)$	$+$		$-$		$+$		$-$



نقاط عطف $(0,0)$ و $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ و $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ است

$$R_f = \mathbb{R}$$

مثال ۷ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ را رسم کنید.

حل: چون $x^2+x+1>0$ زیرا $\Delta = 1-4<0$ و با توجه به جدول تعیین علامت $D_f=\mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2+x+1} \underset{\text{طبق هم‌ارزی}}{\simeq} \left|x+\frac{1}{2}\right| \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left|f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right| = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left|f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right| = 0$$

پس دو خط $y=x+\frac{1}{2}$ و $y=-x-\frac{1}{2}$ مجانب های مایل نمودار تابع است

$$\boxed{\left|x+\frac{1}{2}\right| = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & x \geq -\frac{1}{2} \\ -x-\frac{1}{2} & x < -\frac{1}{2} \end{cases}}$$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} = 0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)\times\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{4(x^2+x+1)-(2x+1)}{2(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{4x^2+4x+3}{4(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

$\Delta = 4-48 = -44 < 0$ چون

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$		$+$
y''	$+$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

$R_f=\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

$\boxed{x=0 \Rightarrow y=1}$

مثال ۸: نمودار تابع $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x}$ را رسم کنید.

$1+x=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

$D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x+1 \\ \hline -(x^2+x) & x-1 \\ -x+1 & \\ -(-x-1) & \\ \hline +2 & \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{x^2+1}{1+x}=f(x)=(x-1)+\frac{2}{1+x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left|f(x)-(x-1)\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{2}{1+x}\right|=0$

چون حدها ... $y=x-1$ مجانب مایل نمودار تابع است

خط $x=-1$ مجانب قائم نمودار تابع است زیرا

$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{1+x^2}{1+x}=\frac{2}{0^+}=+\infty$, $\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{1+x^2}{1+x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$

$f'(x)=\frac{2x(1+x)-1-x^2}{(1+x)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}=0 \;\Big\langle\; \begin{array}{l} x=-1-\sqrt{2} \\ x=-1+\sqrt{2} \end{array}$ نقاط بحرانی تابع

$f''(x)=\frac{(2x+2)(1+x)^2-2(1+x)(x^2+2x-1)}{(x+1)^4}=\frac{(2x+2)(1+x)-2(x^2+2x-1)}{(x+1)^3}=\frac{4}{(1+x)^3}$

تابع نه زوج است و نه فرد زیرا دامنه تابع قرینه نیست

$(1\in D_f \not\Rightarrow -1\in D_f)$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y''		−		−	‖	+		+	
$f(x)$		↗	$-2-2\sqrt{2}$ max	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$2\sqrt{2}-2$ min	↗	

$$R_f=(-\infty,-2\sqrt{2}-2]\cup[2\sqrt{2}-2,+\infty)$$

یادآوری مجانب های نمودار یک تابع (مجانب افقی، قائم و مایل)

خط $y=b$ را مجانب افقی نمودار تابع $y=f(x)$ می نامند هرگاه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ یا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$

مثال ۱) خط $y=1$ مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ است زیرا $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$

نکته: در تابع گویا (کسری) اگر درجه صورت و مخرج با هم برابر باشد و یا مخرج بیشتر از صورت، نمودار تابع دارای مجانب افقی است

مثال ۲) مجانب افقی نمودار تابع $y=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ را بیابید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5}\cong\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}|x|}{3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}x}{3x}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

خطوط $y=\frac{\sqrt{2}}{3}$ و $y=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ مجانب های افقی نمودار تابع است زیرا

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}\cong\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}|x|}{3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2}x}{3x}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

خط $x=a$ مجانب قائم نمودار تابع $y=f(x)$ می نامند هرگاه یکی از چهار حد زیر برقرار باشد

$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \text{ یا } \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty \text{ یا } \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty}$

در مثال ۲ خط $x=\frac{5}{3}$ مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ است زیرا

$$\lim_{x\to(\frac{5}{3})^+} f(x) = \lim_{x\to(\frac{5}{3})^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \frac{\sqrt{\frac{59}{9}}}{0^+} = +\infty$$

همچنین $\lim_{x\to(\frac{5}{3})^-} f(x) = -\infty$.

نکته: برای تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر $x=a$ ریشه معادله $g(x)=0$ باشد ولی ریشه $f(x)=0$ نباشد در این صورت خط $x=a$ مجانب قائم نمودار تابع است.

مثال: خط $x=1$ مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ نیست زیرا

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=(x+1) \quad ; x\neq 1$$

خط $y=mx+b$ را مجانب مایل نمودار تابع $y=f(x)$ نامند هرگاه $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)-mx-b|=0$

چگونه مجانب مایل نمودار تابع $y=f(x)$ را بیابیم:

روش اول: اگر در تابع کسری $f(x)$ درجه صورت یک واحد بیشتر از درجه مخرج باشد آنگاه با تقسیم صورت بر مخرج کسر مجانب مایل یعنی $y=mx+b$ پیدا می‌شود. مثال: $y=\frac{x^2+1}{x+1}$

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x+1 \\ \underline{x^2+x} & x-1 \\ -x+1 & \\ \underline{-x-1} & \\ 2 & \end{array} \Longrightarrow y=x-1$$

مجانب مایل

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)-(x-1)|=0$$

روش دوم: اگر تابع $y=f(x)$ دارای مجانب مایل باشد آنگاه

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad و \quad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]$$

یا

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad و \quad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]$$

در مثال ۷ قسمت رسم صحیح نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ دارای دو مجانب مایل $y=x+\frac{1}{2}$ و $y=-x-\frac{1}{2}$ است. زیرا طبق هم‌ارزی

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots+c}\equiv\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|$$

برای n زوج باید $a>0$ باشد.

$$\sqrt{x^2+x+1}\cong\left|x+\frac{1}{2}\right|=\begin{cases}x+\frac{1}{2} & x\geq-\frac{1}{2}\\ -x-\frac{1}{2} & x<-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left|f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right|=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\left|f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right|=0$$

البته می‌توان از روش دوم هم مجانب مایل این نمودار تابع یافت:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1\end{cases}$$

$$m=1\Rightarrow b=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

بنابراین $y=mx+b=x+\frac{1}{2}$ مجانب مایل نمودار تابع $f(x)$ است

$$m=-1\Rightarrow b=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\times\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x+\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین خط $y=mx+b=-x-\frac{1}{2}$ مجانب مایل دیگر تابع $f(x)$ است.

تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y=x^{\frac{3}{5}}(4-x)$ ۲) $y=3x^4-4x^3-12x^2+5$ ۳) $y=x^4-4x^3$

۴) $y=5x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$ ۵) $y=\frac{x^2}{4-x^2}$ ۶) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

بهینه سازی و مسائل بهینه سازی:

مسائل علوم بسیاری وجود دارد که هدف تعیین بزرگترین مقدار، کمترین مقدار، کمترین بهاء، کوتاهترین زمان، کوتاهترین فاصله، بیشترین درآمد و سود و ... می باشد. در این مسائل "بهترین" مقدار کمیت متغیری خواسته می شود. به این گونه مسائل، مسائل بهینه سازی می نامیم. کمیتی که باید بهینه شود را می توان به صورت تابعی از یک متغیر یا دو متغیر بیان کرد و با کمک قضیه اکسترمم مطلق و یا قضیه های فرما اکسترمم آن کمیت را بهینه کرد.

مراحل حل مسائل بهینه سازی:

۱- فهمیدن مسأله: شناخت داده ها و شناخت خواسته ها (مجهول ها) مخصوصاً واژه هایی که در صورت مسئله به کار رفته است.

۲- کشیدن شکل: در اکثر مسئله ها رسم شکل کمک می کند که رابطه بین داده ها و مجهولات را بیابیم.

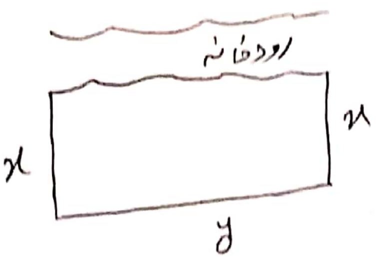
۳- نمادگذاری کردن: یعنی داده ها و مجهولات را با نمادهای معمول ریاضی نام گذاری می کنیم و یک تابع ریاضی که باید بهینه شود را بدست می آوریم.

۴- اگر تابع ریاضی بیش از یک متغیر داشته باشد با کمک معلومات مسئله رابطه (معادله) بین این متغیرها را می یابیم و با کمک آن معادله، همه متغیرها را برحسب یک متغیر می نویسیم تا تابع ریاضی یک متغیره شود.

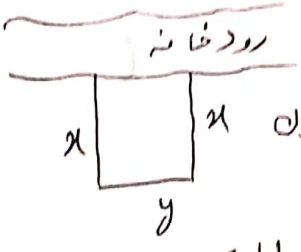
۵- با استفاده از اکسترمم مطلق و نسبی تابع بدست آمده را اکسترمم می کنیم.

توجه: اگر دامنه تابع ریاضی بدست آمده بازه بسته باشد قضیه اکسترمم مطلق را برای حل مسئله به کار می گیریم.

مثال ۱: کشاورزی ۲۴۰۰ متر توری دارد و می خواهد دور زمین کشاورزی خود که با رودخانه ای مستقیم هم مرز است با توری حصارکشی کند. مرز رودخانه نیازی به حصارکشی ندارد. ابعاد مستطیلی که بیشترین مساحت را دارد چقدر است (به عبارت دیگر مساحت بزرگترین زمین مستطیل شکل که کشاورز می تواند حصارکشی کند چقدر است.)



یا



حل: مستطیل های متفاوتی می توان رسم کرد.

محیط زمین $= 2400 = 2x+y =$ طول توری

بنابراین $y = 2400 - 2x$

مساحت زمین $= A = xy = x(2400-2x)$

$A(x) = 2400x - 2x^2 \qquad 0 \le x \le 1200$

یافتن دامنه (یا بازه مورد نظر)

چون x و y هر دو نمی توانند منفی باشند پس $x \ge 0$ و $x \le 1200$ (در غیر این صورت مساحت منفی می شود)

روش دیگر: هر وقت هدف ماکسیمم کردن است تابع را مساوی صفر قرار می دهیم و از روی آن ابتدا و انتهای بازه یا دامنه را می شناسیم.

$A(x) = x(2400-2x) = 0 \Rightarrow x=0 , x=1200 \Rightarrow I=[0,1200]$

$A'(x) = 2400 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{2400}{4} = 600$ نقطه بحرانی

حال طبق قضیه اکسترمم مطلق، بیشترین مقدار تابع $A(x)$ روی بازه $[0,1200]$ در بین مقادیر زیر است:

$A(0)=0$, $A(1200)=0$, $\boxed{A(600)=720000 \text{ ماکسیمم مطلق}}$

بنابراین $y = 2400-2(600) = 1200$

پس طول ۱۲۰۰ و عرض ۶۰۰ متر خواهد بود.

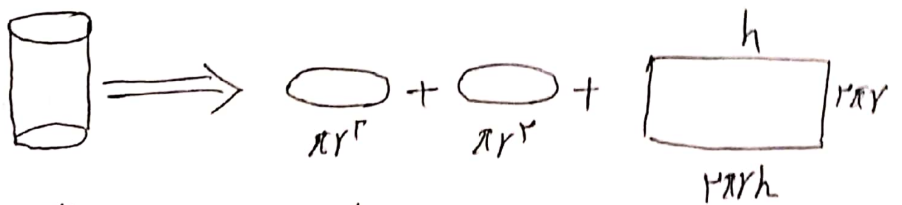
می‌توان از آزمون مشتق مرتبه دوم، اکسترمم مطلق را یافت یعنی چون $A''(x) = -4<0$ پس در $x=600$ ماکسیمم مطلق دارد.

مثال ۲: می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای شکل طوری بسازیم که یک لیتر روغن بگیرد. ابعاد این قوطی را پیدا کنید که هزینه فلز بکار رفته در ساخت این قوطی می‌نیمم گردد.

حل: r را شعاع و h را ارتفاع استوانه برحسب سانتی متر در نظر بگیریم پس $\pi r^2 h = 1000$ = حجم استوانه

باید مساحت سطح جانبی استوانه را می‌نیمم مطلق کنیم

$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$



$\pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2} \Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$

$\Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ $\quad I=(0,+\infty)$

$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 = 2000 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

نقطه بحرانی تابع.

چون بازه I باز است از قضیه اکسترمم مطلق برای بازه‌های باز که در صفحه بعد می‌آید استفاده می‌کنیم.

$\lim_{r\to0^+} A(r) = 0+\infty = +\infty$, $\lim_{r\to+\infty} A(r) = +\infty + 0 = +\infty \Rightarrow A\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) =$ مقدار می‌نیمم مطلق

بنابراین $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ مقدار می‌نیمم مطلق تابع $A(r)$ را می‌دهد در این صورت

$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi\left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}$

یعنی $2r = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = h$. پس ابعاد استوانه برابر $r=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ و $h=2r$ باید تا مقدار A مینیمم گردد.

در مسائل قبل می‌توان به دو نوع تغییر دقت کرد.

توجه ۱) برای مینیمم کردن تابع $A(r)=2\pi r^2+2\pi rh$ تحت شرط $\pi r^2h=1000$ می‌توان از مشتق‌گیری ضمنی کمک گرفت (یعنی h را برحسب r پیدا نکرده) h را تابعی از r در نظر گرفته و از دو معادله بالا نسبت به r مشتق ضمنی می‌گیریم:

$A'=4\pi r+2\pi h+2\pi rh'$ و $2\pi rh+\pi r^2h'=0$

مینیمم در نقطه بحرانی اتفاق می‌افتد پس دو معادله $A'=0$ و $2\pi rh+\pi r^2h'=0$ را باهم حل می‌کنیم

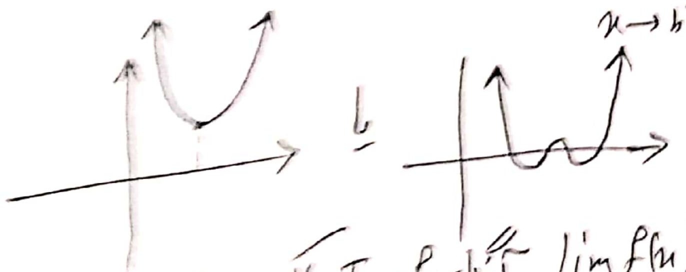
$$\begin{cases} 4\pi r+2\pi h+2\pi rh'=0 \Rightarrow 2r+h+rh'=0 \\ 2\pi rh+\pi r^2h'=0 \Rightarrow 2h+rh'=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{دو معادله از هم}]{\text{تفریق کردن}} 2r-h=0 \Rightarrow \boxed{h=2r}$$

توجه ۲) اگر در مسئله قبل بخواهد که سر قوطی استوانه باز باشد (یعنی قوطی سر نداشته باشد) در این صورت باید مسئله را با تغییرات $A=\underline{\underline{\pi r^2}}+2\pi rh$ و $\pi r^2h=1000$ حل کنیم.

قضیه اکسترمم مطلق روی بازه‌های باز: فرض کنید که f تابعی پیوسته بر بازه باز $I=(a,b)$ باشد (a می‌تواند $-\infty$ و b می‌تواند $+\infty$ هم باشد) در این صورت

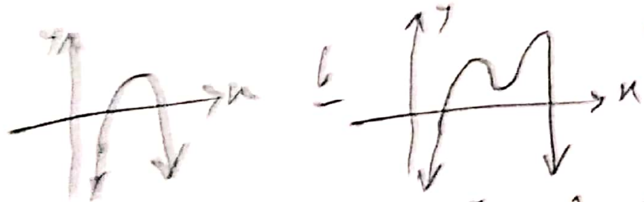
الف) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty$ آنگاه f بر I مینیمم مطلق دارد.

یعنی شکل نمودار به صورت مقابل است:



ب) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to b^-} f(x)=-\infty$ آنگاه f بر I ماکسیمم مطلق دارد.

یعنی شکل نمودار تابع f به صورت مقابل است.



توجه: در قضیه بالا می‌توان بازه I را به صورت $I=[a,b)$ یا $I=(a,b]$ نیز گرفت.

در این صورت برای $I=[a,b)$: $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ و $\lim_{x\to b^-} f(x)=?$

و باید بین $f(a)$ و $f(c)$ که c نقطه بحرانی تابع است یکی را انتخاب کرد.

و برای $I=(a,b]$، $f(b)$ و $\lim_{x\to a^+} f(x)=?$ و باید بین $f(b)$ و $f(c)$ که c نقطه بحرانی تابع

صفحه ۲۴

مثال ۳: نقطه‌ای روی سهمی $2x = y^2$ پیدا کنید که نزدیک‌ترین نقطه به نقطه $(1,4)$ باشد. کدام نقطه را می‌توان انتخاب کرد

حل:
$$d = \sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}y^2-1\right)^2+(y-4)^2}$$
(فاصله نقطه (x,y) از نقطه $(1,4)$)

برای راحتی $f(y) = d^2$ را اکسترمم می‌کنیم

$$f(y) = \left(\tfrac{1}{2}y^2-1\right)^2+(y-4)^2 \qquad I=[0,+\infty)$$

$$f'(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}\cdot 2y\right)\left(\tfrac{1}{2}y^2-1\right)+2(y-4) = y^3-2y+2y-8 = y^3-8 = 0 \longrightarrow y = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\lim_{y\to+\infty} f(y) = +\infty \quad , \quad f(0) = 1+16 = 17$$

در این مسئله طبق قضیه اکسترمم مطلق روی بازه‌ها بین $f(0)$ و $f(2)$ است

$$\underbrace{f(2) = \left(\tfrac{4}{2}-1\right)^2+(2-4)^2 = 1+4 = 5}_{\text{مینیمم مطلق}} \quad , \quad f(0) = 17$$

$$y = 2 \Rightarrow x = \tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{1}{2}(4) = 2 \Longrightarrow (x,y) = (2,2) \quad \text{جواب مسئله}$$

مثال ۴: مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی را بیابید که می‌توان آن را درون نیم‌دایره‌ای با شعاع r محاط کرد.

حل: روش اول: فرض کنید که معادله نیم‌دایره $x^2+y^2=r^2$ باشد

یعنی $y = \sqrt{r^2-x^2}$ ، $y \geq 0$

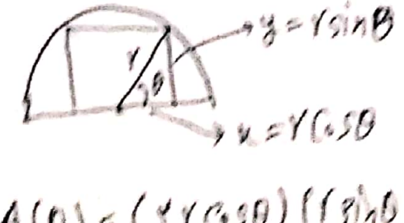
$$A = \text{مساحت مستطیل} = 2xy = 2x\sqrt{r^2-x^2} \qquad I=[0,r]$$

$$A(x) = 2x\sqrt{r^2-x^2} \quad I=[0,r] \Rightarrow A'(x) = 2\sqrt{r^2-x^2}+2x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}\right) = \frac{2(r^2-2x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 = r^2 \Rightarrow \boxed{x = \tfrac{r}{\sqrt{2}}} \;,\; x = \frac{-r}{\sqrt{2}} \;\text{غ ق ق}$$

پس طبق قضیه اکسترمم مطلق روی بازه بسته $[0,r]$ داریم

$$A(0) = 0 \;,\; A(r) = 0 \;,\; A\left(\tfrac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\tfrac{r}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{r^2-\tfrac{r^2}{2}} = r^2 \;\text{ماکسیمم مطلق}$$



روش دوم: فرض کنید که θ زاویه نشان داده شده در شکل مقابل باشد، در این صورت

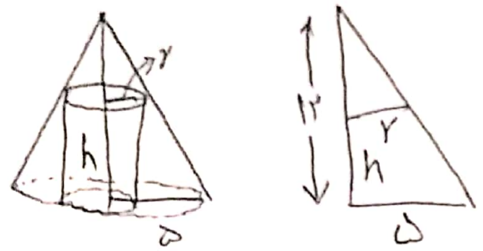
$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\sin\theta) = r^2\sin 2\theta = r^2 \quad \text{ماکسیمم مطلق}$$

چون $-1 \le \sin 2\theta \le 1$ و ماکسیمم مطلق $A(\theta)$ وقتی است که $\sin 2\theta = 1$ یعنی $2\theta = \frac{\pi}{2}$ باشد

پس $\theta = \frac{\pi}{4}$ یعنی
$$\begin{cases} x = 2\cos\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ y = 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$
یعنی $(x,y) = (\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}})$

و مساحت ماکسیمم برابر 2^2 است.

مثال ۵. (تمرین ۲۸ کتاب انتشارات صفحه ۳۰۰) مطلوب است ابعاد استوانه مستدیر قائم با بیشترین حجم که بتوان آن را در یک مخروط مستدیر قائم با شعاع ۵ سانتی‌متر و ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر محاط کرد.



حل: مستدیر قائم یعنی قاعده دایره و به صورت قائم است.

$V = \pi r^2 h$ = حجم استوانه

طبق تناسب در مثلث‌های مشابه داریم

$$\frac{12-h}{12} = \frac{r}{5} \Rightarrow h = \frac{60-12r}{5}$$

$$V(r) = \pi r^2\left(\frac{60-12r}{5}\right) = \frac{12}{5}\pi\left(5r^2 - r^3\right) \qquad I = [0,5]$$

طبق قضیه اکسترمم مطلق روی بازه بسته:

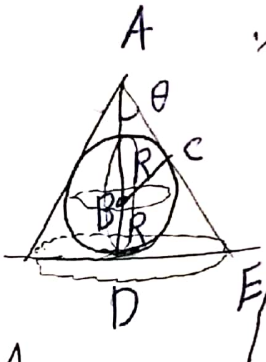
$$V'(r) = \frac{12}{5}\pi\left(10r - 3r^2\right) = 0 \quad \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$V(0) = 0$ و $V(5) = 0$ و $\boxed{V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{400\pi}{9}}$ ماکسیمم مطلق

$\boxed{r = \frac{10}{3} \to h = 4}$ ابعاد استوانه

توجه: می‌توان تابع V را برحسب h نوشت در این صورت $V(h) = \pi h\left(\frac{60-5h}{12}\right)^2$ و $h \in [0,12]$

مثال ۶: حجم کوچکترین مخروط مستدیر قائم محیط بر یک کره با شعاع R را بیابید.

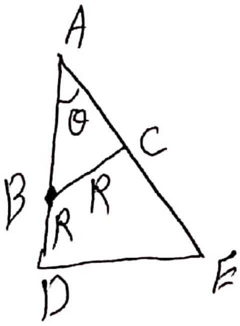


حل:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ = حجم مخروط

h ارتفاع مخروط و r شعاع قاعده مخروط است.

در مثلث قائم‌الزاویه ΔADE داریم: $\boxed{\tan\theta = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{r}{h} \quad (1)}$



در مثلث قائم‌الزاویه ΔABC داریم

$$\tan\theta = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{R}{\sqrt{h^2-2Rh}}$$

$$|AC| = \sqrt{(R-h)^2 - R^2} = \sqrt{h^2-2Rh}$$

طبق ① و ② داریم $\frac{r}{h} = \frac{R}{\sqrt{h^2-2Rh}}$ بنابراین $r = \frac{Rh}{\sqrt{h^2-2Rh}}$.

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h\left(\frac{Rh}{\sqrt{h^2-2Rh}}\right)^2 = \frac{1}{3}\pi R^2\left(\frac{h^2}{h-2R}\right) \qquad I=(2R, +\infty)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi R^2\left[\frac{2h(h-2R)-h^2}{(h-2R)^2}\right] = \frac{1}{3}\pi R^2\left[\frac{h(h-4R)}{(h-2R)^2}\right] = 0 \begin{cases} h=0 & \text{غ ق ق} \\ h=4R \end{cases}$$

نقطه بحرانی

طبق قضیه اکسترمم مطلق روی بازه باز داریم: چون $\lim\limits_{h\to(2R)^+} V(h) = +\infty = \lim\limits_{h\to+\infty} V(h)$

پس می‌نیمم مطلق $V(4R) = \frac{8}{3}\pi R^3$ است

بنابراین $h=4R$ و $r = \frac{4R^2}{\sqrt{16R^2-8R^2}} = \frac{4R}{2\sqrt{2}}$

تمرین

۱) کوتاهترین فاصله بین نقطه $P(2,0)$ و منحنی $y=\sqrt{x}$ را بیابید.

۲) کوتاهترین فاصله نقطه $A(2,\frac{1}{2})$ تا منحنی $y=x^2$ را بیابید.

۳) می‌خواهیم یک استوانه مستدیر قائم را در یک کره به شعاع مفروض محاط کنیم، نسبت ارتفاع به شعاع قاعده استوانه چقدر باشد تا مساحت رویه جانبی استوانه حداکثر ممکن باشد.

۴- می‌خواهیم با یک مقوا مربعی شکل به ضلع ۱۲ سانتی متر یک جعبه سرباز بسازیم. برای این منظور با بریدن چهار گوشه آن مربع کوچکی ببریم و لبه‌های باقی مانده را تا زده تا جعبه ساخته شود. ماکسیمم حجم جعبه‌ای که با این طریق ساخته می‌شود چقدر است؟

۵- مساحت بزرگترین مستطیلی را بیابید که می‌توان آن را در بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ محاط کرد.

۶- ابعاد مستطیلی با بزرگترین مساحت را بیابید که قاعده‌اش روی محور xها باشد و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y=8-x^2$ قرار داشته باشد.

۷- ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید که می‌توان آن را در دایره‌ای به شعاع r محاط کرد.