شوو ینگ تی. لین و یو ـ فنگ. لین

نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن

ترجمهٔ عمید رسولیان

نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن

شووینگ تی. لین و یو ـ فنگ. لین

ترجمهٔ عمید رسولیان

مرکز نشر دانشگاهی

مرکز نشر دانشگاهی
۴۶۲

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۵۳

Set Theory with Applications
Shwu Yeng T. Lin and You-Feng Lin
Second Edition
Mariner Publishing Company, Inc., 1981

نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن
تألیف شووینگ تی. لین، یو ـ فنگ. لین
ترجمهٔ عمید رسولیان
ویراستهٔ دکتر منوچهر وصال
ناظر چاپ: خشایار نصیری‌منش
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۶۸
چاپ سیزدهم ۱۳۸۸
تعداد ۸۰۰۰
لیتوگرافی : وسمه
چاپ و صحافی: نقش نیزار
۶۰۰۰ تومان

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

لین، شووینگ. Lin, ShwuYeng T.
نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن / شوو ینگ تی. لین و یو ـ فنگ. لین؛ ترجمهٔ عمید رسولیان. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.
پنج، ۲۳۷ ص.: مصور، جدول. ــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۴۶۲. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۵۳)

ISBN 978-964-01-0462-0

فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Set theory with applications.
واژه‌نامه.
کتابنامه : ص. [۲۱۸] ـ ۲۱۹.
چاپ سیزدهم: ۱۳۸۸.
۱. نظریهٔ مجموعه‌ها. الف. لین، یو ـ فنگ، ۱۹۳۲ـ ، Lin, You-Feng ب. رسولیان، عمید، مترجم. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان.
۹ن۹۵ل/ QA۲۴۸ ۵۱۱/۳۲۲
۱۳۶۸
کتابخانهٔ ملی ایران ۱۲۱۱ـ۶۸م

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

پیشگفتار

بیش ازشش سال است که از زمان چاپ کتاب مقدمه‌ای بر نظریهٔ شهودی مجموعه‌ها، چاپ قبلی این کتاب، می‌گذرد. درطول این چند سال برنامه‌های ریاضی تغییرهای زیادی کرده و ریاضیات جدید خواهان بیشتری پیدا کرده‌است. در آن زمان در دانشگاه فلوریدای جنوبی فقط دانشجویان ریاضی در کلاسهای درس نظریهٔ مجموعه‌ها حاضر می‌شدند، اما درحال‌حاضر نیمی ازکلاس از دانشجویـان دانشکدهٔ مهندسی، بخصوص مهندسی برق وعلوم کامپیوتر تشکیل می‌شود. بنابراین تصمیم گرفتیم کـه فصل جدیدی دربارهٔ جبر بول وکاربرد آن در طراحی مدارهای منطقی وشبکه‌های مدارهای رقمی به‌کتاب بیفزاییم. این فصل جدید ارائهٔ کاربردهای عملی فصلهای قبلی منطق ومجموعه‌هاست. چون این فصل به‌هیچ‌گونه زمینهٔ قبلی مهندسی نیاز ندارد، امید داریم که دانشجوی غیرمهندسی نیز از دیدن‌کاربردهای موضوعی نظری، همچون نظریهٔ مجموعه‌ها، درتکنولوژی مدرن لذت ببرد.

بدون شك، ارائهٔ نظریهٔ مجموعه‌هـا درچارچوب یك دستگاه اصل موضوعی ازنظر دقت، بیشتر رضایتبخش است. امـا هیچ نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌هـا نیست که برای دانشجویان مبتدی آسان باشد. بدین‌جهت روش شهودی را برای عرضهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها به‌کار بردیم.

بـه‌علاوه سعی کرده‌ایم آنچه راکـه برای فهم مطالب لازم است درکتاب بیاوریم. مواد اصلی لازم برای دانشجویانی کـه می‌خواهند درسهـایی نظیر جبر مدرن، آنـالیز، توپولوژی وغیره بخوانند، درکتاب آورده شده‌است. اما امید داریم که خود مباحث کتاب، نظر معلم و دانشجو را جلب کند. جای تأسف خواهد بود اگر مشاهده شود که به موضوع جالبی همچون نظریهٔ مجموعه‌ها، تنها به‌عنوان پیشنیازی برای درسهای دیگر توجه می‌شود.

یکی از پیشنیازهای این کتاب، آشنایی با ریاضیات دبیرستانی است، اما به‌مهارت زیاد در ریاضیات نیازی نیست. بهتر است خواننده با یك درس حساب دیفرانسیل وانتگرال سه ماهه یا نیمساله آشنا شده‌باشد. تمام کتاب برای تدریس یك درس نیمساله یا دو درس سه ماهه در نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها درسطح دورهٔ کارشناسی نوشته شده‌است. بـا حذف چند فصل آخر، می‌تـوان ازکتاب برای یك درس سه مـاهه یـا یك درس کوتاه تابستانی

استفاده کرد. پیشنهاد می‌کنیم که مدرس، دوفصل اول را سریعتر و فصلهای بعدی را با تأمل بیشتری تدریس کند.

درچاپ جدید اشتباههای کوچك و برخی ابهامات موجود درچاپ قبلی، تصحیح شده است. مسائل تمرینی بیشتری درسطحی وسیعتر و متنوعتر نیز آورده شده است*.

شووینگ تی-لین
یوفنگ-لین
تمپل تراس، فلوریدا

* قسمتی که درپایان پیشگفتار مؤلف به‌تشکر از اشخاص و مؤسسهٔ انتشاراتی پرداخته ترجمه نشده است.-م.

۱

منطق مقدماتی

دراین فصل مطالبی ازمنطق ریاضی‌که برای مطالعهٔ بقیهٔ فصلهای کتاب لازم است، ارائه می‌شود.

۱. گزاره‌ها و رابطهای آنها

منطق بررسی اصول و روشهایی است‌که برای تمیزدادن استدلالهای درست از استدلالهای نادرست به‌کار می‌روند. منظور ما از این فصل مقدماتی منطق این است‌که خواننده را به‌اصول و روشهایی‌که درهر مرحلهٔ برهان به‌کار می‌رود آشنا سازیم.

منطق با لغت «گزاره» که به‌معنای خاصی به‌کار می‌رود شروع می‌شود. منظور ما از گزاره، یك جملهٔ خبری است‌که یا راست است یا دروغ ولی هم راست وهم دروغ نیست. لازم نیست بدانیم‌که گزاره راست است یا دروغ، بلکه فقط‌کافی است بدانیم‌که تنها دارای یکی‌ازاین دو ارزش* است. معمولاً به‌آسانی دیده می‌شودکه‌گزاره راست است یا دروغ، اما دربعضی موارد تعیین ارزش‌گزاره مستلزم‌کمی دقت است، و درمواردی ممکن است تعیین ارزش آن محال باشد. مثالهای زیرین مطلب را روشن می‌کنند.

---

* اگرگزاره راست‌باشد می‌گوییم ارزش راستی‌گزاره راست و اگر دروغ باشد می‌گوییم ارزش راستی آن دروغ است.ـم.

مثال ۱. هریك از عبارتهای زیر یك گزاره است.

(الف) شیراز شهری دراستان فارس است.

(ب) ۱+۲ برابر ۵ است.

(ج) صدوپنجمین رقم اعشاری $\sqrt{۳}$، ۷ است.

(د) ماه از پنیر آبی به‌وجود آمده است.

(ه) درمریخ جاندار با شعور وجود ندارد.

(و) هوا بارانی است.

بدیهی است که (الف) راست است درحالی که (ب) و (د) دروغ هستند. ارزشهای (ج) و (ه) (راست یا دروغ) برما معلوم نیستند، اما این تنها به‌خاطر نقص معلومات ماست. پس (ج) و (ه) نیز گزاره هستند. درستی یا نادرستی (و) به‌وضعیت هوا در زمانی که این گزاره گفته می‌شود بستگی دارد.

مثال ۲. هیچ‌کدام از عبارتهای زیر گزاره نیستند، زیرا این سؤال که آنها راست یا دروغ هستند مفهومی ندارد.

(الف) به‌مهمانی ما بیا!

(ب) آسمان غنی است.

(ج) حال شما چطور است؟

(د) خدا حافظ، عزیزم.

گزاره‌هایی که درمثال ۱ عنوان شدند، همگی گزاره‌های ساده هستند. ترکیبی از چند گزارهٔ ساده را یك گزارهٔ مرکب می‌نامیم. به‌عنوان مثال «۱+۲ برابر ۵ است و صدوپنجمین رقم اعشاری $\sqrt{۳}$، ۷ است» یك گزارهٔ مرکب است.

درجبر با استفاده ازحروف برای نمایش اعداد آشنا شده‌ایم. درمنطق حروف نظیر p، q، r، ... را برای نمایش گزاره‌ها به‌کار می‌بریم. حرفی مانند p ممکن است نمایانگر یك گزارهٔ ساده یا یك گزارهٔ مرکب باشد، ولی معمولاً ما حروف P، Q، R، ... را به‌عنوان گزارهٔ مرکب به‌کار می‌بریم، مگر اینکه خلاف آن را قید کنیم.

برای ربط‌دادن گزاره‌هایی چون p، q، r، ... جهت تشکیل گزاره‌های مرکب راههای زیادی وجود دارد. ما فقط پنج رابط راکه زیاد به‌کار می‌روند دراینجا ذکر می‌کنیم. این پنج رابط عبارت‌اند از: (الف) «نفی» که با $\sim$ نمایش داده می‌شود؛ (ب) «و» که با $\wedge$ نمایش داده می‌شود؛ (ج) «یا» که با $\vee$ نمایش داده می‌شود؛ (د) «اگر... آنگاه...» که با $\rightarrow$ نمایش داده می‌شود؛ وبالاخره (ه) «... اگر وتنها اگر ...» که با $\leftrightarrow$ نمایش داده می‌شود.

دراین بخش دو نماد $\sim$ و $\wedge$ را بررسی کرده ومطالعهٔ نمادهای $\vee$، $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ را به‌بخش بعد موکول می‌کنیم.

گیریم p یك گزاره باشد. آنگاه گزارهٔ $\sim p$، بخوانید «نفی p» یا «نقیض p»، راست است هرگاه p دروغ باشد و دروغ است هرگاه p راست‌باشد. به‌عنوان مثال، اگر p گزارهٔ «این درس آسانی است» باشد، نقیض آن، $\sim p$، گزارهٔ «این درس آسانی نیست» یا «چنین نیست که این درس آسانی است» می‌باشد.

ارزش $\sim p$ بستگی به‌ارزش p دارد. مناسب است که این بستگی را به‌صورت جدول ارزش زیر نمایش دهیم

جدول ۱

p	$\sim p$
T	F
F	T

که در آن «T» و «F» به‌ترتیب به‌جای «راست» و «دروغ» آمده‌اند*. درستون اول جدول ۱ دو ارزش ممکن یعنی T یا F را برای گزارهٔ p نوشته‌ایم. هر ردیف جدول ارزش بیانگر حالتی است که باید درنظر گرفته شود و البته دراین وضعیت بسیارساده تنها دوحالت وجود دارد. با استفاده از ردیفهای جدول ۱ می‌بینیم که اگر p راست باشد $\sim p$ دروغ است و اگر p دروغ باشد، $\sim p$ راست است. بنابراین جدول ۱ ارزش گزارهٔ $\sim p$ را درهر حالت بیان می‌کند.

تعریف ۱. رابط $\wedge$ را می‌توان بین هردو گزارهٔ p و q قرار داد وگزارهٔ مرکب $p\wedge q$ را، که ارزشهای آن درجدول ارزش زیر آمده‌اند، تشکیل داد.

جدول ۲

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

عبارت $p\wedge q$ را «p و q» یا «ترکیب عطفی p و q» می‌خوانیم. مثلاً، گیریم p گزارهٔ «آسمان آبی است» و q گزارهٔ «گل سرخ قرمز است» باشد. آنگاه گزارهٔ عطفی

* T حرف اول true به‌معنی راست و F حرف اول false به‌معنی دروغ است.ـم.

$p \wedge q$، عبارت «آسمان آبی است وگل سرخ قرمز است» می‌باشد. دریك گزارهٔ مرکب، مانند $p \wedge q$، هریك ازگزاره‌های p و q را مؤلفه گویند. مؤلفه ممکن است یك گزارهٔ ساده یا یك گزارهٔ مرکب باشد. درگزاره‌های مرکب با دومؤلفه، مانند $p \wedge q$، حداکثر $(۲ \times ۲ =)۴$ حالت وجود دارد، که حالتهای منطقی یا امکانهای منطقی نامیده می‌شوند و در زیر می‌آیند:

(۱) p راست و q راست است.
(۲) p راست و q دروغ است.
(۳) p دروغ و q راست است.
(۴) p دروغ و q دروغ است.

در واقع، هریك ازچهار حالت بالا، یك ردیف ازجدول ۲ است. ستون آخر جدول، ارزش $p \wedge q$ را بیان می‌کند. باکمی دقت دیده می‌شودکه گزارهٔ $p \wedge q$ فقط دریك حالت راست است وآن وقتی است که p و q هردو راست باشند، و دربقیهٔ موارد، $p \wedge q$ دروغ است. خوانندهٔ متفکر متوجه می‌شود که این جدول ارزش در واقع روش استفادهٔ عاطف «و» در محاورات روزانه را منعکس می‌کند.

با استفاده از جدولهای ۱ و ۲ می‌توان ارزش گزاره‌های پیچیده‌تری راکه فقط شامل رابطهای $\sim$ و $\wedge$ هستند، معلوم کرد.

مثال ۳. جدول ارزش گزارهٔ مرکب زیر را تشکیل دهید.

$$\sim[(\sim p)\wedge(\sim q)]$$

حل:

جدول ۳

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p)\wedge(\sim q)$	$\sim[(\sim p)\wedge(\sim q)]$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F
مرحله		۱	۱	۲	۳

اگر روش تشکیل جدول بالا برای شما واضح نیست به‌توضیحی که در زیر می‌آید توجه‌کنید: عنوانهای ستونها طوری انتخاب شده‌اندکه گزارهٔ مرکب موردنظر به‌تدریج از

مؤلفه‌هایش (درستون آخر) ساخته شود. در دوستون اول صرفاً ارزشهای p و q را برای تمام حالات ممکن ثبت کرده‌ایم. سپس با استفاده از جدول ۱ در ستونهای سوم و چهارم ارزشهای $\sim p$ و $\sim q$ متناظر را نوشته‌ایم. در ستون پنجم، ارزشهای ترکیب عطفی عنوانهای ستونهای سوم و چهارم را با استفاده ازجدول ۲ نمایانده‌ایم و بالاخره درستون ششم ارزشهای نقیض ستون پنجم، یعنی ارزشهای گزارهٔ اصلی $\sim[(\sim p)\wedge(\sim q)]$ را با استفاده از جدول ۱ نوشته‌ایم. اکنون به‌دانشجو توصیه می‌شود ازگزارهٔ مرکب اخیر صورت برداشته کتاب را ببندد وسعی کند این جدول ارزش را خود تشکیل دهد.

درگزارهٔ مثال بالا، $\sim[(\sim p)\wedge(\sim q)]$، از پرانتزها وکروشه‌ها برای نشان‌دادن ترتیبی که رابطها عمل می‌کنند استفاده شده‌است. اغلب هرجا امکان داشته باشد برطبق قراردادهایی برای ساده‌کردن عبارات، پرانتزها یاکروشه‌ها را حذف می‌کنیم. قرارداد معمول آن است که توافق کنیم $\sim$ مقدم بر $\wedge$ است؛ یعنی رابط $\sim$ اول برگزاره تأثیرکند بعد $\wedge$. به عنوان مثال عبارت $(\sim p)\wedge(\sim q)$ را می‌توان به صورت سادهٔ $\sim p\wedge\sim q$ نوشت.

تمرین ۱۰۱

در مسائل ۱ تا ۱۰ یك جملهٔ فارسی داده شده‌است. درهرکدام تعیین کنیدکه جمله، گزاره است یا نیست.

۱. در ۷ ژانویه ۱۴۴۲، درقسمتی از فلوریدا برف بارید.

۲. ارسطو پاهای پهنی داشت.

۳. جامعه‌گرایی خطاست.

۴. ثروتمندترین مرد دنیا آقای هانت درتگزاس است.

۵. علی وجمشید بچه‌های خوبی هستند.

۶. این ماشین چقدر می‌ارزد؟

۷. روی چمن راه نروید.

۸. همیشه کمربند صندلی‌تان را محکم ببندید.

۹. عدد $۲^{۹۸۷۶۵۴۳۲۱}+۳۷$ یك عدد اول است.

۱۰. بعضی از موسیقیهای شوپن را بتهوون نوشته است.

۱۱. درگزاره‌های مسائل ۱ تا ۱۰ ارزش آنهایی را که می‌دانید راست است با T نشان دهید وجلوی آنهایی که تعیین ارزششان برایتان مشکل است D بگذارید.

درمسائل ۱۲ تا ۱۹ ارزش راستی هریك ازگزاره‌ها را تعیین کنید. برای آنهایی که دوحالت دارند. ازجدول ۱ وبرای آنهایی که چهار حالت دارند ازجدول ۲ استفاده کنید.

۱۲. $\sim(\sim p)$

۱۳. $\sim[\sim(\sim p)]$

۱۴. $p\wedge p$

۱۵. $\sim(p\wedge\sim p)$

۱۶. $p \wedge \sim q$

۱۷. $\sim p \wedge q$

۱۸. $(p \wedge q) \wedge \sim p$

۱۹. $\sim (p \wedge q)$

۲۰. در یك گزارهٔ مرکب که شامل سه گزارهٔ p، q و r است، چند حالت منطقی باید درنظر گرفت؟ اگر چهار گزارهٔ متفاوت داشته‌باشیم، چند حالت؟ درحالت کلی وقتی n گزارهٔ متفاوت داریم، چند حالت لازم است؟

۲۱. در شکل زیر کوشش شده‌است حالتهای مختلف یك گزارهٔ مرکب متشکل از سه مؤلفهٔ p، q و r تنظیم شود. این جدول ناتمام را کامل کنید:

p	q	r	
T	T		
T	T	F	
T		T	
T		F	
	T	T	
	T	F	
F	F		
	F	F	

در مسائل ۲۲ تا ۲۵، جدول ارزش هریك از گزاره‌ها را تشکیل دهید. از الگوی تمرین ۲۱ برای تشخیص حالتهای مختلف استفاده‌کنید.

۲۲. $(p \wedge q) \wedge r$

۲۳. $p \wedge (q \wedge r)$

۲۴. $(p \wedge \sim q) \wedge r$

۲۵. $\sim q \wedge (r \wedge p)$

۲. سه نماد دیگر

در زبان فارسی وقتی درجمله «یا» به‌کار می‌رود ابهامی وجود دارد. گزارهٔ «من درجهٔ فوق‌لیسانس یا دکترا را دریافت می‌کنم.» به‌این معنی است که امکان دارد گوینده هردو درجهٔ فوق‌لیسانس و دکترا را دریافت کند*. اما درگزارهٔ دیگر «من با مریم یا ناهید ازدواج می‌کنم.» حرف «یا» این معنی را می‌دهدکه فقط یکی از این دو دختر انتخاب خواهد شد**. در ریاضیات ومنطق، نمی‌توانیم ابهام داشته‌باشیم. لذا باید روی‌معنی حرف «یا» تصمیم بگیریم.

* این «یا» را «یای شمول» (inclusive disjunction) یا «یای منطقی» می‌نامند.ـم.

** این «یا» را «یای مانع جمع» (exclusive disjunction) می‌نامند.ـم.

تعریف ۲. رابط $\vee$ مابین دوگزارهٔ p و q برای تشکیل گزارهٔ مرکب $p \vee q$ به‌کارمی‌رود. ارزشهای راستی $p \vee q$ در جدول ۴ نشان داده شده‌است. بنابراین رابط $\vee$ به‌معنای «یای شمول» یعنی به‌معنای «یا»ی در گزارهٔ اول بالاست.

جدول ۴

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

نماد $p \vee q$ را «p یا q» یا «ترکیب فصلی p و q» بخوانید. توجه‌کنیدکه ترکیب عطفی p و q راست است تنها وقتی که هر دومؤلفه راست‌باشند (جدول ۲)، درصورتی که ترکیب فصلی دروغ است تنها وقتی که هر دومؤلفه دروغ باشند (جدول ۴).

بامقایسهٔ جدولهای ارزش گزاره‌های $(\sim p \wedge \sim q)\sim$ و $p \vee q$ (جدولهای ۳ و ۴) درمی‌یابیم‌که ستون آخر هر دوجدول $TTTF$ است، پس ارزش راستی این دو گزاره در هریك از چهار امکان منطقی،یکی است. تعیین اینکه برخی گزاره‌ها درهرحالت یك ارزش راستی دارند، بخش مهمی ازمنطق است. در واقع، منطق این گزاره‌ها را صورتهای مختلف یك گزاره به‌حساب می آورد.

تعریف ۳. هرگاه دوگزارهٔ P و Q، ساده یا مرکب، برای‌تمام حالتهای منطقی دارای یك ارزش باشند، گزارهٔ P را هم‌ارز منطقی یا به طور ساده هم‌ارز Q گویند، و می نویسند $P \equiv Q$.

خلاصهٔ‌کلام اینکه، دوگزاره منطقاً هم‌ارز هستند هرگاه دارای یک جدول ارزش باشند. بنابراین داریم

$$p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$$

اگرچه تا جایی که به‌منطق مربوط می‌شود، دو گزارهٔ منطقاً هم‌ارزیکی درنظر گرفته می‌شوند، اما گزارهٔ ساده‌تر «p یا q» را بر گزارهٔ هم‌ارز پیچیده‌ترش، یعنی «چنین نیست‌که نه p و نه q» ترجیح می‌دهیم.

تعریف ۴. رابط $\rightarrow$ راکه مابین دوگزارهٔ p و q برای تشکیل گزارهٔ مرکب $p \rightarrow q$ به‌کار برده می‌شود، رابط شرطی می گویند (بخوانید: «اگر p آنگاه q»). بنابرتعریف،

گزارهٔ $p \rightarrow q$ هم‌ارز گزارهٔ $\sim(p \wedge \sim q)$ است. ارزشهای راستی $p \rightarrow q$ درجدول ۵ نشان داده شده است.

جدول ۵

حالت	p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q [\equiv \sim(p \wedge \sim q)]$
۱	T	T	F	F	T
۲	T	F	T	T	F
۳	F	T	F	F	T
۴	F	F	T	F	T

بجاست به‌یك انگیزهٔ تعریف ۴ اشاره‌کنیم. فرض‌کنید p گزارهٔ «هوا بارانی‌است» و q گزارهٔ «من به‌شما سواری خواهم داد» باشد. حال گزارهٔ مرکب $p \rightarrow q$، «اگر هوا بارانی باشد آنگاه من به‌شما سواری خواهم داد» است. ازنظر ما این قرار (گزاره) چه وقت نقض شده (دروغ) است؟ بدیهی است‌که این قرار فقط درحالتی‌که هوا بارانی‌باشد (p راست باشد) ومن به شما سواری ندهم (q دروغ باشد) نقض شده‌است. یعنی ستون نهایی جدول ارزش $p \rightarrow q$، بجز درحالت ۲، باید درهر حالتی ارزش «T» داشته‌باشد.

برطبق تعریف ۴، معنی گزارهٔ شرطی $p \rightarrow q$ اساساً با طرزی‌که گزارهٔ «اگر p آنگاه q» را درمحاورهٔ عادی به‌کار می‌بریم اختلاف دارد. در زبان عادی[1] جمله‌ای به‌صورت «اگر p آنگاه q» به‌این مفهوم است‌که هروقت p راست باشد، q راست‌است. بنابراین حالتهایی‌که p دروغ است مطرح نمی‌شوند.

به عنوان مثال، گزارهٔ «اگر لینکلن، گرانت را می‌کشت، آنگاه جفرسون اولین رئیس جمهور بود» بی‌معنی تلقی می‌شود، زیرا هر دومؤلفه دروغ هستند. درنتیجه در گفتگوی عادی ارزش راستی چنین‌گزاره‌ای بررسی نمی‌شود. اما برای ایجاد یك زبان صوری، منطقیون خواستار تعیین ارزشهای راستی‌گزارهٔ $p \rightarrow q$ درهر چهارحالت منطقی هستند، هرچند که در زبان عادی دوحالت از چهار حالت فوق بی‌معنی به‌نظر برسد. بنابردلایل‌گوناگونی، که به موقع خود گفته خواهند شد، منطقیون روی تعریفی‌که دربالا آمد، توافق کرده‌اند. بنابراین در زبان صوری گزارهٔ $p \rightarrow q$ در هرحالتی راست است بجز حالت ۲ (به‌جدول ۵ نگاه‌کنید). به‌عنوان یك نتیجهٔ این توافق می‌توانیم چند قضیهٔ ساده ومفید را ثابت‌کنیم. بدون یك چنین قراردادی، برهانها یا خیلی مشکل می‌شدند یا زشت و ناهنجار[2].

اکنون آخرین رابط ازاین پنج رابط راکه درصورت قضیه‌های ریاضی به‌فراوانی به‌کار می‌رود، معرفی می‌کنیم.

۱. درمقابل «زبان عادی» منطق را یك زبان صوری می‌گویند.

۲. مثلاً قضیه‌های ۱ و ۷ فصل ۲ را ببینید.

تعریف ۵. رابط $\leftrightarrow$ را رابط دوشرطی می‌گویند. ترکیب دوشرطی دو گزارهٔ p و q را به‌صورت $p \leftrightarrow q$ می‌نویسند (بخوانید: p اگر وفقط اگر q یا بخوانید: p اگر وتنها اگر q). گزارهٔ $p \leftrightarrow q$ هم‌ارز گزارهٔ مرکب $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ تعریف می‌شود. ارزشهای راستی $p \leftrightarrow q$ درجدول ۶ آمده است.

مثال ۴. جدول ارزش $p \leftrightarrow q$ را بیابید.

حل: با روشی که پیش ازاین شرح دادیم جدول ۶ را تشکیل می‌دهیم.

جدول ۶

حالت	p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q [\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
۱	T	T	T	T	T
۲	T	F	F	T	F
۳	F	T	T	F	F
۴	F	F	T	T	T
مرحله			۱	۱	۲

ازجدول ارزش بالا درمی‌یابیم که $p \leftrightarrow q$ وقتی راست است که هر دومؤلفه راست یا هر دومؤلفه دروغ باشند. درهرحالت دیگر (حالتهای ۲ و ۳) گزارهٔ $p \leftrightarrow q$ دروغ است.

تمرین ۲.۱

درمسائل ۱ تا ۱۲ جدول ارزش گزاره‌های داده شده را تشکیل دهید.

۱. $p \vee \sim p$

۲. $\sim (p \vee \sim p)$

۳. $\sim (\sim p \vee \sim p)$

۴. $\sim p \vee q$

۵. $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$

۶. $q \leftrightarrow p$

۷. $p \wedge (q \vee r)$

۸. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

۹. $p \vee (q \wedge r)$

۱۰. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

۱۱. $(p \vee q) \vee r$

۱۲. $p \vee (q \vee r)$

۱۳. آیا گزارهٔ $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$ (مسئلهٔ ۵) هم‌ارز منطقی گزارهٔ $p \rightarrow q$ است؟

۱۴. آیا گزارهٔ $\sim p \vee q$ (مسئلهٔ ۴) هم‌ارز منطقی گزارهٔ $p \rightarrow q$ است؟

۱۵. از گزاره‌های مسائل ۱ تا ۱۲، تعیین کنید کدام گزاره‌ها هم‌ارز منطقی هستند.

۱۶. درهریك از حالتهای زیر، گزاره‌های مرکب داده شده را با استفاده از نمادهای پیشنهادی، به‌صورت نمادی برگردانید.

(الف) چنین نیست که من با شما مهربان نیستم. (M)

(ب) اگر او فرشته است، آنگاه او دو بال دارد. (F, B)

(ج) قیمت گوشت افزایش می‌یابد اگر وتنها اگر عرضه ازتقاضای گوشت کمتر باشد. (G, A)

(د) یا کشاورزان قیمتها را پایین خواهند آورد یا دولت دخالت خواهد کرد. (K, D)

(ه) اگر صادرات گوشت افزایش یابد یا پرورش دام زیاد نشود، آنگاه قیمتها افزایش می‌یابد. (S, P, G)

۱۷. گاهی اوقات $q \leftrightarrow p$ را «p فقط اگر q» می‌خوانند. هریك ازگزاره‌های زیرین را با استفاده ازنمادهای پیشنهادی به‌صورت نمادی برگردانید.

(الف) دراین درس موفق خواهم شد فقط اگر مجدانه تلاش کنم. (D, T)

(ب) تابع مشتق دارد فقط اگر پیوسته باشد. (M, P)

(ج) ماتریس وارون دارد فقط اگر دترمینانش صفر نباشد. (V, D)

(د) ماتریس دترمینان ناصفر دارد فقط اگر وارون داشته باشد. (D, V)

۱۸. درگزارهٔ $p \rightarrow q$، p را شرط کافی برای q و q را شرط لازم برای p می‌گویند. گزاره‌های (الف) تا (د) مسئلهٔ ۱۷ را نخست با بیان «شرط کافی» و سپس با بیان «شرط لازم» بنویسید.

۱۹. آیا $\sim (p \leftrightarrow q)$ هم‌ارز منطقی $p \leftrightarrow \sim q$ است؟ نتیجه‌گیری خود را با تشکیل جدول ارزش بیازمایید.

۲۰. آیا $\sim p \leftrightarrow q$ هم‌ارز منطقی $p \leftrightarrow \sim q$ است؟

۲۱. اگریك گزارهٔ مرکب‌متشکل‌از گزاره‌های سادهٔ p و q، جدول‌ارزش زیر را داشته‌باشد:

p	q	?
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

آیا می‌توانید گزارهٔ مرکب را بیابید؟

۳. راستگو، استلزام، و هم‌ارزی

حال جدول ارزش گزارهٔ $p \vee \sim p$ را بررسی می‌کنیم:

جدول ۷

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

می‌بینیم که گزارهٔ $p \vee \sim p$ درهرحالت، یعنی درتمام حالات منطقی، راست است. این نوع گزارهٔ مهم شایستهٔ نامی ویژه است.

تعریف ۶. گزاره‌ای‌که درتمام حالات منطقی راست باشد، راستگو نامیده می‌شود.

دوگزارهٔ مرکب یا سادهٔ P و Q مفروض‌اند. اگرگزارهٔ شرطی $P \to Q$ راستگو باشد، استلزام نامیده می‌شود و آن را بـا $P \Rightarrow Q$ نمایش می‌دهند (بخوانید: P مستلزم Q است یـا بگویید Q از P لازم می‌آیـد). بنابراین، گزاره‌های شرطی زیـر همگی استلزام هستند:

(۱) $p \to p$.

(۲) $p \wedge q \to q \wedge p$.

(۳) $p \to p \wedge p$.

(۴) $p \wedge q \to q$.[۱]

درمنطق یـا ریاضیات، «قضایا» به‌معنی گزاره‌های راست هستند، و «برهان» (قضیه) اثبات درستی آن است.

قضیهٔ ۱. گیریم p و q دوگزاره هستند. آنگاه قوانین زیر برقرارند:

(الف) قانون جمع: $p \Rightarrow p \vee q$.

(ب) قانون اختصار: $p \wedge q \Rightarrow p$، $p \wedge q \Rightarrow q$.

(ج) رفع مؤلفه: $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$.

برهان. برهان (الف) و (ب) را به‌عنوان‌تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم. جدول ارزش اختصاری برای $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ در زیر آمده‌است:

---

۱. فرض می‌کنیم کـه $\wedge$ و $\vee$ بیش از $\to$ و $\leftrightarrow$ گزاره‌ها را بهم ربط می‌دهند و بنابراین مثلاً به‌جای $p \to (p \vee q)$ می‌نویسیم $p \to p \vee q$. به پاراگراف آخر بخش ۱ نیز رجوع کنید.

جدول ۸

$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim p$	$\rightarrow$	q	
T	T	T	F	F	T	T	
T	T	F	F	F	T	F	
F	T	T	T	T	T	T	
F	F	F	F	T	T	F	
۱	۲	۱	۳	۲	۴	۱	مرحله

حال طرز تشکیل جدول ارزش اختصاری را در چندکلمه شرح می‌دهیم، ارزشهای راستی درجدول ۸، ستون به‌ستون، به‌ترتیب شماره‌هایی‌که درپایین جدول دیده می‌شوند، نوشته شده‌است. در یك جدول ارزش اختصاری، نخست ارزشهای راستی را مستقیماً زیر هرمؤلفه، وسپس زیر رابطها می‌نویسیم. با این‌روش هم در زمان و هم در جا صرفه‌جویی می‌شود.

اکنون، به‌برهان قضیه بازمی‌گردیم. چون مرحلهٔ آخری (مرحله چهارم) در جدول ۸، فقط شامل T است، گزارهٔ شرطی $(p\wedge q)\vee\sim p \rightarrow q$ یك استلزام است.

گزارهٔ دوشرطی $P\leftrightarrow Q$ اگـر راستگو باشد، هم‌ارزی نامیده می‌شود و آن را با $P \Longleftrightarrow Q$ نشان می‌دهند (بخوانید: P هم‌ارز Q است).

ازتعریف ۵ و جدول ۶، دیده می‌شودکه $P \Longleftrightarrow Q$ ، به‌شرط اینکه درتمام حالات منطقی، P و Q یك ارزش راستی داشته‌باشند، و برعکس، اگر P و Q در تمام حالات منطقی یك‌ارزش‌راستی داشته باشند، آنگاه $P \Longleftrightarrow Q$. پس، بنابرتعریف ۳، $P \Longleftrightarrow Q$ و $P\equiv Q$ یك معنی دارنـد، و از این‌رو می‌توانیم $\Longleftrightarrow$ و $\equiv$ را به‌جـای یکدیگر به‌کار بریم.

قضیهٔ ۲. گیریم p و q دوگزاره هستند. آنگاه

(الف) قانون نفی مضاعف: $\sim(\sim p)\equiv p$

(ب) قانون جابه‌جایی: $p\wedge q\equiv q\wedge p$ ، $p\vee q\equiv q\vee p$

(ج) قانون خودتوانی: $p\wedge p\equiv p$ ، $p\vee p\equiv p$

(د) قانون عکس نقیض: $(p\rightarrow q)\equiv(\sim q\rightarrow\sim p)$

برهان. برهان قسمتهای (الف)، (ب)، (ج) را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگـذار می‌کنیم و اصول برهان (د) را ارائه می‌دهیم.

جدول ارزش اختصاری زیر برای گزارهٔ دوشرطی $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$:

جدول ۹

	$(p$	$\to$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim q$	$\to$	$\sim p)$
	T	T	T	T	F	T	F
	T	F	F	T	T	F	F
	F	T	T	T	F	T	T
	F	T	F	T	T	T	T
مرحله	۱	۲	۱	۴	۲	۳	۲

نشان می‌دهد که $p \to q$ با $\sim q \to \sim p$ هم‌ارز است.

قضیهٔ زیر، که به اوگاستس دمورگن* منسوب است، یکی از مناسبترین ابزارها در منطق است.

قضیهٔ ۳. (قانون دمورگن). فرض‌کنیم p و q دو گزاره هستند. آنگاه

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

و

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

برهان. ما قسمت اول این قضیه را ثابت می‌کنیم و قسمت دیگر را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. جدول ارزش اختصاری زیر برای گزاره دوشرطی $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$:

جدول ۱۰

	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p$	$\vee$	$\sim q)$
	F	T	T	T	T	F	F	F
	T	T	F	F	T	F	T	T
	T	F	F	T	T	T	T	F
	T	F	F	F	T	T	T	T
مرحله	۳	۱	۲	۱	۴	۲	۳	۲

* Augustus De Morgan (1806-1871)

نشان می‌دهد که $\sim(p\wedge q)$ با $\sim p\vee\sim q$ هم‌ارز است.

قضیهٔ ۴. فرض می‌کنیم p، q و r گزاره هستند. آنگاه

(الف) قانون شرکت‌پذیری: $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

$$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$$

(ب) قانون پخش‌پذیری: $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$$

(ج) قانون تعدی: $(p\to q)\wedge(q\to r)\equiv(p\to r)$

برهان. برهانهای قانونهای شرکت‌پذیری و دومین قانون پخش‌پذیری را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

ثابت کنیم که $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$. چون این گزاره شامل سه‌مؤلفه است، $۸=۲^۳$ حالت منطقی وجود دارد که باید در نظر گرفته شود. جدول ارزش زیر نشان می‌دهد که $p\wedge(q\vee r)$ و $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ در هریك از هشت حالت منطقی دارای یك ارزش راستی هستند. بنابراین $p\wedge(q\vee r)$ و $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ هم‌ارزند.

جدول ۱۱

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

برای صرفه‌جویی در وقت و جا، یك جدول ارزش اختصاری همان‌گونه که درجدول ۸ معرفی شد، برای $(p\to q)\wedge(q\to r)\to(p\to r)$ تشکیل می‌دهیم.

جدول ۱۲

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\rightarrow$	$r)$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$r)$	
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F	
T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	
T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F	
F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	
F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F	
F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T	
F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	
۱	۲	۱	۳	۱	۲	۱	۴	۱	۲	۱	مرحله

چون مرحلهٔ آخر (مرحلهٔ ۴) فقط از T تشکیل شده‌است، قانون تعدی ثابت شده‌است.

بنا بر قانون شرکت‌پذیری، در

$$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r) \quad \text{و} \quad (p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$$

به‌پرانتزها نیازی‌نیست وعبارات $p\wedge q\wedge r$ و $p\vee q\vee r$ وهمچنین $p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n$ و $p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_n$ معانی مشخصی دارند.

قضیهٔ ۵. گیریم p ، q ، r ، و s گزاره هستند. آنگاه

(الف) قیاس ذوالوجهین موجب

$$(p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s)\Rightarrow(p\vee r\rightarrow q\vee s)$$

$$(p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s)\Rightarrow(p\wedge r\rightarrow q\wedge s)$$

(ب) قیاس ذوالوجهین منفی

$$(p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s)\Rightarrow(\sim q\vee\sim s\rightarrow\sim p\vee\sim r)$$

$$(p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s)\Rightarrow(\sim q\wedge\sim s\rightarrow\sim p\wedge\sim r)$$

برهان. برهان قضیهٔ ۵ به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۶. فرض‌کنید p و q گزاره هستند. آنگاه

(الف) قیاس استثنایی $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

(ب) قیاس دفع $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

(ج) برهان خلف $(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q \rightarrow q \wedge \sim p)$

برهان. برهان به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

تمرین ۳۰۱

۱. قسمتهای (الف) و (ب) قضیهٔ ۱ را ثابت کنید.

۲. قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) قضیهٔ ۲ را ثابت کنید.

۳. ثابت کنید که $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

۴. قسمت (الف) قضیهٔ ۴ را ثابت کنید.

۵. ثابت کنید که $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

۶. ثابت کنید که $(p \rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$.

۷. ثابت کنید که $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.

۸. با استفاده ازقانون دمورگن، نقیض گزارهٔ «این تابع مشتق دارد یا من احمق هستم» را به‌زبان عادی بنویسید.

۹. قوانین دمورگن را برای سه‌مؤلفه ثابت کنید

(الف) $\sim (p \wedge q \wedge r) \equiv \sim p \vee \sim q \vee \sim r$

(ب) $\sim (p \vee q \vee r) \equiv \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

۱۰. آیا، بدون اثبات، می‌توانید قوانین دمورگن را برای n مؤلفه تعمیم دهید؟ مسئلهٔ ۹ برای $n = ۳$ را ببینید.

۱۱. قوانین جذب زیر را ثابت کنید.

(الف) $p \wedge (p \vee r) \equiv p$

(ب) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

۱۲. قضیهٔ ۵ را ثابت کنید.

۱۳. قضیهٔ ۶ را ثابت کنید.

۱۴. آیا $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$ هم‌ارز منطقی $(p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ است؟

۱۵. آیا $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ هم‌ارز منطقی $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$ است؟

۱۶. ثابت کنید $(p \vee q) \wedge \sim p$ هم‌ارز منطقی $q \wedge \sim p$ است.

۱۷. ثابت کنید $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ هم‌ارز منطقی $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ است.

در هر کدام از مسائل ۱۸ الی ۲۰، ستون آخر جدول ارزش یك گزارهٔ مجهول شامل گزاره‌های ساده p ، q و r داده شده‌است. این گزارهٔ مرکب را پیدا کنید.

۱۸. $TFFFFFFF$.

۱۹. $FFFFFFFT$.

۲۰. $TFFFFFFT$. [راهنمایی: اگر X و Y به‌ترتیب جوابهای مسائل ۱۸ و ۱۹ باشند آنگاه $X \vee Y$ جواب مسئلهٔ ۲۰ است].

۴. تناقض

برخلاف راستگوها، گزاره‌هایی وجود دارند که ارزش راستی آنها برای هر امکان منطقی دروغ است. چنین گزاره‌هایی را تناقض می‌گویند. به‌عنوان مثال، $p \wedge \sim p$ یك تناقض است.

بدیهی است که اگر t یك راستگو باشد، آنگاه $\sim t$ یك تناقض است و برعکس، اگر c یك تناقض باشد آنگاه $\sim c$ یك راستگو است.

قضیهٔ ۷. گیریم t ، c و p به‌ترتیب یك راستگو، یك تناقض و یك گزارهٔ دلخواه باشند. آنگاه

(الف) $p \wedge t \Leftrightarrow p,$
$p \vee t \Leftrightarrow t.$

(ب) $p \vee c \Leftrightarrow p,$
$p \wedge c \Leftrightarrow c.$

(ج) $c \Rightarrow p$ ، و $p \Rightarrow t$.

برهان. (الف) جدول ارزش زیر برای $p \wedge t \leftrightarrow p$ ، نشان می‌دهد که $p \wedge t$ با p هم‌ارز است.

جدول ۱۳

p	$\wedge$	t	$\leftrightarrow$	p	
T	T	T	T	T	
F	F	T	T	F	
۱	۲	۱	۳	۱	مرحله

هم‌ارزی $p \vee t \Longleftrightarrow t$ به‌طریقی مشابه ثابت می‌شود.

(ب) ازجدول ارزش زیر درمی‌یابیم کـه گزارهٔ شرطی $p \vee c \leftrightarrow p$ یك راستگو است و ازاین‌رو، $p \vee c \Longleftrightarrow p$.

جدول ۱۴

p	$\vee$	c	$\leftrightarrow$	p
T	T	F	T	T
F	F	F	T	F
۱ مرحله	۲	۱	۳	۱

برهان $p \wedge c \Longleftrightarrow c$ به‌طریقی مشابه ثابت می‌شود.

(ج) جدولهای ارزش $p \rightarrow t$ و $c \rightarrow p$ نشان می‌دهند کـه $p \Rightarrow t$ و $c \Rightarrow p$ راستگو هستند.

جدول ۱۵

c	$\rightarrow$	p
F	T	T
F	T	F

p	$\rightarrow$	t
T	T	T
F	T	T

ازاین به‌بعد، نماد c با اندیس یا به‌تنهایی را برای تناقض و نماد t با اندیس یا به‌تنهایی را برای راستگو به‌کار می‌بریم.

تمرین ۴.۱

۱. ثابت‌کنیدکه $p \vee t \Longleftrightarrow t$ و $p \wedge c \Longleftrightarrow c$.

۲. ثابت‌کنیدکه $\sim t \Longleftrightarrow c$ و $\sim c \Longleftrightarrow t$.

۳. برهان خلف زیر را ثابت‌کنید

$$(p \wedge \sim q \rightarrow c) \Longleftrightarrow (p \rightarrow q)$$

۴. ثابت‌کنیدکه $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Longleftrightarrow c$.

۵. ثابت‌کنیدکه برای هر گزارهٔ r، $(p \rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$.

۶. جواد ادعا می‌کردکه هرکاری را می‌تواند انجام دهد. آیا جواد می‌توانست‌شیئی بسازد که نتواند آن را بلندکند.

۵. استدلال قیاسی

چنانکه در مثالهای ۵ تا ۷ نشان داده شده‌است، هفده قانونی که در قضیه‌های اول تا ششم خلاصه شده‌اند برای بررسی هم‌ارزیها و استلزامهای منطقی ابزارهای بسیار مفیدی‌هستند. این ۱۷ قانون را «قاعده‌های استنتاج» می‌نامیم. باید توجه داشت کــه این قاعده‌ها فقط به‌عنوان یك مرجع مناسب انتخاب شده‌اند و از یکدیگر مستقل نیستند. مثلاً، قانون عکس نقیض را، همان‌گونه‌کــه در مثال زیر دیده می‌شود، می‌توان با استفاده از قوانین دیگر و تعاریف مربوط با «استدلال قیاسی» به‌دست آورد.

مثال ۵. قانون عکس نقیض، $(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$، را با استفاده از تعاریف مربوط و دیگر قاعده‌های استنتاج ثابت‌کنید.

حل:	$(p \to q) \equiv \sim (p \wedge \sim q)$	تعریف ۴
	$\equiv \sim (\sim q \wedge p)$	قانون جابه‌جایی
	$\equiv \sim [\sim q \wedge \sim (\sim p)]$	قانون نفی مضاعف
	$\equiv (\sim q \to \sim p)$	تعریف ۴

ازاین‌رو، بنا برقانون تعدی، $(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$.

روش برهان مثال ۵ را، «روش قیاسی یا استدلال قیاسی» می‌گویند. این روش البته با روش استفاده از جدول ارزش متفاوت است.

به‌طور کلی، در استدلال قیاسی به‌کاربردن اصول موضوعه، تعاریف و قضایایی‌کــه قبلاً گفته شده‌باشند و همچنین قواعد استنتاج، جایز است.

مثال ۶. قانون رفع مؤلفه را با استدلال قیاسی ثابت‌کنید.

حل:	$(p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge (p \vee q)$	قانون جابه‌جایی
	$\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)$	قانون پخشپذیری
	$\equiv c \vee (\sim p \wedge q)$	$\sim p \wedge p \equiv c$
	$\equiv (\sim p \wedge q) \vee c$	قانون جابه‌جایی
	$\equiv \sim p \wedge q$	قضیهٔ ۷ (ب)
	$\Rightarrow q$	قانون اختصار

و بالاخره بنا برقانون تعدی داریم: $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$.

مثال ۷. قانون تفکیك دو مقدم را با استدلال قیاسی ثابت کنید:

$$(p \wedge q \rightarrow r) \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

حل: $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \equiv [p \rightarrow \sim (q \wedge \sim r)]$ تعریف ۴

$\equiv \sim [p \wedge (q \wedge \sim r)]$ تعریف ۴، قانون نفی مضاعف

$\equiv \sim [(p \wedge q) \wedge \sim r]$ قانون شرکتپذیری

$\equiv (p \wedge q \rightarrow r)$ تعریف ۴

ازاین‌رو، $(p \wedge q \rightarrow r) \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$.

مثال ۸. با استفاده از استدلال قیاسی ثابت کنید که

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \equiv (p \wedge q \rightarrow r \vee s).$$

حل:

$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \equiv \sim (p \wedge \sim r) \vee \sim (q \wedge \sim s)$ تعریف ۴

$\equiv (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee s)$ قانون دمورگن و نفی مضاعف

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s)$ قانون جابه‌جایی و شرکتپذیری

$\equiv \sim [(p \wedge q) \wedge \sim (r \vee s)]$ قانون دمورگن و نفی مضاعف

$\equiv (p \wedge q \rightarrow r \vee s)$ تعریف ۴

چرا به‌کاربردن استدلال قیاسی را بر استفاده ازجدول ارزش ترجیح می‌دهیم، از مقایسهٔ زیر دیده می‌شود: برای بررسی هم‌ارزی درمثال ۸، به‌روش جدول ارزش، باید یك جدول بسیار بزرگ با ($2^4 =$)۱۶ حالت تشکیل دهیم (مسئلهٔ ۲۰ تمرین ۱.۱ یا مسئلهٔ ۱۲ تمرین ۳.۱ را ببینید) و حال آنکه در بالا این هم‌ارزی را با استدلال قیاسی در پنج مرحلهٔ کوتاه، نشان داده‌ایم.

تمرین ۵.۱

راستگوهای زیر را به‌روش قیاسی ثابت کنید.

۱. قیاس استثنایی $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$

۲. قیاس دفع $\sim q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \sim p$

۳. برهان خلف $(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q \rightarrow c)$

۴. رفع مؤلفه $(p \vee q \vee r) \wedge \sim r \wedge \sim q \Rightarrow p$

۵. قضیهٔ ۷ (ج): $c \Rightarrow p$

۶. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$

۷. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q \rightarrow q)$

۸. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$

۹. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$

۱۰. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$

۱۱. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim p$

۱۲. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q \vee r)$

۱۳. $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$

۱۴. $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow q$

۱۵. $(p \rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

۱۶. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

۱۷. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$

۱۸. $[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \wedge p \Rightarrow q \vee r$

۱۹. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow q \vee r$

۲۰. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p \vee \sim r$

۶. قواعد تسویر

درهر بحثی، یك عالم سخن یـا حوزهٔ سخن بخصوصی را درنظر داریم، یعنی دسته‌ای از اشیاء کـه خواصشان مورد نظر هستند. مثلاً، درگزارهٔ «تمام انسانهـا، میرا هستند»، عالم، دستهٔ تمام انسانها است. با این مفهوم عالم، گزارهٔ «تمام انسانها، میرا هستند» را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

برای تمام xهای درعالم، x میراست.

عبارت «برای تمام xهای درعالم» را سور عمومی گویند و آن را با $(\forall x)$ نشان می‌دهند. جملهٔ «x میراست» چیزی دربارهٔ x می‌گوید که مـا آن را با $p(x)$ نشان می‌دهیم. بـا به‌کاربردن این علامتها عبارت «تمام انسانها میرا هستند»، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$(\forall x)(p(x))$$

حال، گزارهٔ «بعضی از انسانها میرا هستند» را درنظر بگیرید. دراینجا عالم (یا حوزهٔ سخن) هنوز همانندگزارهٔ قبلی است. با درنظرداشتن این عالم، می‌توانیم گزارهٔ «بعضی از انسانها میرا هستند» را به‌صورتهای زیر بیاوریم.

حداقل یك فرد وجود داردکه میراست.

حداقل يك x وجود دارد به‌قسمی‌که x میرا است.

و یا

حداقل يك x وجود دارد به‌قسمی‌که $p(x)$.

عبارت «حداقل يك x وجود دارد به‌قسمی‌که» را سور وجودی گویند و آن را با $(\exists x)$ نمایش می‌دهند. با این علامت جدید می‌توان گزارهٔ «بعضی از انسانها میرا هستند» را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(\exists x)(p(x))$$

درحالت کلی، فرض کنید که يك حوزهٔ سخن U و يك گزارهٔ کلی $p(x)$ داریم، که آن را گزاره‌نما می‌نامیم و در آن «متغیر» x، در U تغییر می‌کند. حال $(\forall x)(p(x))$ بیان می‌کند که برای هر x در U، گزارهٔ $p(x)$ دربارهٔ x راست است، و $(\exists x)(p(x))$ به‌این معنی است که حداقل يك x در U وجود دارد که برای آن $p(x)$ راست است.

در ریاضیات مقدماتی، معمولاً برای اختصار، از سورها صرفنظر می‌شود. مثلاً، در جبر دبیرستانی عبارت «$x^2-1=(x-1)(x+1)$» به‌این معنی است که «برای هر عدد حقیقی x، $x^2-1=(x-1)(x+1)$». در ریاضیات، «برای هر» و «برای تمام» به‌يك معنی هستند و هر دو را با $\forall$ نشان می‌دهند؛ و «برای بعضی» همان معنی «وجود دارد» را می‌دهد که با $\exists$ نمایش داده می‌شود. درعبارتهایی که کمتر رسمی هستند گاهی سورها را بعد از گزاره می‌آوریم. مثلاً، گزارهٔ «$f(x)=0$ برای تمام xها» دقیقاً به معنی «$(\forall x)(f(x)=0)$» است.

درمنطق و در ریاضیات، نقیض گزارهٔ «$p(x)$ برای هر x (در U) راست است»، یعنی $\sim[(\forall x)(p(x))]$، به‌مفهوم «حداقل يك x (در U) وجود دارد که برای آن $p(x)$ دروغ است»، $(\exists x)(\sim p(x))$، درنظر گرفته می‌شود.

همچنین، $\sim[(\exists x)(p(x))]$ به‌معنی «هیچ xای (در U) وجود ندارد که برای آن $p(x)$ راست باشد» یا به‌عبارت دیگر، «$p(x)$ برای تمام xها (در U) دروغ است» یا $(\forall x)(\sim p(x))$ درنظر گرفته می‌شود. در زیر خلاصه می‌کنیم.

قاعدهٔ نقیض سور. اگر فرض کنیم $p(x)$ يك گزاره‌نما، یعنی يك گزاره در باره يك شیء نامشخص x در يك عالم مفروض باشد، آنگاه،

$$\sim[(\forall x)(p(x))] \equiv (\exists x)(\sim p(x))$$

و

$$\sim[(\exists x)(p(x))] \equiv (\forall x)(\sim p(x))$$

نماد «$\equiv$» را برای نشان دادن اینکه دو گزارهٔ مسور دوطرف $\equiv$ ازنظر منطق يك

گزاره بـه حساب می‌آیند* به‌کار برده‌ایم. دربخش بعد خواهیم دیدکه این نماد را برای هم‌ارزیهای منطقی نیز به‌کار می‌بریم واین دوتعبیر نماد $\equiv$ باهم سازگار هستند.

برای درك بهتر گزاره‌های مسور $(\forall x)(p(x))$ و $(\exists x)(p(x))$،حالتی راکه‌در آن حـوزهٔ سخن از تعدادی متناهـی متغیر a_1، a_2، a_3، ...، a_n تشکیل شده است، درنظر می‌گیریم. آنگاه چون $(\forall x)(p(x))$ بـه این معنی است کـه $p(x)$ بـرای هـر متغیر a_1، a_2، ...، a_n راست است، گزارهٔ $(\forall x)(p(x))$ راست است اگر وتنها اگر عطف

$$p(a_1),\ p(a_2),\ p(a_3),\ \ldots,\ p(a_n)$$

راست باشد. بنابراین

$(\forall x)(p(x))$ به‌معنی $p(a_1)\wedge p(a_2)\wedge\cdots\wedge p(a_n)$ است.

همچنین،

$(\exists x)(p(x))$ به‌معنی $p(a_1)\vee p(a_2)\vee\cdots\vee p(a_n)$ است.

بنابراین، قاعدهٔ نقیض سور را می‌توان بـه عنوان یك تعمیم قانون دمورگن درنظرگرفت (قضیهٔ ۳).

مثال ۹. کدام یك از گزاره‌های زیر هم‌ارز نفی‌گزارهٔ «همه مارها سمی هستند» است؟

(الف) هیچ ماری سمی نیست.

(ب) بعضی از مارها سمی هستند.

(ج) بعضی از مارها سمی نیستند.

حل: حوزهٔ سخن U، خانوادهٔ تمام مارهـا است. فرض‌کنیم $p(x)$ گزاره نمای، x سمی است، باشد، (که درآن متغیر x در U تغییرمی‌کند). گزارهٔ «تمام مارها سمی‌هستند»، به‌صورت $(\forall x)(p(x))$ نوشته می‌شود. بنابرقاعدهٔ نقیض سور، $\sim[(\forall x)(p(x))]$ هم‌ارز $(\exists x)(\sim p(x))$ است، که بیانگر «بعضی از مارها سمی نیستند» می‌باشد.

تمرین ۶.۱

۱. با استفاده از یك سور، گزارهٔ «معادلهٔ $x^2-3x+2=0$ جواب دارد» منتخب ازجبر مقدماتی را به‌زبان منطق بنویسید. حوزهٔ سخن دراینجا چیست؟

۲. اتحاد «$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$» جبر مقدماتی را با استفاده از سور به‌زبـان منطقی برگردانید. حوزهٔ سخن دراینجا چیست؟

۳. یك تعمیم قانون دمورگن در زیر آمده‌است:

(الف) $\sim(p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n)\equiv\sim p_1\vee\sim p_2\vee\cdots\vee\sim p_n$

---

* یعنی ازنظر منطق بین این دوگزاره مسور تمایزی قائل نمی‌شویم.ـم.

(ب) $\sim(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \equiv \sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \cdots \wedge \sim p_n$

بـا به‌کاربردن سورهای مناسب و حوزهٔ سخن مناسب، این عبارات را به‌زبـان منطقی برگردانید. حوزهٔ سخن دراینجا چیست؟

۴. گزارهٔ هم‌ارز نقیض هریك از گزاره‌های زیر را با استفاده از قاعدهٔ نقیض سور بیابید.

(الف) تمام مارها خزنده هستند.

(ب) بعضی اسبها رام هستند.

(ج) بعضی از ریاضیدانان خوش مشرب نیستند.

(د) تمام دانشجویان یا باهوش هستند یا پرکار.

(ه) هیچ‌کودکی حیله‌گر نیست.

۵. حوزهٔ سخن را برای هریك از پنج گزارهٔ مسئلهٔ ۴ بیابید.

۶. از

$$\sim[(\forall x)(q(x))] \equiv (\exists x)(\sim q(x))$$

نتیجه بگیرید

$$\sim[(\exists x)(p(x))] \equiv (\forall x)(\sim(p(x))$$

۷. از

$$\sim[(\exists x)(q(x))] \equiv (\forall x)(\sim q(x))$$

نتیجه بگیرید

$$\sim[(\forall x)(p(x))] \equiv (\exists x)(\sim p(x))$$

۸. ثابت کنید که

$\sim[(\forall x)(\sim q(x))] \equiv (\exists x)(q(x))$ و $\sim[(\exists x)(\sim(q(x))] \equiv (\forall x)(q(x))$.

[راهنمایی: قاعدهٔ نقیض سور را به‌کار برید].

۷. برهان درستی

یکی از مهمترین وظایف یك منطق‌دان آزمون حکمهاست. یك حکم تصدیق این است که گزاره‌ای به‌نام نتیجه از گزاره‌های دیگری به‌نام مفروضات یا مقدمات، به‌دست می‌آید. یك حکم درست تلقی می‌شود هرگاه ترکیب عطفی مفروضات نتیجه را ایجاب کند. مثلاً آنچه در زیر می‌آید، یك حکم است کـه در آن چهار گزارهٔ اول مفروضات هستند و گزارهٔ آخر نتیجه است.

اگر او پزشکی می‌خواند، آنگاه درآمد خوبی درانتظارش است.

اگر به‌تحصیل هنر می‌پردازد، آنگاه زندگانی خوبی درانتظارش است.

اگر درآمد خوبی درانتظارش‌است یا زندگانی خوبی درانتظارش است، شهریه‌ای که به‌کالج می‌پردازد به‌هدر نرفته است.

شهریه‌کالج او به‌هدر رفته است.
بنابراین، او نه پزشکی می‌خواند نه هنر تحصیل می‌کند.
این حکم را می‌توان به‌صورت نمادی زیر نوشت:

ف ۱. $P \rightarrow D$ (ف = فرض، P = او پزشکی می‌خواند، D = درآمد خوبی درانتظارش است)

ف ۲. $T \rightarrow Z$ (T = به‌تحصیل هنر می‌پردازد، Z = زندگانی خوبی درانتظارش است)

ف ۳. $D \vee Z \rightarrow \sim S$ (S = شهریه کالج او به‌هدر رفته است)

ف ۴. S

ن $\therefore \sim P \wedge \sim T$

اثبات درستی این حکم با جدول ارزش مستلزم یك جدول ۳۲($=2^5$) سطری است. اما راه دیگر اثبات درستی این حکم این است که با به‌کاربردن قواعد استنتاج، درچند مرحلهٔ کوتاه نتیجه را از مفروضات به‌دست آوریم.

ازفرضهای ف ۳ و ف ۴، (یعنی از $D \vee Z \rightarrow \sim S$ و S) برطبق قانون قیاس دفع، $\sim(D \vee Z)$ نتیجه می‌شود و این بنابرقانون دمورگن با $\sim D \wedge \sim Z$ هم‌ارز است. بنابرقانون اختصار از $\sim D \wedge \sim Z$ درستی $\sim D$ (وهمچنین $\sim Z$) را نتیجه می‌گیریم. از ف ۱ (یعنی از $P \rightarrow D$) و $\sim D$ درستی $\sim P$ را به‌دست می‌آوریم همچنین از ف ۲ (یعنی از $T \rightarrow Z$) و $\sim Z$، درستی $\sim T$ را نتیجه می‌گیریم. بالاخره، عطف $\sim P$ و $\sim T$، $\sim P \wedge \sim T$ را نتیجه می‌دهد. در این برهان، قواعد استنتاج قیاس دفع، قانون دمورگن و قانون اختصار به‌کارگرفته شده‌اند.

یك روش صوری و مختصرتر برای بیان این برهان درستی این است که فرضها و گزاره‌هایی راکه ازفرضها نتیجه می‌شوند دریك طرف بنویسیم و درهر مرحله توجیه آن‌را کنارش ذکر کنیم. درهر مرحله «توجیه» مشخص می‌کندکه گزارهٔ این مرحله ازکدام گزاره‌های قبلی وچه قواعد استنتاجی به‌دست آمده است. برای آسانی مراجعه، بهتر است که فرضها وگزاره‌های منتج ازآنها را شماره‌گذاری کرده ونتیجه را درسمت چپ آخرین فرض بنویسیم وآن را با خطی کج مانند / از فرض جداکنیم تا مشخص شودکه‌گزاره‌های قبل ازآن همگی مفروضات هستند. برهان صوری درستی حکم بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

۱. $P \rightarrow D$ (ف)

۲. $T \rightarrow Z$ (ف)

۳. $D \vee Z \rightarrow \sim S$ (ف)

۴. $S / \therefore \sim P \wedge \sim T$ (ف/ن)

۵. $\sim(D\vee Z)$	۳، ۴، قیاس دفع
۶. $\sim D\wedge\sim Z$	۵، دمورگن
۷. $\sim D$	۶، اختصار
۸. $\sim Z$	۶، اختصار
۹. $\sim P$	۱، ۷، قیاس دفع
۱۰. $\sim T$	۲، ۸، قیاس دفع
۱۱. $\sim P\wedge\sim T$	۹، ۱۰، قانون عطف

درمرحلهٔ ۱۱ بالا، حکم زیر را که بهروشنی معتبر است و قانون عطف خوانده می‌شود، به‌کار برده‌ایم:

p	ف ۱
q	ف ۲
$\therefore p\wedge q$	ن

برهان درستی صوری یك حکم داده‌شده، دنباله‌ای از گزاره‌هاست که هریك یا فرض حکم است یا از گزاره‌های قبلی با حکمی‌که درستی آن شناخته شده به‌دست آمده است، و به‌نتیجهٔ حکم ختم می‌شود.

مثال ۱۰. برای حکم زیر یك برهان درستی صوری بیاورید. نمادهای پیشنهادی را به‌کار برید.

یا واجدی به‌ریاست هیئت‌مدیره انتخاب شده‌است (W) یا هدایت ولطفی به‌معاونت هیئت مدیره انتخاب شده‌اند (H, L). اگر یا واجدی به‌ریاست هیئت مدیره انتخاب شود یا هدایت بـه‌معاونت هیئت مدیره انتخاب شود، آنگاه داود اعتراض خواهدکـرد (D). بنابراین، یا واجدی به‌ریاست هیئت مدیره انتخاب شده‌است یا داود اعتراض‌کرده است.

برهان.

۱. $W\vee(H\wedge L)$	
۲. $W\vee H\to D/\therefore W\vee D$	
۳. $(W\vee H)\wedge(W\vee L)$	۱، پخش‌پذیری
۴. $W\vee H$	۳، اختصار
۵. D	۲، ۴، قیاس استثنایی
۶. $D\vee W$	۵، جمع
۷. $W\vee D$	۶، جابه‌جایی

یك روش دیگر برهان، روش برهان غیرمستقیم، یا روش برهان خلف است. دراین روش برای اثبات درستی یك حکم مفروض، نقیض نتیجه را به مفروضات حکم می‌افزاییم وسپس یك تناقض به‌دست می‌آوریم؛ با به‌دست آوردن تناقض، برهان کامل می‌شود.

مثال ۱۱.۰ یك برهان غیرمستقیم برای درستی حکم زیر بیاورید.

$$p\vee q\rightarrow r$$
$$s\rightarrow p\wedge u$$
$$q\vee s/\therefore r$$

برهان.

۱.	$p\vee q\rightarrow r$	
۲.	$s\rightarrow p\wedge u$	
۳.	$q\vee s/\therefore r$	
۴.	$\sim r$	برهان خلف
۵.	$\sim(p\vee q)$	۱، ۴، قیاس دفع
۶.	$\sim p\wedge\sim q$	۵، دمورگن
۷.	$\sim p$	۶، اختصار
۸.	$\sim q$	۶، اختصار
۹.	s	۳، ۸، رفع مؤلفه
۱۰.	$p\wedge u$	۲، ۹، قیاس استثنایی
۱۱.	p	۱۰، اختصار
۱۲.	$p\wedge\sim p$	۷، ۱۱، قانون عطف

گزارهٔ $p\wedge\sim p$ درمرحله ۱۲ یك تناقض است؛ پس برهان غیرمستقیم درستی کامل است.

درمقابل «برهان غیرمستقیم» برهان درستی صوری راکه قبلاً به‌آن اشاره‌کردیم می‌توان «برهان مستقیم» نامید. دریك برهان ریاضی می‌توان یك برهان مستقیم یا یك‌برهان غیرمستقیم به‌کار برد. انتخاب روش برهان برای یك حکم ریاضی مفروض، بستگی دارد به‌سلیقه وتناسب روش با حکم.

تمرین ۱۰۷

هریك ازمسائل ۱ تا ۴ یك برهان درستی صوری حکمی‌است‌که درمسئله مشخص شده‌است. برای هرخط‌که درست نیست، دلیل بیاورید.

۱.
$p\vee q\to r\wedge s$
$\sim r/\therefore\sim q$
$\sim r\vee\sim s$
$\sim(r\wedge s)$
$\sim(p\vee q)$
$\sim p\wedge\sim q$
$\sim q$

۲.
$p\wedge q\to r$
$(p\to r)\to s$
$\sim q\vee u/\therefore q\to s\wedge u$
$q\wedge p\to r$
$q\to(p\to r)$
$q\to s$
$\sim q\vee s$
$(\sim q\vee s)\wedge(\sim q\vee u)$
$\sim q\vee(s\wedge u)$
$q\to s\wedge u$

۳.
$p\wedge(q\vee s)$
$p\to(s\to u)$
$p\to(q\to r)$
$\sim r/\therefore u$
$p\wedge s\to u$
$p\wedge q\to r$
$(p\wedge q)\vee(p\wedge s)$
$(p\wedge q\to r)\wedge(p\wedge s\to u)$
$(p\wedge q)\vee(p\wedge s)\to r\vee u$
$r\vee u$
u

۴.
$\sim p\wedge s\wedge\sim(\sim p\wedge q)$
$p\vee q\vee(r\wedge s)/\therefore\sim p\wedge r$
$\sim p\wedge s$
$\sim p$
$p\vee[q\vee(r\wedge s)]$
$q\vee(r\wedge s)$
$(q\vee r)\wedge(q\vee s)$
$q\vee r$
$\sim p\wedge(q\vee r)$
$(\sim p\wedge q)\vee(\sim p\wedge r)$
$(\sim p\wedge s)\wedge\sim(\sim p\wedge q)$
$\sim(\sim p\wedge q)$
$\sim p\wedge r$

برای هریك ازحکمهای زیر یك برهان مستقیم یا یك برهان غیرمستقیم درستی بیاورید.

۵.
$A\vee(B\wedge C)$
$B\to D$
$C\to E$

۶.
$B\vee(C\to E)$
$B\to D$
$\sim D\to(E\to A)$

$D \wedge E \rightarrow F$

$\sim A / \therefore F$

$\sim D / \therefore C \rightarrow A$

۷. $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow D \wedge E)$

$A \wedge C / \therefore E \vee F$

۸. $A \vee B$

$\sim B \vee C / \therefore A \vee C$

۹. $B \vee C \rightarrow B \wedge A$

$\sim B / \therefore \sim C$

۱۰. $A \wedge B \rightarrow C$

$(A \rightarrow C) \rightarrow D$

$\sim B \vee E / \therefore B \rightarrow D \wedge E$

در برهانهای حکمهای زیر، از علامتهای پیشنهادی استفاده کنید.

۱۱. اگر جمعیت به سرعت افزایش یابد و تولید ثابت بماند، آنگاه قیمتها بالا می‌روند. اگر قیمتها بالا روند آنگاه دولت قیمتها را کنترل خواهد کرد. اگر من ثروتمند باشم آنگاه نگران افزایش قیمتها نیستم. چنین نیست که من ثروتمند نیستم. یا دولت قیمتها را کنترل نمی‌کند یا من نگران افزایش قیمتها هستم. بنابراین، چنین نیست که جمعیت به‌سرعت افزایش می‌یابد و تولید ثابت می‌ماند. (جمعیت به‌سرعت افزایش می‌یابد $= P$. تولید ثابت می‌ماند $= C$. قیمتها بالا می‌روند $= R$. دولت قیمتها را کنترل خواهد کرد $= G$. من ثروتمند هستم $= H$. من نگران افزایش قیمتها هستم $= I$).

۱۲. رئیس مرا تمجید می‌کند تنها اگر بتوانم به‌خودم مغرور باشم. یا من در کلاس خوب کار می‌کنم یا نمی‌توانم به‌خودم مغرور باشم. اگر در ورزش کوشا باشم، آنگاه نمی‌توانم در کلاس خوب کار کنم. بنابراین، اگر رئیس مرا تمجید کند آنگاه نمی‌توانم در ورزش کوشا باشم. (رئیس مرا تمجید می‌کند $= D$. می‌توانم به‌خودم مغرور باشم $= P$. در کلاس خوب کار می‌کنم $= C$. در ورزش کوشا هستم $= S$.)

۱۳. اگر واجدی یا هدایت پیروز شوند آنگاه لطفی و سلیمان گریه می‌کنند. سلیمان گریه نمی‌کند. بنابراین هدایت پیروز نشده‌است. (واجدی پیروز می‌شود $= W$. هدایت پیروز می‌شود $= H$. لطفی گریه می‌کند $= L$. سلیمان گریه می‌کند $= S$.)

۱۴. اگر من در این درس شرکت کنم و زیاد درس بخوانم آنگاه نمرات خوبی می‌گیرم. اگر نمرات خوبی بگیرم آنگاه خوشحال می‌شوم. من خوشحال نیستم. بنابراین یا من در این درس شرکت نکرده‌ام یا زیاد درس نخوانده‌ام. (من در این درس شرکت می‌کنم $= E$. من زیاد درس می‌خوانم $= S$. من نمرات خوبی می‌گیرم $= G$. من خوشحال هستم $= H$).

۱۵. اگر او به‌مهمانی برود موهایش را برس خواهد کشید. برای اینکه دلربا جلوه کند لازم است که آراسته باشد. اگر معتاد باشد تسلط برنفس ندارد. اگر موهایش را برس بکشد، دلربا جلوه می‌کند. او دستکشهای سفید (پوست بزغاله‌ای) می‌پوشد تنها وقتی که به‌مهمانی برود. تسلط برنفس نداشتن کافی است که او را ناآراسته

جلوه‌گـر کند. بنابراین آدم معتاد دستکش سفید (پوست بزغاله‌ای) نمی‌پوشد. (او به‌مهمانی می‌رود $=P$. او موهایش‌را برس‌نمی‌کشد $=B$. او دلربا جلوه می‌کند $=F$. او آراسته است $=T$. او معتاد است $=O$. او تسلط بر نفس دارد $=S$. او دستکش سفید (پوست بزغاله‌ای) می‌پوشد $=G$.)

۸. استقرای ریاضی

روش دیگر برهان که برای اثبات درستی یك حکم ریاضی $P(n)$ مربوط به‌عدد طبیعی n خیلی به‌کار می‌رود اصل استقرای ریاضی است که در زیر می‌آید.

استقرای ریاضی. اگر $P(n)$ یك حکم مربوط به‌عدد طبیعی n باشد به‌طوری که

(۱) $P(۱)$ راست باشد، و

(۲) برای هرعدد طبیعی k، $P(k)\Rightarrow P(k+۱)$

آنگاه $P(n)$ برای هرعدد طبیعی n راست است.

اصل بالا نتیجه‌ای از یکی از اصول موضوع پئانو برای اعداد طبیعی است، که در ضمیمه برای ارجاع ذکر شده‌اند.

بـرای استفاده از اصل استقرای ریاضی در اثبات یك قضیه، بایـد قضیه را بتوان به‌حالتهایی تجزیه‌کرد به‌طوری‌که برای هرعدد طبیعی یك حالت داشته باشیم. آنگاه باید درستی شرایط (۱) و (۲) را بررسی‌کنیم. بررسی (۱)، کـه معمولاً ساده است، مـا را مطمئن می‌کندکـه قضیه حداقل برای حالت $n=۱$ راست است. برای تحقیق در درستی شرط (۲)، بـایـد این قضیهٔ کمکی را کـه فـرضش «$P(k)$ راست است» و نتیجه‌اش «$P(k+۱)$ راست‌است» می‌باشد،ثابت‌کنیم. فرض «$P(k)$ راست است» را فرض استقرا می‌گویند.

مثال ۱۲. با استقرای ریاضی ثابت‌کنیدکه برای هرعدد طبیعی n

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

برهان. دراینجا $P(n)$ حکم زیر است:

$$«۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}»$$

به‌ویژه، $P(۱)$ نمایانگر «$۱=(۲\cdot۱)/۲$» است که آشکارا یك گزارهٔ راست است. پس، شرط (۱) استقرای ریاضی برقرار است.

برای اثبات شرط (۲)، فرض می‌کنیم $P(k)$، یعنی

$$«1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}»$$

راست است. سپس به‌طرفین تساوی $k+1$ اضافه می‌کنیم، داریم

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$
$$=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

که نشان می‌دهد $P(k+1)$ راست است. نشان دادیم که شرایط (۱) و (۲) استقرای ریاضی برقرار هستند. پس، بنابراصل استقرای ریاضی،

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

برای هرعدد طبیعی n راست است.

اصل استقرای ریاضی را می‌توان برای تعریفهای مربوط به‌اعداد طبیعی به‌کار برد. مثلاً توانهای یك عدد مجهول x را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$x^1=x$$
$$x^{n+1}=x^n\cdot x \qquad \text{برای هرعدد طبیعی } n$$

دو معادلهٔ بالا نشان می‌دهند که $x^1=x,\ x^2=x\cdot x,\ x^3=x^2\cdot x,\ \ldots$. به عنوان کاربرد دیگر تعریف استقرایی، نماد $C(n, r)$ را در زیر ارائه می‌دهیم.

تعریف ۷. گیریم n عدد طبیعی و r عدد صحیح باشد. علامت $C(n, r)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C(0, 0)=1, \qquad C(0, r)=0 \qquad \text{برای هر } r\neq 0$$
$$C(n, r)=C(n-1, r)+C(n-1, r-1)$$

قضیهٔ ۸. اگر n و r اعدادی صحیح باشند به‌طوری که $0\leqslant r\leqslant n$، آنگاه

$$C(n, r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

که در آن $n!$ حاصلضرب n عدد طبیعی متوالی از ۱ تا n، یعنی $n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ به‌ازای $n>0$ را نشان می‌دهد و نیز بنابر قرارداد $0!=1$.

برهان. برهان را به‌عنوان تمرین برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

قضیهٔ ۹. (قضیهٔ دوجمله‌ای). اگر x و y دو متغیر و n یك عدد طبیعی باشند، آنگاه

$$(x+y)^n=C(n, 0)x^n+C(n, 1)x^{n-1}y+\dots+C(n, r)x^{n-r}y^r+\dots+C(n, n)y^n$$

برهان. درستی این‌قضیه را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. نخست، بدیهی است که قضیه برای حالت $n=1$ درست است. برای تکمیل برهان، فرض می‌کنیم که قضیه برای حالت $n=k$ درست است، یعنی فرض می‌کنیم

$$(x+y)^k=C(k, 0)x^k+C(k, 1)x^{k-1}y+\dots+C(k, r)x^{k-r}y^r+\dots+C(k, k)y^k$$

آنگاه دوطرف تساوی بالا را در $(x+y)$ ضرب می‌کنیم

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1}&=(x+y)[x^k+C(k, 1)x^{k-1}y+\dots+C(k,r)x^{k-r}y^r+\dots+y^k]\\&=x^{k+1}+[C(k, 0)+C(k, 1)]x^ky+\dots+[C(k, r-1)\\&\quad+C(k, r)]x^{(k+1)-r}y^r+\dots+y^{k+1}\\&=C(k+1, 0)x^{k+1}+C(k+1, 1)x^ky+\dots\\&\quad+C(k+1,r)x^{k+1-r}y^r+\dots+C(k+1, k+1)y^{k+1}\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد اگر قضیه برای $n=k$ درست باشد برای $n=k+1$ نیز درست است. بنابراین، بنابر استقرای ریاضی، قضیهٔ دو جمله‌ای برای تمام اعداد طبیعی n درست است.

اعداد $C(n, r)$ درقضیهٔ دوجمله‌ای، ضرایب دوجمله‌ای گفته می‌شوند.

تمرین ۱۰۸

۱. قضیهٔ ۸ را با استقرای ریاضی ثابت‌کنید.

۲. نشان دهیدکه برای تمام اعداد طبیعی n، $C(n, 0)=1=C(n, n)$

۳. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$C(n, 0)+C(n, 1)+\cdots+C(n, n)=2^n$$

۴. با استقرای ریاضی ثابت کنید* که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

۵. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+r(r+1)+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

۶. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۷. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

۸. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$(1+2+3+\cdots+n)^2=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

۹. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

۱۰. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

۱۱. قوانین دمورگن تعمیم‌یافتهٔ زیر را ثابت کنید.

(الف) $\sim(p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n)\Leftrightarrow\sim p_1\vee\sim p_2\vee\cdots\vee\sim p_n$

(ب) $\sim(p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_n)\Leftrightarrow\sim p_1\wedge\sim p_2\wedge\cdots\wedge\sim p_n$

۱۲. قوانین پخش‌پذیری تعمیم‌یافتهٔ زیر را ثابت کنید.

---

* پس از حل مسئله، مثال ۱۲ صفحهٔ ۳۲ را دوباره بخوانید. ـ م.

(الف) $p\wedge(q_1\vee q_2\vee\cdots\vee q_n)\Leftrightarrow(p\wedge q_1)\vee(p\wedge q_2)\vee\cdots\vee(p\wedge q_n)$

(ب) $p\vee(q_1\wedge q_2\wedge\cdots\wedge q_n)\Leftrightarrow(p\vee q_1)\wedge(p\vee q_2)\wedge\cdots\wedge(p\vee q_n)$

۱۳. ثابت کنید که اگر k یك عدد طبیعی ثابت باشد، آنگاه برای تمام اعداد طبیعی n،

$$1\cdot 2\cdots k+2\cdot 3\cdots(k+1)+\cdots+n(n+1)\cdots(n+k-1)$$
$$=\frac{1}{k+1}n(n+1)(n+2)\cdots(n+k).$$

۲

مفهوم مجموعه

در این فصل، مفاهیم مجموعه، زیرمجموعه، اعمال در مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراك و متمم مجموعه‌ها) وقواعد حاکم براین اعمال را مطرح می‌کنیم. این مطالب به‌موازات مطالب فصل ۱ (منطق گزاره‌ها) آمده‌اند. خانواده‌های اندیس‌دار مورد بحث قرارگرفته‌اند. فصل با پارادوکس راسل و یك توضیح تاریخی پایان می‌یابد.

۱. مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها

پاسخ به‌این پرسش که «مجموعه چیست؟» بسیار دشوار است.[۱] دراین کتاب مقدماتی، وارد نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها نمی‌شویم و به‌پذیرفتن تعریف زیر اکتفا می‌کنیم: یك مجموعه هرتوده‌ای از اشیاء، به‌نام عناصر، است که از لحاظ حسی یا فکری متمایز و معین باشند. این تعریف شهودی مجموعه را نخستین‌بار گئورگ کانتور* (۱۸۴۵-۱۹۱۸)، که نظریهٔ مجموعه‌ها را در سال ۱۸۹۵ پایه‌ریزی کرد، آورده است. چند مثال:

(الف) مجموعهٔ تمام صندلی‌های این کلاس.

(ب) مجموعهٔ تمام دانشجویان این دانشگاه.

---

۱. وقتی‌که دانشجویان به‌بخش‌های ۷ و ۸ برسند، به‌اشکال پی خواهند برد.

* Georg Cantor

(ج) مجموعهٔ حروف a، b، c و d.
(د) مجموعهٔ قوانین خوابگاههای دانشگاه.
(ه) مجموعهٔ تمام اعداد گویا که مربعشان ۲ است.
(و) مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی.
(ز) مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی بین ۰ و ۱.

یك مجموعه را که فقط شامل تعدادی متناهی عنصر باشد مجموعهٔ متناهی می‌گویند. مجموعهٔ نامتناهی، مجموعه‌ای است که متناهی نباشد. مثالهای بالا از (الف) تا (ه) همگی مجموعه‌های متناهی و مثالهای (و) و (ز) مجموعه‌های نامتناهی هستند.

معمولاً درصورت امکان، مجموعه‌ها را با عنصرهایش درمیان دوابرو نمایش می‌دهند. بنابراین، مجموعهٔ مثال (ج) را به‌صورت $\{a, b, c, d\}$ می‌نویسند ومجموعهٔ مثال (و) را می‌توان به‌صورت $\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ نشان داد. مجموعهٔ مثال (ه) هیچ عنصری نـدارد و چنین مجموعه‌ای را مجموعهٔ تهی گویندکه با نماد $\varnothing$ نمایش داده می‌شود.

حروف بزرگ را برای نمایش مجموعه‌ها وحروف کوچك را برای نمایش عنصرهای مجموعه به‌کارخواهیم برد. اگر a عنصری ازمجموعهٔ A باشد، می‌نویسیم $a \in A$ (بخوانید: «a عنصری از A است» یا «a متعلق به A است»)، نماد $b \notin A$ بدین‌معنی است که b عنصری از A نیست.

تعریف ۱. دومجموعهٔ A و B را مساوی گویند و نویسند $A = B$، اگرعنصرهایشان یکی باشد. یعنی $A = B$ به‌معنی $(\forall x)[(x \in A) \leftrightarrow [x \in B]]$ است.

در نوشتن عنصرهای مجموعه، ترتیب خاصی رعایت نمی‌شود. مثلاً $\{a, b, c\}$ یا $\{b, c, a\}$ یا $\{c, b, a\}$ هرسه یك مجموعه رانمایش‌می‌دهند. به‌علاوه، چون عنصرهای یك مجموعه متمایز هستند، مثلاً $\{a, a, b\}$ نماد مناسبی برای مجموعهٔ $\{a, b\}$ نیست. اگر a عنصری ازیك مجموعه باشد، باید a را متمایز از $\{a\}$ درنظرگرفت، یعنی $a \neq \{a\}$. زیرا $\{a\}$ مجموعه‌ای است که تنها از عنصر a تشکیل شده‌است، در صورتی که a عنصر مجموعهٔ $\{a\}$ است.

تعریف ۲. گیریم A و B دو مجموعه باشند. اگر هرعنصر A، عنصر B نیز باشد، می‌گوییم A زیرمجموعهٔ B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ یا $B \supseteq A$. اگر A زیرمجموعهٔ B باشد، B را ابرمجموعهٔ[1] A می‌نامیم.

بنابراین، به‌زبان منطق

$$A \subseteq B \equiv (\forall x)[(x \in A) \rightarrow (x \in B)]$$

بدیهی است که هرمجموعه یك زیرمجموعهٔ (ویك ابرمجموعهٔ) خودش است. هرگاه $A \subseteq B$ و $A \neq B$ باشد، می‌نویسیم $A \subset B$ یا $B \supset A$، و می‌خوانیم: A زیرمجموعهٔ سرهٔ B، یا B ابرمجموعهٔ سرهٔ A است. به‌عبارت دیگر، A زیرمجموعهٔ سرهٔ B است، به‌معنی آن

است که هر عنصر A، عنصر B است، و عنصری در B وجود دارد که عنصر A نیست. اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد، می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.

قضیهٔ ۱. مجموعهٔ تهی $\varnothing$، زیرمجموعهٔ هرمجموعه است.

برهان. فرض‌کنیم A یك مجموعه باشد. باید ثابت‌کنیم که گزارهٔ شرطی

$$(x \in \varnothing) \rightarrow (x \in A)$$

برای هر x درست است. چون مجموعهٔ تهی عنصری ندارد، گزارهٔ «$x \in \varnothing$» دروغ است، گزارهٔ «$x \in A$» چه راست باشد چه دروغ، گزارهٔ شرطی $(x \in \varnothing) \rightarrow (x \in A)$، بنا بر جدول ارزش گزارهٔ شرطی، راست است (حالتهای ۳ و ۴ جدول ۵، فصل ۱). پس، به‌ازای هرمجموعهٔ A، $\varnothing \subseteq A$.

قضیهٔ ۲. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آنگاه $A \subseteq C$.

برهان. باید نشان دهیم که $(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$:

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in B) \qquad \text{زیرا } A \subseteq B$$

$$(x \in B) \Rightarrow (x \in C) \qquad \text{زیرا } B \subseteq C$$

از این‌رو، بنا بر قانون تعدی (قضیهٔ ۴ (ج)، فصل ۱)، داریم

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$$

پس ثابت کردیم $A \subseteq C$.

تمرین ۱.۲

۱. نشان دهید که مجموعهٔ حروف لازم برای هجی‌کردن «بینا بین» با مجموعهٔ حروف لازم برای هجی‌کردن «بیان» مساوی است.

۲. تعیین‌کنید که در میان مجموعه‌های زیر، کدام مجموعه، زیرمجموعهٔ دیگری است.

(الف) $A = \{$تمام اعداد حقیقی x که در $x^2 - 8x + 12 = 0$ صدق می‌کنند.$\}$

(ب) $B = \{2, 4, 6\}$

(ج) $C = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

(د) $D = \{6\}$

۳. تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1, 0, -1\}$ را بنویسید.

۴. ثابت‌کنید که $(A = B) \Longleftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$. [تبصره: اغلب در ریاضیات بهترین راه برای نشان دادن $A = B$ آن است که نشان دهیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.]

۵. ثابت کنید که $(A\subseteq\varnothing)\Rightarrow(A=\varnothing)$

۶. ثابت کنید که

(الف) $[(A\subset B)\wedge(B\subseteq C)]\Rightarrow(A\subset C)$

(ب) $[(A\subseteq B)\wedge(B\subset C)]\Rightarrow(A\subset C)$

۷. مثالی بیاورید از مجموعه‌ای که هریك از عنصرهایش یك مجموعه باشد.

۸. در هریك از حکمهای زیر تعیین کنید حکم راست است یا دروغ. درستی احکامی را که راست هستند ثابت کنید. نادرستی احکام دروغ را با یك مثال ثابت کنید. (مثالی را که نادرستی حکمی را ثابت کند، مثال نقیض گویند.)

(الف) اگر $x\in A$ و $A\in B$، آنگاه $x\in B$.

(ب) اگر $A\subseteq B$ و $B\in C$، آنگاه $A\in C$.

(ج) اگر $A\not\subseteq B$ و $B\subseteq C$، آنگاه $A\not\subseteq C$.

(د) اگر $A\not\subseteq B$ و $B\not\subseteq C$، آنگاه $A\not\subseteq C$.

(ه) اگر $x\in A$ و $A\not\subseteq B$، آنگاه $x\notin B$.

(و) اگر $A\subseteq B$ و $x\notin B$، آنگاه $x\notin A$.

۹. تعیین کنید کدام‌یك از گزاره‌های زیر راست و کدام‌یك دروغ است.

(الف) $x\in\{\{x\},\{x,y\}\}$

(ب) $\{x\}\subseteq\{\{x\},\{x,y\}\}$

(ج) $\{1,x,2\}\subseteq\{1,2,x\}$

(د) $\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$

(ه) $\{x\}\in\{x\}$

۱۰. تعیین کنید گزاره‌های زیر راست هستند یا دروغ

(الف) $\varnothing=\{\varnothing\}$

(ب) $\varnothing\in\{\varnothing\}$

(ج) $\{\varnothing\}\in\varnothing$

(د) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\varnothing\}\}$

۱۱. یك مجموعهٔ n عنصری داده شده‌است. ثابت کنید که این مجموعه $C(n,r)$ زیرمجموعهٔ r عنصری دارد*.

۲. تصریح مجموعه‌ها

یك روش ساختن یك مجموعهٔ جدید ازمجموعهٔ مفروض، مشخص کردن عنصرهایی از مجموعهٔ

* $r\leqslant n$ فرض شده است. ـم.

مفروض است که در یك ویژگی خاص صدق می‌کنند. مثلاً فرض کنیم A مجموعهٔ تمام دانشجویان این دانشگاه باشد. گزارهٔ «x زن است» برای بعضی از عنصرهای A راست و برای بقیه دروغ است. نماد

$$\{x \in A \mid x \text{ زن است}\}$$

را برای شناسایی مجموعهٔ تمام دانشجویان زن این دانشگاه به‌کار می‌بریم. همچنین

$$\{x \in A \mid x \text{ زن نیست}\}$$

مجموعهٔ تمام دانشجویان مرد این دانشگاه را مشخص می‌کند.

به‌عنوان یك قاعده، می‌گوییم متناظر با هرمجموعهٔ A و هرحکم $p(x)$ در بارهٔ $x \in A$، یك مجموعهٔ $\{x \in A \mid p(x)\}$ وجود دارد که عنصرهایش دقیقاً آن عنصرهای A، مانند x، هستندکه حکم $p(x)$ برای آنها راست است. در نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها، این قاعده را معمولاً یك اصل موضوع به‌نام اصل موضوع تصریح، می‌گیرند. نماد $\{x \in A \mid p(x)\}$ خوانده می‌شود: مجموعهٔ تمام xهای در A به‌طوری که $p(x)$ راست است. نماد به‌صورت $\{x \in A \mid p(x)\}$ که مجموعه را مشخص می‌کند، نماد مجموعه‌ساز نامیده می‌شود.

مثال ۱. فرض کنیم $\mathbf{R}$ مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی باشد. آنگاه

(الف) $\{x \in \mathbf{R} \mid x = x + ۱\}$، مجموعهٔ تهی است.

(ب) $\{x \in \mathbf{R} \mid ۲x^۲ - ۵x - ۳ = ۰\}$، مجموعهٔ $\{-۱/۲, ۳\}$ است.

(ج) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^۲ + ۱ = ۰\}$، مجموعهٔ تهی است.

چون در این کتاب و در مباحث دیگر ریاضی مجموعه‌های زیر بارها به‌کار می‌روند، نمادهای زیر را به این مجموعه‌ها تخصیص می‌دهیم:

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ عدد حقیقی است.}\}$$

$$\mathbf{Q} = \{x \mid x \text{ عدد گویا است.}\}$$

$$\mathbf{Z} = \{x \mid x \text{ عدد صحیح است.}\}$$

$$\mathbf{N} = \{n \mid n \text{ عدد طبیعی است.}\}$$

$$\mathbf{I} = \{x \in \mathbf{R} \mid ۰ \leqslant x \leqslant ۱\}$$

$$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > ۰\}$$

توجه دارید که $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ و $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}$.

امکان دارد که هرعنصر مجموعه، خود یك مجموعه باشد. مثلاً، مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های یك مجموعهٔ مفروض A، هر عنصرش یك مجموعه است. این مجموعه را

مجموعهٔ توانی[1] A می‌گویند و آن را با $\mathcal{P}(A)$ نشان می‌دهند.

مثال ۲. $\mathcal{P}(\phi)=\{\varnothing\}$، $\mathcal{P}(\{a\})=\{\varnothing, \{a\}\}$، و

$\mathcal{P}(\{a, b\})=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

قضیهٔ زیر انگیزهٔ نامگذاری «مجموعهٔ توانی» را آشکار می‌سازد.

قضیهٔ ۳. اگر A از n عنصر تشکیل شده باشد آنگاه مجموعهٔ توانی $\mathcal{P}(A)$، دقیقاً 2^n عنصر دارد.

برهان. بدیهی است که قضیه برای $A=\varnothing$ راست است. وقتی A تهی نیست، آن را $A=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ می‌گیریم. یك عنصر A مانند a_k درنظر می‌گیریم، هر زیرمجموعهٔ A دو حالت دارد: یا شامل a_k است یـا نیست. از این‌رو مسئلهٔ یافتن تعداد زیرمجموعه‌های A برمی‌گردد بـه‌این مسئله کـه n مربع خالی $\square\square\square\dots\square$ در نظر بگیریم و بـه انواع مختلف در هر یك از این مربعها عدد ۰ یا ۱ بگذاریم. چون به 2^n صورت این n مربع را با اعداد ۰ و۱ می‌توان پرکرد و هریك از n مربعهای پرشده بـا یك‌زیرمجموعهٔ A متناظر است (به‌این ترتیب که a_k را درزیرمجموعه می‌گیریم اگر وتنها اگر در kامین مربع عدد ۱ باشد)، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های A دقیقاً 2^n است.

شاید دانستن برهان دیگری که برای قضیهٔ ۳ در زیرمی‌آید، جالب باشد.

برهان دیگر. اولاً مجموعه $\varnothing$ متعلق به $\mathcal{P}(A)$ است. ثانیاً متناظر با هرعنصر $x\in A$، مجموعـهٔ $\{x\}$ متعلق به $\mathcal{P}(A)$ است. توجه کنید که تعداد زیرمجموعه‌هـای تك‌عنصری، $C(n, 1)$ است. به همین ترتیب، $C(n, 2)$ تعداد زیرمجموعه‌هـای دوعنصری A است.[2] بالاخره $C(n, n)=1$ تعداد زیرمجموعه‌های n عنصری A، یعنی‌خود A، است. با درنظر گرفتن مجموعهٔ تهی، تعدادکل زیرمجموعه‌های A برابر است با

$$C(n, 0)+C(n, 1)+\dots+C(n, n)$$

اکنون بسط دوجمله‌ای را برای $(1+1)^n$ می‌نویسیم

$$(1+1)^n=C(n, 0)+C(n, 1)+\dots+C(n, n)$$

بنابراین، تعداد عنصرهای $\mathcal{P}(A)$ برابر است با $2^n=(1+1)^n$.

---

۱. در نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها، وجود مجموعهٔ توانی مسلم فرض نشده‌است. چون وجود مجموعهٔ تـوانی از اصل موضوع تصریح نتیجه نمی‌شود، به‌یـك اصل موضوع جدید نیاز است. این‌موضوع جدید را معمولاً اصل موضوع مجموعه‌های توانی می‌گویندکه به‌صورت زیر بیان می‌شود، متناظر با هرمجموعه، مجموعه‌ای از مجموعه‌ها وجود داردکـه عنصرهایش از تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ داده شده تشکیل یافته‌است.

۲. به‌مسئلهٔ ۱۱، تمرین ۱.۲ رجوع کنید.

تمرین ۲۰۲

۱. عنصرهای هریك از مجموعه‌های زیر را درمیان دوابرو بنویسید.

$A=\{x\in \mathbf{N}|x<۵\}$

$B=\{x\in \mathbf{Z}|x^{۲}\leqslant ۲۵\}$

$C=\{x\in \mathbf{Q}|۱۰x^{۲}+۳x-۱=۰\}$

$D=\{x\in \mathbf{R}|x^{۳}+۱=۰\}$

$E=\{x\in \mathbf{R}_{+}|۴x^{۲}-۴x-۱=۰\}$

۲. عناصر هریك از مجموعه‌های زیر را در میان دوابرو نمایش دهید.

$A=\{x\in \mathbf{N}|۵<x<۳\}$

$B=\{x\in \mathbf{Z}|۲۵\leqslant x^{۲}<۳۶\}$

$C=\{x\in \mathbf{Q}|x^{۳}-۶x^{۲}+۱۱x-۶=۰\}$

$D=\{x\in \text{اروپا}|\text{پایتخت است } x\}$

۳. هریك از مجموعه‌های زیر را با استفاده از نماد مجموعه‌ساز بنویسید.

$A=\{۱,\ ۴,\ ۹,\ ۱۶,\ ۲۵,\ \cdots\}$

$B=۲,\ ۴,\ ۶,\ ۸,\ ۱۰,\ \cdots\}$

$C=\left\{۰,\ \frac{۱}{۲},\ \frac{۲}{۳},\ \frac{۳}{۴},\ \cdots\right\}$

$D=\{۲,\ ۹,\ ۲۸,\ ۶۵,\ \cdots\}$

$E=\{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$

۴. هریك از مجموعه‌های زیر را با نماد مجموعه‌ساز نشان دهید.

$A=\{۱,\ ۲,\ ۳\}$

$B=\left\{-۱,\ -\frac{۲}{۳},\ -\frac{۱}{۳},\ ۰\right\}$

$C=\{۱,\ ۳,\ ۵,\ ۷,\ ۹,\ \cdots\}$

$D=\{۱-\sqrt{۳},\ ۱+\sqrt{۳}\}$

۵. عنصرهای مجموعهٔ توانی مجموعهٔ $\{x, \{y, z\}\}$ چه هستند؟ این مجموعهٔ توانی چند عنصر دارد؟

۶. آیا مجموعهٔ توانی مجموعهٔ تهی، تهی است؟ چرا؟

۷. مجموعهٔ توانی مجموعهٔ توانی مجموعهٔ تهی چند عنصر دارد؟

۸. مجموعه $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$ را بنویسید. آیا این مجموعه بیش از مجموعهٔ $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ عنصر دارد؟

۹. آیا برای هرمجموعهٔ A و هرمجموعهٔ B، $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cup B)$؟ چرا؟

۱۰. آیا برای هرمجموعهٔ A و هرمجموعهٔ B، $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cap B)$؟ چرا؟

۱۱. فرض کنید B یك زیرمجموعهٔ A باشد، و $\mathcal{P}(A:B)=\{X\in\mathcal{P}(A)|X\supseteq B\}$.

(الف) فرض کنید $B=\{a, b\}$ و $A=\{a, b, c, d, e\}$. عنصرهای مجموعهٔ $\mathcal{P}(A:B)$ را بنویسید؛ تعداد این عنصرها را تعیین کنید.

(ب) نشان دهید که $\mathcal{P}(A:\varnothing)=\mathcal{P}(A)$.

۱۲. A را یك مجموعهٔ n عنصری و B را یك زیرمجموعهٔ m عنصری A فرض کنید، $n\geqslant m$.

(الف) تعداد عنصرهای مجموعهٔ $\mathcal{P}(A:B)$ را پیدا کنید.

(ب) B را $\varnothing$ گرفته، قضیهٔ ۳ را از (الف) نتیجه بگیرید.

۳. اجتماع و اشتراك

درحساب می‌توانیم دوعدد را جمع، ضرب، یا تفریق کنیم. درنظریهٔ مجموعه‌ها، سه عمل اجتماع، اشتراك و متممگیری به‌ترتیب نظیرجمع، ضرب و تفریق در اعداد هستند.

تعریف ۳. اجتماع دومجموعهٔ A و B، که با $A\cup B$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ تمام عنصرهایی است که حداقل به یکی از دومجموعهٔ A و B متعلق‌اند. یعنی $x\in A\cup B$ اگر وتنها اگر $x\in A \vee x\in B$.

تعریف ۴. اشتراك دومجموعهٔ A و B، که با $A\cap B$ نمایش داده می‌شود، مجموعهٔ تمام عنصرهایی است که هم متعلق به A هستند و هم متعلق به B. یعنی

$$A\cap B=\{x|(x\in A)\wedge(x\in B)\}\text{، یا } \{x\in A|x\in B\}.$$

اگر $A\cap B=\varnothing$، آنگاه دومجموعهٔ A و B را مجزا گویند.

به‌عنوان مثال، اگر $A=\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B=\{۳, ۴, ۵\}$، آنگاه $A\cup B=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $A\cap B=\{۳, ۴\}$؛ اگر $\mathbf{Im}$ نمایانگر مجموعهٔ اعداد موهومی باشد، آنگاه مجموعه‌های $\mathbf{Im}$ و $\mathbf{R}$ مجزا هستند.

مثال ۳. مجموعه‌های $\mathbf{I}$، $\mathbf{N}$، $\mathbf{Z}$، ... را که در بخش قبل تعریف کردیم، در نظر می‌گیریم.

(الف) $\mathbf{I}\cap\mathbf{Z}=\{0,1\}$ و $\mathbf{N}\cap\mathbf{I}=\{1\}$.

(ب) $\mathbf{Z}\cup\mathbf{Q}=\mathbf{Q}$ و $\mathbf{Z}\cap\mathbf{Q}=\mathbf{Z}$.

(ج) $\mathbf{I}\cup\mathbf{I}=\mathbf{I}$ و $\mathbf{I}\cap\mathbf{I}=\mathbf{I}$.

قضیهٔ ۴. گیریم X یک‌مجموعه و A، B، و C زیرمجموعه‌هایی‌از X هستند. آنگاه داریم:

(الف) یکه‌ها

$$A\cup\varnothing=A$$

$$A\cap X=A$$

(ب) قانونهای خودتوانی

$$A\cup A=A$$

$$A\cap A=A$$

(ج) قانونهای جابه‌جایی

$$A\cup B=B\cup A$$

$$A\cap B=B\cap A$$

(د) قانونهای شرکتپذیری

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

(ه) قانونهای پخشپذیری

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

برهان. برهان قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

(د) بنابر تعریف ۳،

$$x\in A\cup(B\cup C)\Longleftrightarrow x\in A\vee(x\in B\cup C)$$

و

$$x\in B\cup C\Longleftrightarrow x\in B\vee x\in C$$

پس

$$x\in A\cup(B\cup C)\Longleftrightarrow x\in A\vee(x\in B\vee x\in C)$$

بنابر قانون شرکتپذیری در ترکیب فصلی، $(x\in A)\vee(x\in B\vee x\in C)$ با

$(x \in A \vee x \in B) \vee (x \in C)$ هم‌ارز است. بنابر تعریف ۳، گزارهٔ اخیر با $(x \in A \cup B) \vee (x \in C)$ هم‌ارز است، و از این‌رو $x \in (A \cup B) \cup C$. پس، داریم

$$x \in A \cup (B \cup C) \Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$$

پس بنابر تعریف ۱، $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

برهان بالا را می‌توان به‌صورتی روشن درقالبی منظم از مرحله‌های منطقی اساسی خلاصه‌کرد و برای سهولت ارجاع، دلیل درستی هرمرحله را در سمت چپ آن نوشت.

$x \in A \cup (B \cup C) \Longleftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \cup C)$	تعریف $\cup$
$\Longleftrightarrow (x \in A) \vee [(x \in B) \vee (x \in C)]$	تعریف $\cup$
$\Longleftrightarrow [(x \in A) \vee (X \in B)] \vee (x \in C)$	شرکتپذیری $\vee$
$\Longleftrightarrow (x \in A \cup B) \vee (x \in C)$	تعریف $\cup$
$\Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$	تعریف $\cup$

از این‌رو، بنابر تعریف ۱، ثابت کردیم که $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

دانشجویان باید سعی کنند ارزش این‌نوع برهان دقیق منظم از راه منطق‌را دریابند.

برهان $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

(ه) دراین قسمت نیز فقط قسمت اول حکم (ه) را ثابت وقسمت دیگر را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

$x \in [A \cap (B \cup C)] \Longleftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B \cup C)]$	تعریف $\cap$
$\Longleftrightarrow (x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)]$	تعریف $\cup$
$\Longleftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)]$	قانون‌پخشپذیری منطق (فصل اول)
$\Longleftrightarrow [(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)]$	تعریف $\cap$
$\Longleftrightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$	تعریف $\cup$

از این‌رو، بنابر تعریف ۱، $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

تمرین ۳.۲

۱. ثابت کنید که $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

۲. ثابت کنید $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

۳. قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) قضیهٔ ۴ را ثابت کنید.

۴. قسمت دوم قضیهٔ ۴ (د) را ثابت کنید.

۵. قسمت دوم قضیه ۴ (هـ) را ثابت کنید.

۶. ثابت کنید که

(الف) از $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$، $(A \cup B) \subseteq C$ نتیجه می‌شود.

(ب) از $A \subseteq B$ و $A \subseteq C$، $A \subseteq (B \cap C)$ نتیجه می‌شود.

[راهنمایی: می‌توانید از قضیهٔ ۵ فصل ۱ استفاده کنید.]

۷. ثابت کنید $C \subseteq A \Longleftrightarrow (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

۸. ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ آنگاه $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

۹. ثابت کنید $A \cup B = A \cap B \Longleftrightarrow A = B$.

۱۰. ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ آنگاه برای هر مجموعهٔ C، $A \cup C \subseteq B \cup C$ و $A \cap C \subseteq B \cap C$.

۱۱. ثابت کنید که اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$ آنگاه $A \cup B \subseteq C \cup D$.

۱۲. درستی یا نادرستی دوعبارت زیر را تحقیق کنید

(الف) اگر $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$.

(ب) اگر $A \cap B = A \cap C$ آنگاه $B = C$.

۱۳. ثابت کنید که برای مجموعه‌های $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$، داریم

(الف)

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$$

۱۴. ثابت کنید

(الف) اگر برای $i = 1, 2, \ldots, n$، $A_i \subseteq B$، آنگاه $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \subseteq B$.

(ب) اگر برای $i = 1, 2, \ldots, n$، $A \subseteq B_i$، آنگاه $A \subseteq B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$.

۴. مجموعه‌های متمم

درنظریهٔ مجموعه‌ها، عمل متممگیری، مشابه عمل تفریق درحساب است.

تعریف ۵. اگر A و B دومجموعه باشند، متمم B نسبت به A مجموعهٔ $A - B$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

دراین تعریف، $B \subseteq A$ فرض نشده است.

مثال ۴. گیریم

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{و} \quad B = \{c, d, e, f\}$$

مجموعه‌های $A - B$ و $A - (A \cap B)$ را پیدا کنید.

حل:

$$A-B=\{a,\ b,\ c,\ d\}-\{c,\ d,\ e,\ f\}=\{a,\ b\}$$

و

$$A-(A\cap B)=\{a,\ b,\ c,\ d\}-\{c,\ d\}=\{a,\ b\}$$

اگرچه مجموعهٔ جهانی، یعنی مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها، به‌مفهوم مطلق آن وجود ندارد (به پارادوکس راسل در بخش ۷ نگاه کنید)، اما می‌توان فرض کرد که تمام مجموعه‌هایی که از این به بعد در این کتاب آورده می‌شوند، زیر مجموعه‌هایی از یك مجموعهٔ ثابت U هستند که می‌توان آن را (موقتاً) به‌عنوان یك مجموعهٔ جهانی، به‌معنای محدود آن، در نظر گرفت. برای ارائه قواعد اساسی مربوط به‌متممگیری به‌ساده‌ترین صورت ممکن، تمام متممها نسبت به‌این مجموعه‌ی U محاسبه می‌شوند، مگر اینکه خلاف آن قید شده باشد. در این حالت $U-A$ را با A' نمایش می‌دهیم.

مثال ۵. نشان دهید که $A-B=A\cap B'$.

حل:

$x\in A\cap B'\equiv(x\in A)\wedge(x\in U-B)$	تعریف $\cap$، تعریف $'$
$\equiv(x\in A)\wedge[(x\in U)\wedge(x\notin B)]$	تعریف ۵
$\equiv[(x\in A)\wedge(x\in U)]\wedge(x\notin B)$	شرکتپذیری
$\equiv(x\in A\cap U)\wedge(x\notin B)$	تعریف $\cap$
$\equiv(x\in A)\wedge(x\notin B)$	$A\cap U=A$
$\equiv x\in(A-B)$	تعریف ۵

پس بنابر تعریف ۱، $A\cap B'=A-B$.

قضیهٔ ۵. گیریم A و B دو مجموعه هستند. آنگاه

(الف) $(A')'=A$.

(ب) $\varnothing'=U$ و $U'=\varnothing$.

(ج) $A\cap A'=\varnothing$ و $A\cup A'=U$.

(د) $A\subseteq B$ اگر و تنها اگر $B'\subseteq A'$.

برهان. قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) به‌آسانی از تعریفها به‌دست می‌آیند و آوردن برهانهای آنها را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم و برهان قسمت (د) را

ارائه می‌دهیم:

$A\subseteq B \equiv [(x\in A)\to(x\in B)]$	تعریف $\subseteq$
$\equiv [(x\notin B)\to(x\notin A)]$[1]	قانون عکس نقیض
$\equiv [(x\in B')\to(x\in A')]$	تعریف $'$
$\equiv (B'\subseteq A')$	تعریف $\subseteq$

پس ثابت کردیم که $(A\subseteq B)\equiv(B'\subseteq A')$.

دربرهان بالا نیز نمادها و قوانین منطق (فصل ۱) را به‌کار بردیم. با این‌روش توانستیم به‌طور دقیق و مرتب هرمرحلهٔ برهان را عرضه‌کنیم و دلیلها را درسمت چپ‌آن بیاوریم. به‌خواننده توصیه می‌کنیم هرجا امکان دارد برای برهانها از فصل ۱ به‌طور کامل استفاده کند.

مفیدترین ویژگی‌متممها، قضیهٔ دمورگن‌است‌که در زیرمی‌آید. شایسته است خواننده این قضیه را با قانون دمورگن فصل ۱ مقایسه‌کند.

قضیهٔ ۶. (قضیهٔ دمورگن). اگر A و B دومجموعهٔ دلخواه باشند، آنگاه

(الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

(ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

برهان. (الف):

$x\in(A\cup B)'\equiv\sim[x\in(A\cup B)]$	تعریف $'$
$\equiv\sim[(x\in A)\vee(x\in B)]$	تعریف $\cup$
$\equiv\sim(x\in A)\wedge\sim(x\in B)$	دمورگن درمنطق
$\equiv(x\in A')\wedge(x\in B')$	تعریف $'$
$\equiv x\in(A'\cap B')$	تعریف $\cap$

پس بنابرتعریف ۱، $(A\cup B)'=A'\cap B'$.

اثبات (ب) به‌خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۶. سه مجموعهٔ دلخواه A، B، و C مفروض‌اند. تعیین کنید آیا مجموعهٔ $A\cap(B-C)$ با مجموعهٔ $(A\cap B)-(A\cap C)$ مساوی است.

---

۱. یادآوری می‌شود که نقیض $x\in B$، یعنی $\sim(x\in B)$، با $x\notin B$ نمایش داده می‌شود.

حل:

$$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$$ مثال ۵

$$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$$ قضیهٔ دمورگن (قضیهٔ ۶)

$$=(A\cap B\cap A')\cup(A\cap B\cap C')$$ پخشپذیری

$$=(A\cap A'\cap B)\cup(A\cap B\cap C')$$ جابه‌جایی

$$=\varnothing\cup[A\cap(B\cap C')]$$ قضیهٔ ۵(ج): $A\cap A'=\varnothing$

$$=A\cap(B-C)$$ قضیهٔ ۴ (الف)، مثال ۵

بنابراین ثابت کردیم که $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

تمرین ۴۰۲

۱. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید که $A-B=A-(B\cap A)$.

۲. قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) قضیهٔ ۵ را ثابت کنید.

۳. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید $B\subseteq A'$ اگر و تنها اگر $A\cap B=\varnothing$.

۴. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید $A\cap B=\varnothing$ اگر و تنها اگر $A\cap B'=A$.

۵. ثابت کنید که برای هر دومجموعهٔ A و B، $A'-B'=B-A$.

۶. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید $(A-B)\cup B=A$ اگر و تنها اگر $B\subseteq A$.

۷. قضیهٔ ۶ (ب) را ثابت کنید.

۸. گیریم A، B و C سه مجموعه هستند. ثابت کنید

(الف) $(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$،

(ب) $(A-C)\cap(B-C)=(A\cap B)-C$.

۹. گیریم $A_1, A_2, \dots, A_n$ و C مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A_1-C)\cup(A_2-C)\cup\cdots\cup(A_n-C)=(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)-C$$

۱۰. گیریم $B_1, B_2, \dots, B_n$ و C مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(B_1-C)\cap(B_2-C)\cap\cdots\cap(B_n-C)=(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n)-C$$

۱۱. گیریم A و B دومجموعه هستند. ثابت کنید A و $B-A$ مجزا هستند و نیز $A\cup B=A\cup(B-A)$. (این نشان می‌دهد چگونه $A\cup B$ را به‌اجتماع دومجموعهٔ مجزا بنویسیم.)

۱۲. ثابت کنید که $A\cup B=(A'\cap B')'$ و $A\cap B=(A'\cup B')'$.

۱۳. مجموعه‌های A و B چه شرطهایی باید داشته باشند تا $A-B=B-A$ برقرار باشد؟

۱۴. گیریم A، B و C سه مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$$

۱۵. گیریم A، B و C سه مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A-B)-C=A-(B\cup C)$$

۱۶. گیریم A و B دومجموعه هستند. ثابت کنید $A\cap B'=\varnothing=A'\cap B$ اگر و تنها اگر $A=B$.

۱۷. گیریم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ X هستند. درستی یا نادرستی رابطهٔ زیر را تحقیق کنید

$$(X-A)\cap(X-B)=X-(A\cap B)$$

۱۸. گیریم A، B و C سه مجموعه هستند. ثابت کنید

(الف) $(A\cap B\cap C)'=A'\cup B'\cup C'$

(ب) $(A\cup B\cup C)'=A'\cap B'\cap C'$.

این نتایج را به گزاره‌هایی که مربوط به n مجموعهٔ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ هستند، تعمیم دهید.

۱۹. دومجموعهٔ اختیاری A و B مفروض‌اند، درستی یا نادرستی حکمهای زیر را تعیین کنید.

(الف) $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cap B)$

(ب) $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cup B)$.

۲۰. ثابت کنید که اگر $A\subseteq C$، $B\subseteq C$، $A\cup B=C$ و $A\cap B=\varnothing$، آنگاه $A=C-B$.

۲۱. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

۲۲. فرض کنید X مجموعهٔ توانی یك مجموعهٔ مفروض و ناتهی U باشد. در X عمل دوتایی $\oplus$ را که تفاضل متقارن نامیده می‌شود، چنین تعریف می‌کنیم

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)\qquad A,\ B\in X$$

ثابت کنید برای A، B، و C در X

(الف) $A\oplus B\in X$

(ب) $A\oplus B=B\oplus A$

(ج) $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$

(د) $A\oplus\varnothing=A$

(ه) $A \oplus A = \varnothing$

۲۳. با فرضهای مسئلهٔ ۲۲ی بالا، ثابت کنید

(الف) $A \oplus A' = U$

(ب) $A \oplus C = A$ اگر و تنها اگر $C = \varnothing$

(ج) $A \oplus C = \varnothing$ اگر و تنها اگر $C = A$

(د) اگر $A \oplus C = B \oplus C$ آنگاه $A = B$

۲۴. با فرضهای مسئلهٔ ۲۲ی بالا، ثابت کنید

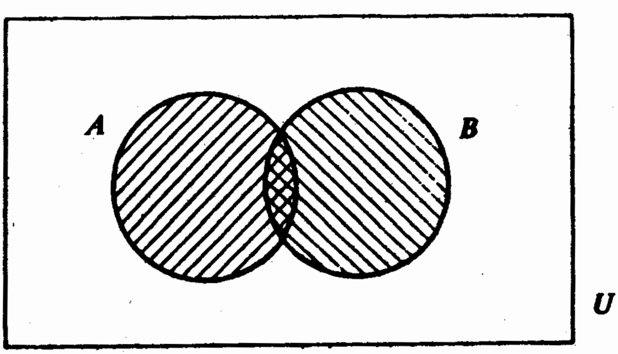
$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

تذکر: دستگاهی مانند $(X, \oplus)$ که از یك مجموعه و یك عمل دوتایی تشکیل شده است و درشرطهای (الف) تا (ه)ی مسئلهٔ ۲۲ صدق می کند یك گروه (جبری) نامیده می‌شود.

۵. نمودار ون*

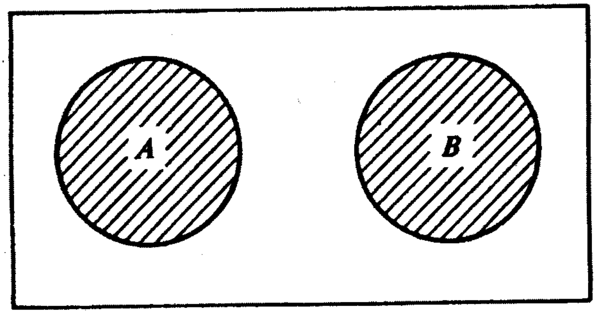
برای اینکه اعمال روی مجموعه و نتایج آنها را به چشم ببینیم، نمودارهایی را که به‌نمودارهای ون معروف هستند، معرفی می‌کنیم. مجموعهٔ فرضی و نسبی جهانی U را با یك‌مستطیل و زیرمجموعه‌های U را با دایره‌هایی درداخل این‌مستطیل نشان می‌دهیم. مثلاً، در شکل ۱ دومجموعهٔ A و B را با دایره‌های تیره نشان داده‌ایم. قسمت تیره‌تر، مجموعهٔ اشتراك $A \cap B$ و تمام سطح تیره اجتماع $A \cup B$ است.

شکل ۲ نشان می‌دهد که دومجموعهٔ A و B مجزا هستند. سطح تیره درشکل ۳ متمم مجموعهٔ A یعنی A' را نمایان می‌سازد. درشکل ۴ مجموعهٔ $B - A$، متمم B نسبت به A، با قسمت تیرهٔ شکل مشخص شده‌است.

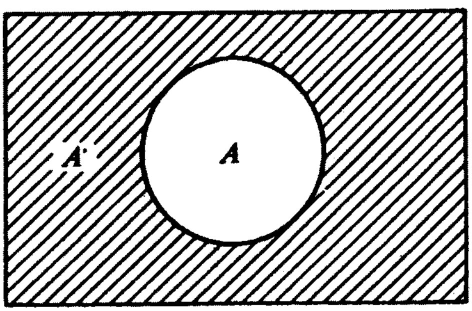


شکل ۱

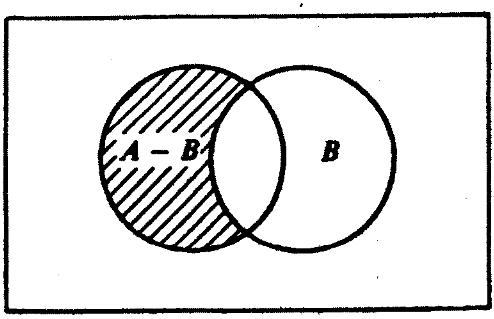
* Venn diagram



شکل ۲



شکل ۳



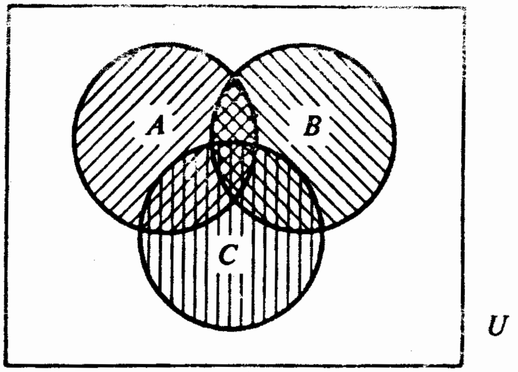
شکل ۴

شکل ۵ نمونه‌ای است از نمودار ون برای سه مجموعهٔ A، B و C. این سه مجموعه، مجموعه جهانی U را به هشت قسمت که درشکل ۶ مشخص شده‌اند تقسیم می کنند.

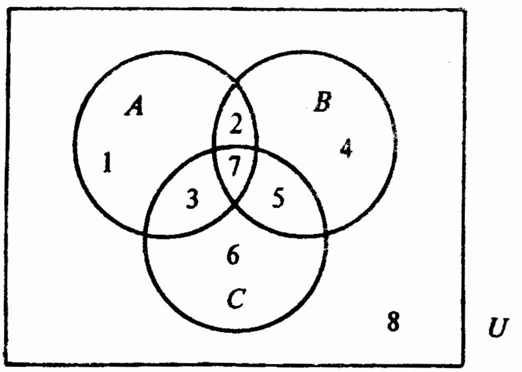
با دیاگرام بالا می‌توانیم مثلاً درستی قانون پخش‌پذیری

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

را به‌صورت زیر تـوجیه‌کنیم: در شکل ۶، مجموعهٔ $A\cap(B\cup C)$ از سطوح ۲، ۳ و ۷



شکل ۵



شکل

تشکیل شده‌است. از طرف دیگر، $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ اجتماع سطوح ۲ و ۷ و سطوح ۳ و ۷ است. بنابراین، تساوی $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ قابل‌قبول به‌نظر می‌آید. البته در ریاضیات این توجیه و نظایر آن را نمی‌توان به‌عنوان یک برهان قبول کرده

تمرین ۵.۲

۱. یک نمودار ون برای $A\subset B$ رسم کنید.

۲. برای $A\cap B'$، $A'\cap B$ و $A'\cap B'$ نمودارهای ون رسم کنید.

۳. برای $A\cup B'$، $A'\cup B$ و $A'\cup B'$ نمودارهای ون رسم کنید.

۴. یک نمودار ون برای $A\oplus B$ رسم کنید.

درمسائل ۵ تا ۱۳، نمودارهای ون رسم کرده و هریک از رابطه‌ها را توجیه کنید.

۵. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

۶. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

۷. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

۸. $(A\cup B)'=A'\cap B'$.

۹. $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

۱۰. $A\cap(B-A)=\varnothing$ و $A\cup(B-A)=A\cup B$.

۱۱. $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$.

۱۲. $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$ [راهنمایی: برای ۱۲ تا ۱۴، ازشکل۶ استفاده کنید].

۱۳. $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$.

درمسائل ۱۴ تا ۲۰ برای اثبات نادرستی رابطه‌های زیر از نمودار ون استفاده‌کنید.

۱۴. $A\oplus(B\cap C)=(A\oplus B)\cap(A\oplus C)$.

۱۵. اگر $x\in A$ و $A\not\subseteq B$، آنگاه $x\notin B$ [مسئلهٔ ۸ (هـ)، تمرین ۱۰۲].

۱۶. اگر $A\not\subseteq B$ و $B\not\subseteq C$، آنگاه $A\not\subseteq C$ [مسئلهٔ ۸ (د)، تمرین ۱۰۲].

۱۷. اگر $A\not\subseteq B$ و $B\not\subseteq C$، آنگاه $A\not\subseteq C$ [مسئلهٔ ۸ (ج)، تمرین ۱۰۲].

۱۸. (الف) اگر $A\cup B=A\cup C$ آنگاه $B=C$ [مسئله ۱۲، تمرین ۳۰۲].

(ب) اگر $A\cap B=A\cap C$ آنگاه $B=C$.

۱۹. اگر A و B زیرمجموعه‌های X باشند، آنگاه

$$(X-A)\cap(X-B)=X-(A\cap B)$$

[مسئلهٔ ۱۷، تمرین ۴۰۲].

۲۰. اگر A و B زیرمجموعه‌های X باشند، آنگاه

$$(X-A)\cup(X-B)=X-(A\cup B)$$

۶. خانواده‌های مجموعه‌های اندیسدار

یادآوری می‌شود که مجموعه دسته‌ای از عنصرهای متمایز است. به عبارتی ساده ولی نه چندان دقیق، یک‌خانواده دسته‌ای از اشیاء است که ممکن‌است از یکدیگر متمایز نباشند. هریک از این‌اشیاء عضو خانواده نامیده می‌شود. مثلاً، $\{a, a, a\}$ یک‌خانواده با سه عضو a، a و a است، اما همین خانوادهٔ $\{a, a, a\}$ اگر به عنوان یک مجموعه در نظر گرفته شود، مجموعهٔ تک‌عنصری $\{a\}$ است که تنها یک عنصر a دارد.

فرض‌کنید Γ یک مجموعه است و با هر عنصر Γ مانند γ یک مجموعهٔ A_γ متناظر است. خانوادهٔ تمام مجموعه‌های نظیر A_γ را خانوادهٔ مجموعه‌های اندیسدار گویند.

همچنین می‌گویند خانوادهٔ مجموعه‌ها بـا مجموعهٔ Γ اندیسدار شده‌است و آن را با نماد زیر نشان می‌دهند

$$\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$$

مثلاً خانوادهٔ مجموعه‌های ... ,$\{۳,۶\}$,$\{۲,۴\}$,$\{۱,۲\}$ را می‌توان خانوادهٔ مجموعه‌های اندیسداری در نظر گرفت که با مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbf{N}$ اندیسدار شده‌اند و در آن به‌ازای هر n، $A_n = \{n, ۲n\}$. این خانوادهٔ مجموعه‌هـا را می‌توان با نماد $\{\{n, ۲n\} | n \in \mathbf{N}\}$ نشان داد.

یك خانوادهٔ دلخواه مجموعه‌ها ممکن است اندیسدار نباشد، اما در بسیاری ازحالتها به‌آسانی می‌توان یك مجموعهٔ Γ برای اندیسدار کردن خانوادهٔ مجموعه‌های داده شده پیدا کرد.

مثال ۰۷ خانوادهٔ $\mathscr{F}$ متشکل از مجموعه‌های $\varnothing$، $\mathbf{N}$، $\mathbf{Z}$، $\mathbf{Q}$، $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}$ را اندیسدار کنید.

حل: چون این خانواده شش عضو داردکـه دو عضو آن مجموعهٔ $\mathbf{R}$ است، Γ را مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم $A_۱ = \varnothing$، $A_۲ = \mathbf{N}$، $A_۳ = \mathbf{Z}$، $A_۴ = \mathbf{Q}$، $A_۵ = \mathbf{R}$ و $A_۶ = \mathbf{R}$. اکنون این خانواده‌ای است ازمجموعه‌هـای اندیسدار.

تمام نمادهایی راکـه برای مجموعه‌ها به‌کار برده‌ایم، برای خانواده‌هـا نیز به‌کار می‌بریم. به‌عنوان مثال، $\varnothing \in \mathscr{F}$ و $\mathbf{R}_+ \notin \mathscr{F}$ به‌این معنی است کـه $\varnothing$ عضوی از خانوادهٔ $\mathscr{F}$ است و $\mathbf{R}_+$ عضوی از $\mathscr{F}$ نیست. همچنین می‌توانیم بنویسیم $\mathscr{F} = \{\varnothing, \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{R}\}$.

اکنون مفاهیم اجتماع $\cup$ واشتراك $\cap$ (تعریفهای ۳ و ۴) را به‌خانوادهٔ مجموعه‌هـا تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۶. گیریم $\mathscr{F}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌ها باشد.۱جتماع مجموعه‌های خانوادهٔ $\mathscr{F}$، مجموعهٔ تمام عنصرهایی است کـه به‌یکی از مجموعه‌های خانوادهٔ $\mathscr{F}$، مانند A، متعلق هستند. این اجتماع را با نماد $\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A$ یا $\cup \mathscr{F}$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = \{x \in U | x \in A \text{ ،} A \in \mathscr{F} \text{ به‌ازای یك}\}$$

اگر خانوادهٔ $\mathscr{F}$ با Γ اندیسگذاری شده‌باشد، می‌توان نماد دیگری را که در زیر می‌آید به‌کار برد.

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \in U | x \in A_\gamma \text{ ،} \gamma \in \Gamma \text{ به‌ازای یك}\}$$

اگـر Γ، مجموعـهٔ انـدیس، متناهـی بـاشد، یعنـی بـه‌ازای یـك عـدد طبیعی n، $\Gamma = \{۱, ۲, \ldots, n\}$، آنگاه اغلب به‌جای $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ از نمادهایی مانند

$$\bigcup_{i=۱}^{n} A_i \quad \text{یا} \quad A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n$$

که به‌ذهن نزدیکتر هستند، استفاده می‌شود.

مثال ۸. اجتماع خانوادهٔ مجموعه‌های زیر را پیدا کنید

$$\{۱\}, \{۲, ۳\}, \{۳, ۴, ۵\}, \ldots, \{n, n+۱, \ldots, ۲n-۱\}$$

حل. این خانوادهٔ مجموعه‌ها را می‌توان با $\Gamma = \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ اندیسگذاری کرد، دراین‌صورت به‌ازای هر $i \in \Gamma$، $A_i = \{i, i+۱, \ldots, ۲i-۱\}$. مسئله برمی‌گردد به‌یافتن مجموعهٔ $\bigcup_{i=۱}^{n}\{i, i+۱, \ldots, ۲i-۱\}$. توجه کنید که هرعدد صحیح بین ۱ تا $۲n-۱$ به‌بعضی از این A_iهای این خانواده متعلق است، و هیچ عنصر دیگری به‌هیچ‌یك از این A_iها متعلق نیست. پس

$$\bigcup_{i=۱}^{n}\{i, i+۱, \ldots, ۲i-۱\} = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۲n-۱\}$$

تعریف ۷. گیریم $\mathscr{F}$ خانواده‌ای دلخواه ازمجموعه‌هاست. اشتراك مجموعه‌های $\mathscr{F}$، مجموعهٔ تمام عنصرهایی‌است که به‌تمام مجموعه‌های $\mathscr{F}$ تعلق دارند. اشتراك را با نماد $\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A$ یا $\bigcap \mathscr{F}$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A = \{x \in U | x \in A \text{ ،} A \in \mathscr{F} \text{ به‌ازای هر}\}$$

گزارهٔ «به‌ازای هر $A \in \mathscr{F}$، $x \in A$» راکه در اینجا آمده است، می‌توان به‌صورت «$A \in \mathscr{F} \rightarrow x \in A$» نیز بیان کرد. طرز بیان اخیر، همان‌گونه که در قضیهٔ ۷ خواهیم دید، برای اثبات قضایا مزیت دارد.

اگر خانوادهٔ $\mathscr{F}$ با Γ اندیسگذاری شده‌باشد، می‌توان نماد دیگری را که در زیر می‌آید به‌کار برد.

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U | x \in A_\gamma \text{ ،} \gamma \in \Gamma \text{ به‌ازای هر}\}$$

اگر Γ، مجموعهٔ اندیس، متناهی باشد، یعنی به‌ازای یك عدد صحیح مثبت n، $\Gamma = \{۱, ۲, \ldots, n\}$، آنگاه همانند حالت اجتماع به‌جای $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$، می‌نویسیم:

$$\bigcap_{i=۱}^{n} A_i \quad \text{یا} \quad A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_n$$

گیریم a و b دو عدد حقیقی هستند. منظور از فاصلهٔ باز (a, b)، مجموعهٔ $\{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$ است. پس اگر $a \geqslant b$ آنگاه $(a, b) = \varnothing$.

مثال ۹. اشتراك خانوادهٔ فاصله‌های باز زیر را پیدا کنید

$$(۰, ۱), \left(۰, \frac{۱}{۲}\right), \left(۰, \frac{۱}{۳}\right), \ldots$$

حل: باید مجموعهٔ $\bigcap_{n\in N}(0, 1/n)$ را بیابیم. آشکارا دیده می‌شود که خانوادهٔ داده شده یك دنباله از فاصله‌های «کاهشی» $(0, 1/n)$ است که در آن فاصلهٔ $(0, 1/n)$، وقتی که n بزرگ می‌شود، به‌مجموعهٔ تهی $\varnothing$ «می‌گراید». بدین‌جهت می‌توانیم حدس بزنیم که اشتراك $\bigcap_{n\in N}(0, 1/n)$ باید مجموعهٔ تهی باشد. حال ثابت می‌کنیم که این حدس درست است. برخلاف حکم، فرض کنیم که عددحقیقی $a\in\bigcap_{n\in N}(0, 1/n)$ وجود دارد. آنگاه برای هر $n\in\mathbf{N}$ باید $0<a<1/n$ برقرار باشد. اما می‌دانیم که برای هرعدد ثابت $a>0$ همیشه یك $n\in\mathbf{N}$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ وجود دارد که $1/n<a$. این تناقض نشان می‌دهد که $\bigcap_{n\in N}(0, 1/n)=\varnothing$.

قضیهٔ ۷. گیریم $\{A_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ خانوادهٔ تهی مجموعه‌ها است. یعنی $\Gamma=\varnothing$. آنگاه

(الف) $\bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma=\varnothing$

(ب) $\bigcap_{\gamma\in\phi}A_\gamma=U$

برهان. (الف) برای اثبات $\bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma=\varnothing$، هم‌ارز آن «برای هر x (در U)، $x\notin\bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma$» را ثابت می‌کنیم

$$x\notin\bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma\equiv\sim(x\in\bigcup_{\gamma\in\phi}A_\gamma) \quad \text{نماد } \notin$$

$$\equiv\sim(x\in A_\gamma, \quad \text{برای یك } \gamma\in\varnothing) \quad \text{تعریف ۶}$$

$$\equiv(x\notin A_\gamma, \quad \text{برای هر } \gamma\in\varnothing) \quad \text{نقیض‌سازی سور (فصل ۱)}$$

$$\equiv(\gamma\in\varnothing\rightarrow x\notin A_\gamma)$$

چون $\gamma\in\varnothing$ یك تناقض است، بنا برقضیهٔ۷ (ج) فصل۱، گزارهٔ اخیر برای هر $x\in U$ درست است. پس برهان قسمت (الف) کامل است.

(ب) ثابت می‌کنیم که برای هر x در U، $x\in\bigcap_{\gamma\in\phi}A_\gamma$. توجه کنید که

$$x\in\bigcap_{\gamma\in\phi}A_\gamma\equiv(x\in A_\gamma, \forall\gamma\in\varnothing) \quad \text{تعریف ۷}$$

$$\equiv(\gamma\in\varnothing\rightarrow x\in A_\gamma)$$

چنانکه در برهان قسمت (الف) شرح دادیم، گزارهٔ اخیر برای هر $x\in U$ راست‌است. پس اثبات کامل است.

خیلی ازقضایای مربوط به‌اعمال روی تعدادی متناهی‌مجموعه را می‌توان به‌قضایایی که به‌اعمال روی یك خانوادهٔ دلخواه مجموعه‌هامربوط می‌شوند تعمیم داد. مثلاً، قضیهٔ زیر تعمیم قضیهٔ دمورگن است. توصیه می‌شود دانشجو این قضیه را با قضیهٔ ۶ مقایسه‌کند.

قضیهٔ ۸. (تعمیم قضیهٔ دمورگن). گیریم $\{A_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ خانواده‌ای دلخواه‌ازمجموعه‌هاست. آنگاه

(الف) $(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)'=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A'_\gamma$
(ب) $(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)'=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A'_\gamma$

برهان. ما فقط قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم و قسمت (ب) را به‌دانشجو وا می‌گذاریم.

$$x\in\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\Big)'\equiv\sim\Big(x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\Big)$$ تعریف ′

$$\equiv\sim(\exists\gamma\in\Gamma)(x\in A_\gamma)$$ تعریف ۶

$$\equiv(\forall\gamma\in\Gamma)(x\notin A_\gamma)$$ نقیض‌سازی سور (فصل ۱)

$$\equiv(\forall\gamma\in\Gamma)(x\in A'_\gamma)$$ تعریف ′

$$\equiv x\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A'_\gamma$$ تعریف ۷

پس بنا بر تعریف ۱، $(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)'=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A'_\gamma$.

قضیهٔ زیر یك تعمیم قضیهٔ ۴ (ه) است.

قضیهٔ ۹. (تعمیم قانونهای پخشپذیری). گیریم A یك مجموعه و $\mathscr{G}=\{B_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ یك خانوادهٔ دلخواه مجموعه‌هاست. آنگاه

(الف) $A\cap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$
(ب) $A\cup(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\cup B_\gamma)$

برهان. (الف) عنصر x در مجموعهٔ $A\cap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)$ اگر و تنها اگر $x\in A$ و $x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma$، که مطابق تعریف ۶، هم‌ارز است با

به‌ازای یك $\gamma\in\Gamma$ $\quad x\in B_\gamma$ و $x\in A$

بنا بر تعریف ۴، شرط اخیر را می‌توان با عبارت

به‌ازای یك $\gamma\in\Gamma$ $\quad x\in A\cap B_\gamma$.

بیان کرد، و این بنا بر تعریف ۶ به‌معنای $x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$ است. پس، بنا بر تعریف ۱، $A\cap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$.

برهان قسمت (ب) به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

تمرین ۶.۲

۱. گیریم $\Gamma=\{1,2,3,4\}$، $A_1=\{a,b,c,d\}$، $A_2=\{b,c,d\}$، $A_3=\{a,b,c\}$ و $A_4=\{a,b\}$. مجموعه‌های زیر را بیابید.

(الف) $\bigcup_{i=1}^{4}A_i$

ب) $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$

۲. برای هر دو عدد حقیقی a و b، منظور از فاصلهٔ بسته $[a, b]$ مجموعهٔ $\{x \in \mathbf{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$ است. اگر $a > b$، آنگاه $[a, b] = \varnothing$. مجموعه‌های زیر را بیابید.

الف) $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [0, 1/n]$

ب) $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [0, 1/n]$

ج) $\bigcap_{n=1}^{99} [0, 1/n]$

۳. گیریم A_k فاصلهٔ باز $(-1/k, 1/k)$ برای $k \in \mathbf{N}$ است. مجموعه‌های زیر را بیابید:

الف) $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k$

ب) $\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_k$

۴. برای هر دو عدد حقیقی a و b، مجموعه‌های $\{x \in \mathbf{R} | a < x \leqslant b\}$ و $\{x \in \mathbf{R} | a \leqslant x < b\}$ را فاصله‌های نیمباز یا فاصله‌های نیمبسته نامیده آنها را به‌ترتیب با $(a, b]$ و $[a, b)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌های زیر را بیابید.

الف) $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} (k, k+1]$

ب) $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} (-k, -k+1]$

ج) $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} [k, k+1)$

د) $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} [-k, k)$

۵. قضیهٔ ۸ (ب) را ثابت کنید: $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma$

۶. قضیهٔ ۹ (ب) را ثابت کنید: $A \cup (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (A \cup B_\gamma)$

۷. مجموعهٔ زیر را به‌صورت اجتماع چند اشتراك بنویسید

الف) $(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$

و همچنین مجموعهٔ زیر را به‌صورت اشتراك چند اجتماع بنویسید.

ب) $(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)$

[راهنمایی: قضیهٔ ۹ را چندبار به‌کار برید.]

۸. مجموعه‌های زیر را به‌صورت اجتماع اشتراکها و اشتراك اجتماعها بسط دهید [مسئلهٔ ۷ را ببینید.]

الف) $(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{n} B_j)$

ب) $(\bigcap_{i=1}^{m} A_i) \cup (\bigcap_{j=1}^{n} B_j)$

۹. گیریم $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ و $\{B_\delta | \delta \in \Delta\}$ دو خانوادهٔ مجموعه‌ها هستند. مجموعه‌های زیر را به‌صورت اجتماع اشتراکها و اشتراك اجتماعها بسط دهید. [مسائل ۷ و ۸ را ببینید]

الف) $(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \cap (\bigcup_{\delta \in \Delta} B_\delta)$

ب) $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \cup (\bigcap_{\delta \in \Delta} B_\delta)$

۷. پارادوکس راسل

در این مرحله ممکن است بسیاری از ما فکر کنیم که حداقل به‌طور شهودی، معنی مجموعه را می‌دانیم. اکثر آنهایی که برای نخستین‌بار درس نظریهٔ مجموعه‌ها را می‌گذرانند، ممکن است توجه نکنند که درنظر گرفتن «مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها» یا، «مجموعهٔ جهانی» به‌معنای مطلق آن چه اشکالی دارد. در واقع مدت زمانی(حداقل از سال ۱۸۹۵ که گئورگ کانتور برای نخستین‌بار نظریهٔ مجموعه‌ها را به‌وجود آورد، تا سال ۱۹۰۲ که پارادوکس راسل منتشر شد)، وجود مجموعهٔ جهانی‌مطلق، فرضی‌مسلم بود. برتراند راسل(۱۸۷۲–۱۹۷۰)[۱] فیلسوف مشهور انگلیسی بود که در۱۹۰۲ با اعلام این مطلب که قبول وجود مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها به‌تناقض منجرمی‌شود، جماعت ریاضیدانان را به‌لرزه درآورد. این‌پارادوکس مشهور راسل است. ما این پارادوکس را به‌صورت دو لم ظاهراً متناقض بیان می‌کنیم و از آن یك قضیه نتیجه می‌گیریم.

لم ۱. فرض کنید که $\mathcal{U}$ مجموعهٔ تمام‌مجموعه‌هاوجود دارد. فرض کنید[۲] $R=\{S\in\mathcal{U}\,|\,S\notin S\}$ آنگاه $R\notin R$.

برهان. برخلاف حکم فرض کنید که $R\in R$. آنگاه از تعریف مجموعهٔ R نتیجه می‌شود $R\notin R$، که با فرض $R\in R$ متناقض است. با این تناقض $R\notin R$ ثابت می‌شود.

لم ۲. فرض کنید که $\mathcal{U}$، مجموعهٔ‌تمام‌مجموعه‌ها، وجوددارد. فرض کنید $R=\{S\in\mathcal{U}\,|\,S\notin S\}$ آنگاه $R\in R$.

---

۱. برتراند راسل(Bertrand Russell) در ۱۸ مه سال۱۸۷۲ درشهر ترلك (Trelleck) واقع در ولز (Wales) متولد شد. چهار سال نداشت که والدین خود را از دست داد. پیش از ورود به‌ترینیتی‌کالج دانشگاه‌کمبریج در سال ۱۸۹۰، خجالتی و آرام بود. پس از سه سال مطالعهٔ ریاضیات به‌این نتیجه رسید که آنچه به‌او آموخته‌اند پر از اشتباه بوده است. کتابهای ریاضی خود را فروخت و به‌فلسفه‌گرائید. درکتاب تاریخی اصول‌ریاضیات (۱۹۱۰–۱۹۱۳، Principa Mathematica) که مشتمل بر سه جلد است و با همکاری وایتهد (Alfred North Whitehead) تألیف‌کرده است، کوشش نمود تئوری مجموعه‌ها را با اجتناب از پارادوکسها بازسازی‌کند. در ۱۹۱۸ چنین نوشت، «می‌خواهم درکنار جهان بایستم و به‌ورای تاریکی خیره شوم وکمی بیش از آنچه دیگران دیده‌اند، ببینم. می‌خواهم خردی اندك به‌جهان آدمیان بازگردانم.» مسلم است که بیش از«خردی‌اندك» به‌جهان عرضه‌کرد. درهمان سال به‌علت اظهارنظری نامساعد دربارهٔ ارتش آمریکا، به‌زندان افتاد. در ۱۹۵۰ به‌دریافت فرمان لیاقت از پادشاه انگلستان و جایزهٔ نوبل در رشتهٔ ادبیات نایل شد. در سالهای بعد تظاهرات زیادی برعلیه جنگ هسته‌ای به‌راه انداخت.

۲. بنابر اصل تصریح، R یك مجموعه است و اغلب «مجموعهٔ راسل» نامیده می‌شود.

برهان. برخلاف حکم فرض کنید که $R \notin R$. آنگاه چون $R \in \mathcal{U}$، از تعریف R نتیجه می‌شود $R \in R$. این یك تناقض است. پس $R \in R$.

قضیهٔ ۱۰. مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها وجود ندارد.

برهان. بنابر لم ۱ و ۲، مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها نمی‌تواند وجود داشته‌باشد. زیرا، وجود این مجموعه به‌تناقض «$R \in R$ و $R \notin R$» منجر می‌شود.

هالموس این قضیه را چنین بیان می‌کند: «هیچ چیز شامل همه‌چیز نیست.»[1]

۸. یك توضیح تاریخی

عقیدهٔ عموم براین است که ریاضیدان نامی گئورگ کانتور[2] (۱۸۴۵—۱۹۱۸) تئوری نوین مجموعه‌ها را در ۱۸۹۵ به‌وجود آورد. او به‌هنگام مطالعهٔ سریهای مثلثاتی متوجه شدکه به‌وجود چنین نظریه‌ای نیاز است. کانتور نوشت: «منظور از مجموعه هر دسته‌ای از اشیاء متمایز درشعور یا فکر ماست به‌صورت یك کل» این تعریف مانع نمی‌شود کسی مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها را درنظر بگیرد همچنانکه برتراند راسل این کار راکرد. مشکل واقعی در تعریف کانتور برای مجموعه، لغت «دسته» است. دسته چیست؟ البته می‌توانیم به‌یك فرهنگ لغات نگاه‌کنیم و به‌چیزی شبیه به‌این تعریفها دست یابیم:

«دسته: گروهی از اشیاء گردآوری شده»

«گروه: یك گردایه یا دسته»

«گردایه: یك دسته»

با این تعریفها دردی دوا نمی‌شود. هنگامی که یك ریاضیدان تعریفی ارائه می‌دهدمنظورش تنها آوردن یك مترادف مانند دسته به‌جای مجموعه و یا تعریف دوری‌که در فرهنگ لغات می‌یابیم، نیست. ظاهراً کانتور واقف نبودکه واژهٔ مجموعه واقعاً تعریف‌ناپذیر است.

برای اجتناب ازهرمشکلی‌نظیر پارادوکس‌راسل در نظریهٔ مجموعه‌ها، باید واژه‌های «مجموعه» و «عنصر» را به‌عنوان واژه‌های تعریف نشده، یا اولیه، بپذیریم و چند اصل موضوع، از جمله اصل موضوع تصریح و اصل موضوع مجموعه‌های توانی‌راکه در بخش ۱۲ آمده‌اند، راهنمای این واژه‌های اصلی قراردهیم. اصول موضوع دیگری را نیزغالباً در نظریهٔ مجموعه‌ها می‌آورند، مانند «$A = B$ اگر و تنها اگر عناصر A همان عناصر B

1. Paul. R. Halmos, *Naive Set Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1960, p. 6.

۲. گئورگ کانتور (Georg Cantor) در سال ۱۸۴۵ در سن‌پطرزبورگ، روسیه، به‌دنیا آمد و در سال ۱۸۵۶ به‌آلمان رفت، ریاضیات را در دانشگاه برلین (۱۸۶۳—۱۸۶۹) فراگرفت و در دانشگاه هاله به‌تدریس پرداخت (۱۸۶۹—۱۹۰۵). یکی از مباحث مورد علاقهٔ کانتور سریهای مثلثاتی بود، که او را به‌بررسی اصول آنالیز کشاند. یك نتیجهٔ این بررسی، به‌وجود آوردن نظریهٔ انقلابی مجموعه‌ها و حساب اعداد ترامتناهی بود.

باشند» (اصل موضوع تعمیم)، «$\varnothing$ یك مجموعه است» (اصل موضوع مجموعهٔ تهی)، «اگر A و B مجموعه باشند آنگاه $\{A ، B\}$ نیز مجموعه است» (اصل موضوع جفت‌سازی)، و«اگر $\mathscr{F}$ مجموعه‌ای ازمجموعه‌ها باشد آنگاه $\bigcup\mathscr{F}$ یك مجموعه‌است»(اصل موضوع اجتماع).

پارادوکس راسل تنها پارادوکسی نبودکه در نظریهٔ مجموعه‌ها پدید آمد،کمی بعد ازاینکه پارادوکس راسل منتشرشد، ریاضیدانان ومنطقیون پارادوکسهای بسیاری ساختند. نتیجهٔ تمام این پارادوکسها این شدکه بسیاری از ریاضیدانان و منطقیون روی انواع زیادی نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌هاکارکردند. منظور هریك از این نظریه‌ها این بود که از پارادوکسها احتراز شود وهستهٔ اصلی‌نظریهٔ مجموعه‌های‌کانتورمحفوظ بماند. معهذا تا این زمان هنوزکسی موفق نشده است یك سیستم اصل موضوعی‌کاملاً رضایتبخش برای نظریهٔ مجموعه‌ها ارائه دهد.

با وجود مشکلات فوق‌الذکر، نظریهٔ مجموعه‌های‌کانتور امروزه در تمام رشته‌های ریاضیات نوین وارد شده و ثابت شده‌است که در پایه‌گذاری آنالیز مدرن و توپولوژی اهمیت خاصی دارد. در واقع حتی ساده‌ترین سیستمهای اصل موضوعی‌کاملاً توسعه یافتهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها برای‌کار ریاضیات کلاسیك (مانند نظریهٔ اعداد حقیقی و مختلط، جبر و توپولوژی و غیره)کاملاً کافی است.

۳

رابطه و تابع

این فصل را با بحثی دربارهٔ جفتهای مرتب وحاصلضرب دکارتی دومجموعه شروع می‌کنیم. سپس رابطه را به‌صورت مجموعه‌ای ازجفتهای مرتب تعریف می‌کنیم. به دقت به‌رابطهٔ نزدیک بین‌افراز و رابطهٔ هم‌ارزی دریك مجموعه می‌پردازیم. مفهوم‌تابع را به‌عنوان نوعی خاص از رابطه معرفی می‌کنیم. برای آماده‌کردن کسانی که می‌خواهند بیشتر در ریاضیات جدید کارکنند، ویژگیهای مهم تابعها را بررسی می‌کنیم. درهرقسمت مثالهای فراوانی می‌آوریم.

۱. حاصلضرب دکارتی دومجموعه

برای هردو شیء داده شدهٔ a و b، می‌توانیم شیء جدید (a, b) را، به‌نام جفت مرتب a و b تشکیل دهیم[۱]. صفت «مرتب» در اینجا، تأکید برآن دارد که ترتیب نوشتن اشیاء a و b در داخل پرانتز مهم است. بنابراین، (a, b) و (b, a) دوجفت مرتب متمایزهستند. باید توجه داشت که جفت مرتب (a, b) با مجموعهٔ $\{a, b\}$ یکی نیست. یك شیوهٔ

۱. متأسفانه این نماد، وقتی a و b اعدادی حقیقی هستند، برای فاصلهٔ باز هم به‌کارمی‌رود. اما همواره خواننده باکمی دقت بمعنای مناسب آن درمتن پی‌خواهد برد.

رضایتبخش اما تا حدی پیچیده، این است که جفت مرتب (a, b) را مجموعهٔ $\{a, \{a, b\}\}$ تعریف کنیم. از این تعریف به‌نتیجهٔ «$(a, b)=(c, d) \Longleftrightarrow b=d$ و $a=c$» می‌رسیم. (مسئلهٔ ۲۱، تمرین ۱.۳ را ببینید).

دوجفت مرتب (a, b) و (c, d) را مساوی گوییم اگر وتنها اگر $a=c$ و $b=d$.
مثلاً $(x, y)=(۷, ۸)$ اگر وتنها اگر $x=۷$ و $y=۸$.

درهندسهٔ تحلیلی، صفحهٔ دکارتی را می‌توان مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب اعداد حقیقی درنظر گرفت. بیان صوری این مفهوم چنین است:

تعریف ۱. A و B را دومجموعه می‌گیریم. مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب (x, y)، $x \in A$ و $y \in B$ را حاصلضرب دکارتی A و B نامیده با $A \times B$ نمایش می‌دهند. به‌زبان نمادی:

$$A \times B=\{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

a را مختص اول و b را مختص دوم جفت مرتب (a, b) می‌گویند.

مثال ۱. گیریم $A=\{a, b, c\}$ و $B=\{۱, ۲\}$. حاصلضرب دکارتی $A \times B$ و $B \times A$ را بیابید.

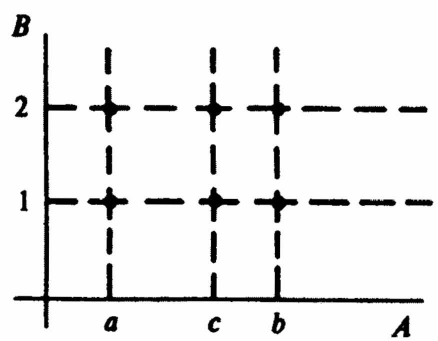
حل: بنا بر تعریف ۱ بالا، داریم

$$A \times B=\{(a, ۱), (a, ۲), (b, ۱), (b, ۲), (c, ۱), (c, ۲)\}$$

و

$$B \times A=\{(۱, a), (۱, b), (۱, c), (۲, a), (۲, b), (۲, c)\}$$

دیده می‌شود که $A \times B \neq B \times A$. حاصلضرب دکارتی $A \times B$ را می‌توانیم مجموعهٔ نقاط شکل زیر مجسم کنیم.



شکل ۷

مثال ۲. A یك مجموعه است. $A\times\varnothing$ و $\varnothing\times A$ را بیابید.

حل: چون $A\times\varnothing$ مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب (a, b) است که درآن $a\in A$ و $b\in\varnothing$، وچون مجموعهٔ تهی $\varnothing$ عنصری ندارد، هیچ عنصری مانند b در $\varnothing$ وجود ندارد، لذا $A\times\varnothing=\varnothing$. همچنین دیده می‌شودکه $\varnothing\times A=\varnothing$.

قضیهٔ ۱. A، B و C را سه مجموعه می گیریم. آنگاه

(الف) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(ب) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

برهان.

الف)
$$(a, x)\in A\times(B\cap C)$$
$$\Longleftrightarrow (a\in A)\wedge(x\in B\cap C)$$ تعریف ۱
$$\Longleftrightarrow (a\in A)\wedge(x\in B\wedge x\in C)$$ تعریف $\cap$
$$\Longleftrightarrow (a\in A)\wedge(a\in A)\wedge(x\in B)\wedge(x\in C)$$ خودتوانی،شرکتپذیری(فصل ۱)
$$\Longleftrightarrow [(a\in A)\wedge(x\in B)]\wedge[(a\in A)\wedge(x\in C)]$$ جابه‌جایی،شرکتپذیری(فصل ۱)
$$\Longleftrightarrow [(a, x)\in A\times B]\wedge[(a, x)\in A\times C]$$ تعریف ۱
$$\Longleftrightarrow (a, x)\in(A\times B)\cap(A\times C)$$ تعریف $\cap$

ازاین‌رو، بنابرتعریف ۱ فصل ۲، ثابت کردیم که

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

این تساوی به‌زبانی ساده، چنین بیان می‌شود: حاصلضرب دکارتی نسبت به‌اشتراك پخشپذیر است.
قسمت (ب) را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می کنیم.

قضیهٔ ۲. اگر A، B و C سه مجموعه باشند، آنگاه

$$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

یعنی، حاصلضرب دکارتی نسبت به‌متممگیری پخشپذیر است.

برهان.

$$(a, x)\in A\times(B-C)$$
$$\Longleftrightarrow (a\in A)\wedge(x\in B-C)$$ تعریف ۱
$$\Longleftrightarrow (a\in A)\wedge[(x\in B)\wedge(x\notin C)]$$ تعریف ۵ (فصل ۲)

$\Longleftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)$ خودتوانی،شرکتپذیری (فصل ۱)

$\Longleftrightarrow [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \notin C)]$ جابه‌جایی، شرکتپذیری(فصل ۱)

$\Longleftrightarrow [(a, x) \in A \times B] \wedge [(a, x) \notin A \times C]$ تعریف ۱

$\Longleftrightarrow (a, x) \in (A \times B) - (A \times C)$ تعریف ۵ (فصل ۲)

بنابراین، ثابت کردیم که

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

تمرین ۳۰۱

۱. هریك از مجموعه‌هـای زیر را با رسم یك نمودار در صفحهٔ دکارتی به‌طور هندسی نمایش دهید:

(الف) $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} | x = y\}$

(ب) $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} | x > y\}$

(ج) $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} | |x + y| \leqslant ۱\}$

۲. مجموعه‌های A و B چه شرایطی دارا باشند تا تساوی $A \times B = B \times A$ راست باشد؟

۳. قضیهٔ ۱ (ب) را ثابت کنید: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

۴. ثابت کنید که $A \times B = \varnothing \Longleftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing$.

۵. ثابت کنید که اگر A، B، و C مجموعه باشند و $A \subseteq B$، آنگاه $A \times C \subseteq B \times C$.

۶. اگر مجموعهٔ A، m عنصر و مجموعهٔ B، n عنصر داشته‌باشد، مجموعهٔ $A \times B$ چند عنصر (جفت مرتب) دارد؟

۷. مجموعهٔ $A \times A$ نه عنصر دارد که $(۱, ۰)$ و $(۰, ۱-)$ دوعنصر آن هستند. مجموعهٔ A و عنصرهای دیگر $A \times A$ را بیابید.

۸. درستی یا نادرستی (با آوردن یك مثال نقیض) هریك ازحکمهای زیر را ثابت کنید.

(الف) $A \times B \subseteq C \times D$ اگر وتنها اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$.

(ب) مجموعهٔ توانی $A \times B$، یعنی $\mathcal{P}(A \times B)$، حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های توانی $\mathcal{P}(A)$ و $\mathcal{P}(B)$، یعنی $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ است.

۹. اگر A، B، C، و D چهارمجموعه باشند، ثابت کنید

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

۱۰. گیریم A_1، A_2، ...، A_n، n مجموعه هستند. آیا می‌توانید تعریف ۱ را برای حاصلضرب دکارتی سه‌مجموعهٔ $A_1 \times A_2 \times A_3$، تعمیم دهید؟ آیا می‌توانیداین تعریف را برای‌حاصلضرب دکارتی nمجموعهٔ بالا، یعنی $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$، تعمیم‌دهید؟

۱۱. ثابت کنید که اگر $A \times A = B \times B$ آنگاه $A = B$.
۱۲. ثابت کنید که اگر $A \times C = B \times C$ و $C \neq \varnothing$، آنگاه $A = B$.
۱۳. درستی یا نادرستی تساوی $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$ را بررسی کنید.
۱۴. ثابت کنید که $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.*
۱۵. آیا تساوی $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ صحیح است؟
۱۶. ثابت کنید که اگر $A \cap B = \varnothing$ آنگاه برای هرمجموعهٔ C و هرمجموعهٔ D، $(A \times C) \cap (B \times D) = \varnothing$.
۱۷. فرض کنیم A، B، C، و D مجموعه‌های ناتهی باشند. ثابت کنید $A \times B = C \times D$ اگر وفقط اگر $B = D$ و $A = C$.
۱۸. ثابت کنید که

$$(A \times B) - (C \times C) = (A - C) \times B \cup A \times (B - C)$$

۱۹. ثابت کنید که

$$(A \times A) - (B \times C) = (A - B) \times A \cup A \times (A - C)$$

۲۰. ثابت کنید که

$$(A \times B) - (C \times D) = (A - C) \times B \cup A \times (B - D)$$

۲۱. جفت مرتب (x, y) را مجموعهٔ $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ تعریف می‌کنیم. با استفاده ازاین تعریف ثابت کنید که $(a, b) = (c, d)$ اگر وتنها اگر $a = c$ و $b = d$.

۲. رابطه

دومجموعهٔ A و B، که الزاماً متمایز نیستند، داده شده‌اند. جملهٔ «یك عنصر a از A با یك رابطهٔ $\mathcal{R}$ به‌یك عنصر b از B نظیر شده است» گزاره‌ای است دربارهٔ جفت مرتب (a, b) درحاصلضرب دکارتی $A \times B$. ازاین‌رو، تعریف ریاضی رابطه را می‌توان برحسب جفتهای مرتب حاصلضرب دکارتی مجموعه‌ها بیان کرد.

تعریف ۲. یك زیرمجموعهٔ حاصلضرب دکارتی $A \times B$ را یك رابطهٔ $\mathcal{R}$ از A به B می‌نامیم. معمولاً به‌جای $(a, b) \in \mathcal{R}$ می‌نویسند $a\mathcal{R}b$. نماد $a\mathcal{R}b$ خوانده می‌شود «a بـا $\mathcal{R}$ به b مربوط است.»

اغلب مجموعه‌های A و B یکی هستند، دراین‌صورت این دومجموعه را X می‌نامیم و به‌جای اینکه بگوییم $\mathcal{R}$ یك رابطهٔ «از X به X» است، می‌گوییم $\mathcal{R}$ یـك رابطه در X است. مثلاً فرض کنید X مجموعهٔ مردم شهر قزوین است و a (احمد) و b (برجیس) از اهالی قزوین هستند و $\mathcal{S}$ رابطهٔ (شوهرکسی بودن) است. آنگاه وقتی می‌گوییم a شوهر

* مسئله ۱۴ تکرار مسئله ۹ است.ـم.

b است، احمد و برجیس را یك جفت مرتب (a, b) متعلق بـه رابطهٔ $\mathcal{S}$ درنظر می‌گیریم. نماد $a\mathcal{S}b$ یا $(a, b)\in\mathcal{S}$ را می‌خوانیم «a شوهر b است».

همچنین می‌توانیم درجفت مرتب، برجیس را قبل ازاحمدبیاوریم وبگوییم برجیس زن احمد است. یـا اگر $\mathcal{Z}$ رابطهٔ (زن‌کسی بودن) بـاشد، بگوییم جفت مرتب (b, a) به‌رابطهٔ $\mathcal{Z}$ متعلق است. $b\mathcal{Z}a$ یا $(b, a)\in\mathcal{Z}$ را می‌خوانیم: «b زن a است». دراین مثال، رابطهٔ $\mathcal{Z}$ را وارون رابطهٔ $\mathcal{S}$ می‌گوییم.

تعریف ۳. A و B را دومجموعه، که الزاماً متمایز نیستند، فرض می‌کنیم. اگر $\mathcal{R}$ رابطه‌ای از A به B باشد، آنگاه وارون‌رابطهٔ $\mathcal{R}$، $\mathcal{R}^{-1}$، رابطه‌ای‌است از B به A به‌قسمی که $b\mathcal{R}^{-1}a$ اگر وتنها اگر $a\mathcal{R}b$. یعنی،

$$\mathcal{R}^{-1}=\{(b, a)|(a, b)\in\mathcal{R}\}$$

مثال ۳. (الف) گیریـم $A=\{a, b\}$، $B=\{x, y, z\}$، و $\mathcal{R}\subseteq A\times B$ بـه‌صورت $\mathcal{R}=\{(a, x), (b, y)\}$ داده شده است. آنگاه $\mathcal{R}^{-1}=\{(x, a), (y, b)\}\subseteq B\times A$.

(ب) گیریم

$$\mathcal{R}=\{(x, y)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}|\ x\text{، } y \text{ را بخش می‌کند}\}$$

آنگاه

$$\mathcal{R}^{-1}=\{(y, x)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}|\ y \text{ مضربی از } x \text{ است}\}$$

گیریم $\mathcal{R}$ رابطه‌ای از A به B است. حوزهٔ رابطهٔ $\mathcal{R}$، که بـا $\mathrm{Dom}\,(\mathcal{R})$ نشان داده می‌شود*، مجموعهٔ تمام عنصرهای $a\in A$ است به‌قسمی‌که $a\mathcal{R}b$ برای یك $b\in B$ و نگارهٔ $\mathcal{R}$، که بـا $\mathrm{Im}\,(\mathcal{R})$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ تمام عنصرهای $b\in B$ است به قسمی کـه $a\mathcal{R}b$ برای یك $a\in A$. به‌زبان نمادی

$$\mathrm{Dom}\,(\mathcal{R})=\{a\in A|(a, b)\in\mathcal{R}\text{، } b\in B \text{ برای یك}\}$$

و

$$\mathrm{Im}\,(\mathcal{R})=\{b\in B|(a, b)\in\mathcal{R}\text{، } a\in A \text{ برای یك}\}$$

در مثال مربوط به رابطهٔ $\mathcal{S}$ (شوهرکسی بودن) و $\mathcal{Z}$ (زن‌کسی بودن) درشهر X (قزوین)، حوزهٔ $\mathcal{S}$ مجموعهٔ تمام مردانی در X است کـه ازدواج کرده‌اند، و نگارهٔ $\mathcal{S}$ مجموعهٔ تمام زنـانی در X است کـه ازدواج کرده‌اند، درحـالی‌کـه، حوزهٔ $\mathcal{Z}$ مجموعهٔ تمام زنهـای شوهردار در X است ونگارهٔ $\mathcal{Z}$ مجموعهٔ تمام شوهرها در X است. یعنی

---

* Dom حروف‌اول domain به‌معنای‌حوزه است و Im حروف اول image به معنای نگاره است.ـم.

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{Z})=\mathrm{Im}(\mathcal{S})$$

و

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{S})=\mathrm{Im}(\mathcal{Z})$$

آیا می‌توانید یك نتیجهٔ کلی بگیرید؟ (مسئلهٔ ۳ در آخر این بخش را ببینید.)

مثال ۴. در مثال ۳ (الف)، $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})=\{a, b\}$ و $\mathrm{Im}(\mathcal{R})=\{x, y\}$. در مثال ۳(ب)، $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})=\mathbf{N}=\mathrm{Im}(\mathcal{R})$.

تعریف ۴. $\mathcal{R}$ رابطه‌ای درمجموعهٔ X است. می گوییم

(الف) $\mathcal{R}$ انعکاسی است اگر وفقط اگر $x\mathcal{R}x$ ،$\forall x\in X$.

(ب) $\mathcal{R}$ متقارن است اگر وفقط اگر $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

(پ) $\mathcal{R}$ متعدی است اگر وفقط اگر $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

(ت) $\mathcal{R}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی است اگر وفقط اگر $\mathcal{R}$ انعکاسی، متقارن، ومتعدی باشد.

بدیهی است که رابطهٔ تساوی، $=$، درمجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$، یك رابطهٔ هم‌ارزی است. گیریم X مجموعه‌ای از گویهای رنگی است وفرض‌کنیم a با $\mathcal{R}$ به b مربوط است اگـر و تنها اگر a و b هم‌رنگ باشند. آنگاه $\mathcal{R}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی است.

رابطه‌هـای هم‌ارزی در ریـاضیات نوین از اهمیت خاصی برخوردارند. مثلاً، گروههای سازه در جبر، فضاهای خارج‌قسمت درتوپولوژی، و دستگاه اعداد همنهشت در نظریهٔ اعداد، همگی با نوعی از رابطه‌های هم‌ارزی مربوط هستند.

دریك مجموعهٔ نـاتهی مفروض X، همواره حداقل دو رابطهٔ هم‌ارزی وجود دارد؛ یکی ازاین دو، رابطهٔ قطری Δ_X (یا رابطهٔ همانی) است که با

$$\Delta_X=\{(x, x)\mid x\in X\}$$

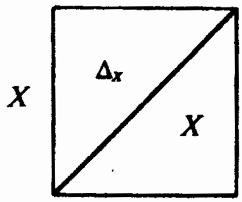
تعریف می‌شود و هر عنصر را به خودش نظیر می‌کند. اگر X را بـا یك پاره‌خط نمایش دهیم، آنگاه $X\times X$ یك مربع و Δ_X قطر «اصلی» این مربع است.

رابطهٔ هم‌ارزی دیگر کـه همیشه روی X وجود دارد[1]، رابطهٔ $\mathcal{R}=X\times X$ است. دربین تمام رابطه‌های هم‌ارزی که در زیرمجموعه‌های $X\times X$، روی X می‌توان تعریف کرد، Δ_X کوچکترین رابطهٔ هم‌ارزی و $X\times X$ بزرگترین است.

مثال ۵. m عددی صحیح، مثبت، ثابت و دلخواه است. رابطهٔ همنهشتی $\equiv$ به‌پیمانهٔ m (یـا مدولو m) درمجموعهٔ اعـداد صحیح $\mathbf{Z}$، بـا $x\equiv y\pmod m$ اگر و تنها اگر $x-y=km$ به‌ازای یك $k\in\mathbf{Z}$، تعریف می‌شود. رابطهٔ همنهشتی یـك رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbf{Z}$ است.

---

۱. وقتی حوزهٔ رابطهٔ $\mathcal{R}$ در X، آشکارا خود X است، بسیاری از ریاضیدانان ترجیح می‌دهند که به‌جای «رابطهٔ $\mathcal{R}$ در X» بگویند «رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی X».



شکل ۸

برهان. (الف) برای هر $x\in \mathbf{Z}$، چون $x-x\equiv \circ \cdot m$، داریم $x\equiv x(\mathrm{mod}\ m)$.
بنابراین رابطه انعکاسی است.

(ب) اگر $x\equiv y(\mathrm{mod}\ m)$، آنگاه برای یك $k\in\mathbf{Z}$، $x-y=km$. درنتیجه $y-x=(-k)m$ و در آن $-k\in\mathbf{Z}$، پس $y\equiv x(\mathrm{mod}\ m)$ و رابطه متقارن است.

(ج) اگر $x\equiv y(\mathrm{mod}\ m)$ و $y\equiv z(\mathrm{mod}\ m)$، آنگاه $x-y=k_1m$ و $y-z=k_2m$ به‌ازای یك $k_1\in\mathbf{Z}$ و یك $k_2\in\mathbf{Z}$. بنابراین

$$x-z=(x-y)+(y-z)=(k_1+k_2)m$$

و $k_1+k_2\in\mathbf{Z}$؛ که نشان می‌دهد $x\equiv \mathbf{Z}(\mathrm{mod}\ m)$. پس رابطه، متعدی است. بنابراین ما ثابت کردیم که رابطهٔ همنهشتی (به‌پیمانهٔ m) یك رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbf{Z}$ است.

به‌عنوان یك حالت خاص این مثال ۵، m را ۲ می‌گیریم. آنگاه $x\equiv y(\mathrm{mod}\ ۲)$ اگر وتنها اگر $y-x$ یك عدد صحیح زوج باشد. درنتیجه $x\equiv y(\mathrm{mod}\ ۲)$ اگر وتنها اگر x و y هردو زوج یا هردو فرد باشند.

تمرین ۲۰۳

۱. $\mathcal{R}$ رابطه‌ای از A به B است. ثابت کنید $(\mathcal{R}^{-1})^{-1}=\mathcal{R}$.

۲. گیریم $A=\{a, b, c\}$ و $\mathcal{R}=\{(a, c), (c, b), (a, b)\}$. حوزه ونگارهٔ $\mathcal{R}$ را بیابید.

۳. $\mathcal{R}$ رابطه‌ای از A به B است. ثابت کنید که

(الف) $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}^{-1})=\mathrm{Im}(\mathcal{R})$.

(ب) $\mathrm{Im}(\mathcal{R}^{-1})=\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$.

۴. گیریم $A=\{a, b, c\}$ و

$$\mathcal{R}=\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (c, a), (a, c)\}$$

ثابت کنید $\mathcal{R}$ منعکس ومتقارن است، اما متعدی نیست.

۵. رابطه‌ای مثال بیاورید که انعکاسی ومتعدی باشد، اما متقارن نباشد.

۶. رابطه‌ای مثال بیاورید که متقارن ومتعدی باشد، اما انعکاسی نباشد.

۷. $\mathcal{R}$ رابطه‌ای درمجموعهٔ X است. ثابت کنید که

(الف) $\mathcal{R}$ انعکاسی است اگر وتنها اگر $\Delta_X \subseteq \mathcal{R}$.

(ب) $\mathcal{R}$ متقارن است اگر وتنها اگر $\mathcal{R}=\mathcal{R}^{-1}$.

(پ) $\mathcal{R}$ انعکاسی است اگر وتنها اگر $\mathcal{R}^{-1}$ انعکاسی باشد.

(ت) $\mathcal{R}$ متقارن است اگر وتنها اگر $\mathcal{R}^{-1}$ متقارن باشد.

(ث) $\mathcal{R}$ متعدی است اگر وتنها اگر $\mathcal{R}^{-1}$ متعدی باشد.

(ج) $\mathcal{R}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی است اگر وتنها اگر $\mathcal{R}^{-1}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی باشد.

۸. چند رابطه روی یك مجموعهٔ nعضوی وجود دارد؟

۹. چند رابطه ازیك مجموعهٔ m عضوی دریك مجموعهٔ nعضوی وجود دارد؟

۱۰. فرض‌کنید $\mathcal{R}$ یك رابطه از A به B است و $D\subseteq A$. منظور از تحدید $\mathcal{R}$ به D، رابطهٔ $\mathcal{R}|D=\{(x,\ y)\in\mathcal{R}|x\in D\}$ از D به B است. ثابت‌کنید

$$\mathcal{R}|D=\mathcal{R}\cap(D\times\mathrm{Im}(\mathcal{R})).$$

۱۱. ثابت‌کنید‌که اگر $\mathcal{R}$ یك رابطه از A به B، و D و E زیرمجموعه‌های A باشند، آنگاه

(الف) $(\mathcal{R}|D\cup E)=(\mathcal{R}|D)\cup(\mathcal{R}|E)$.

(ب) $(\mathcal{R}|D\cap E)=(\mathcal{R}|D)\cap(\mathcal{R}|E)$.

۱۲. فرض‌کنید $\mathcal{R}$ یك رابطه از A به B و X یك زیرمجموعهٔ دلخواه A باشد. $\mathcal{R}(X)$، به‌نام $\mathcal{R}$ـ‌نگارهٔ X را چنین تعریف کنید

$$\mathcal{R}(X)=\{y\in B|x\in X \text{ برای یك } (x,\ y)\in\mathcal{R}\}$$

ثابت‌کنید‌که اگر D و E زیرمجموعه‌های A باشند، آنگاه

(الف) $\mathcal{R}(D\cup E)=\mathcal{R}(D)\cup\mathcal{R}(E)$

(ب) $\mathcal{R}(D\cap E)\subseteq\mathcal{R}(D)\cap\mathcal{R}(E)$.

۱۳. با درنظر گرفتن فرضهای مسئلهٔ ۱۲، ثابت‌کنید

(الف) $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})=\mathcal{R}^{-1}(B)$

(ب) $\mathrm{Im}(\mathcal{R})=\mathcal{R}(A)$.

۱۴. اگر $\mathcal{R}$ و $\mathcal{S}$ رابطه‌هایی از A به B باشند، آنگاه $\mathcal{R}\cup\mathcal{S}$ یك رابطه از A به B است. ثابت‌کنید

(الف) $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})=\mathrm{Dom}(\mathcal{R})\cup\mathrm{Dom}(\mathcal{S})$

(ب) $\mathrm{Im}(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})=\mathrm{Im}(\mathcal{R})\cup\mathrm{Im}(\mathcal{S})$

(پ) برای هر $X\subseteq A$، $(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})(X)=\mathcal{R}(X)\cup\mathcal{S}(X)$.

۱۵. فرض‌کنید $\mathcal{R}$ یك رابطه روی X است. ثابت‌کنید $\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1}$ یك رابطهٔ متقارن روی X است و اگر $\mathcal{S}$ یك رابطهٔ متقارن روی X باشد که شامل $\mathcal{R}$ است، آنگاه $\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1}\subseteq\mathcal{S}$. بنابراین $\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1}$ کوچکترین رابطهٔ متقارن شامل $\mathcal{R}$ است.

۱۶. فرض کنید $\mathcal{R}$ یک‌رابطه روی X است. ثابت کنید $\mathcal{R}\cap\mathcal{R}^{-1}$ یک رابطهٔ متقارن روی X است و اگر $\mathcal{S}$ یک رابطهٔ متقارن روی X باشد به‌قسمی که $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{R}$، آنگاه $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{R}\cap\mathcal{R}^{-1}$. بنابراین $\mathcal{R}\cap\mathcal{R}^{-1}$ بزرگترین رابطهٔ متقارن مشمول $\mathcal{R}$ است.

۱۷. ثابت کنید

(الف) $(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})^{-1}=\mathcal{R}^{-1}\cup\mathcal{S}^{-1}$

(ب) $(\mathcal{R}\cap\mathcal{S})^{-1}=\mathcal{R}^{-1}\cap\mathcal{S}^{-1}$.

۱۸. گیریم $X=\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$. رابطهٔ $\sim$ روی X را با $(a,b)\sim(c,d)$ اگر و تنها اگر $ad=bc$، تعریف کنید. ثابت کنید که رابطهٔ $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۳. افراز و رابطهٔ هم‌ارزی

تعریف ۵. X مجموعه‌ای غیرتهی است. منظور از یک افراز X مانند $\mathcal{P}$، یک مجموعهٔ از زیرمجموعه‌های ناتهی X است به‌قسمی که

(الف) اگر $A,\ B\in\mathcal{P}$ و $A\neq B$، آنگاه $A\cap B=\varnothing$.

(ب) $\bigcup_{C\in\mathcal{P}}C=X$.

به‌تعبیری شهودی افراز X یک «تقسیم X» به‌قطعه‌های مجزای ناتهی است.

مثال ۶. m عددی صحیح، مثبت و ثابت است. به ازای هرعدد صحیح j، $0\leqslant j<m$، تعریف می‌کنیم $\mathbf{Z}_j=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x-j=km$ ،$k\in\mathbf{Z}$ برای$\}$. آنگاه مجموعهٔ

$$\{\mathbf{Z}_0,\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2,\dots,\mathbf{Z}_{m-1}\}$$

یک افراز $\mathbf{Z}$ است. درحالت خاص $m=2$، مجموعهٔ مجموعه‌های

$$\mathbf{Z}_0=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,\text{زوج است } x\}$$

و

$$\mathbf{Z}_1=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,\text{زوج است } x-1\}=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,\text{فرد است } x\}$$

یک افراز $\mathbf{Z}$ است. (مسئلهٔ ۸ تمرین ۳.۲ را نیز ببینید).

بین افراز یک مجموعهٔ ناتهی و یک رابطهٔ هم‌ارزی روی آن مجموعه ارتباط بسیار نزدیکی وجود دارد. برای درک این ارتباط، به‌تعریف زیر احتیاج داریم.

تعریف ۶. $\mathcal{E}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی یک‌مجموعهٔ ناتهی است. به‌ازای هر $x\in X$، مجموعهٔ

$$x/\mathcal{E}=\{y\in X\,|\,y\,\mathcal{E}\,x\}$$

را ردهٔ هم‌ارزی مربوط به‌عنصر x تعریف می‌کنیم. مجموعهٔ تمام این رده‌های هم‌ارزی در X را با $X/\mathcal{E}$ نمایش می‌دهیم؛ یعنی $X/\mathcal{E}=\{x/\mathcal{E}\,|\,x\in X\}$. نماد $X/\mathcal{E}$ را

«X modulo $\mathcal{E}$» یا فقط «X mod $\mathcal{E}$» می‌خوانیم.

قضیهٔ ۳. $\mathcal{E}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی روی یك مجموعهٔ ناتهی X است. آنگاه

(الف) هر $x/\mathcal{E}$ یك زیرمجموعهٔ ناتهی X است.

(ب) $x/\mathcal{E}\cap y/\mathcal{E}\neq\varnothing$ اگر وتنها اگر $x\mathcal{E}y$.

(ج) $x\mathcal{E}y$ اگر وتنها اگر $x/\mathcal{E}=y/\mathcal{E}$.

برهان. (الف) چون برای هر $x\in X$، $\mathcal{E}$ انعکاسی است، داریم $x\mathcal{E}x$. بنابر تعریف ۶، $x\in x/\mathcal{E}$ وبنابراین $x/\mathcal{E}$، یك زیرمجموعهٔ ناتهی X است.

(ب) چون $\mathcal{E}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی و $X\neq\varnothing$، داریم

$$x/\mathcal{E}\cap y/\mathcal{E}\neq\varnothing\Longleftrightarrow(\exists z)(z\in x/\mathcal{E}\wedge z\in y/\mathcal{E})$$

$$\text{تعریف ۶}\qquad\Longleftrightarrow(z\mathcal{E}x)\wedge(z\mathcal{E}y)$$

$$\mathcal{E}\ \text{متقارن است}\qquad\Longleftrightarrow(x\mathcal{E}z)\wedge(z\mathcal{E}y)$$

$$\mathcal{E}\ \text{متعدی است}\qquad\Longleftrightarrow x\mathcal{E}y$$

(ج) از (الف) و (ب) به سادگی نتیجه می‌شود کـه $x/\mathcal{E}=y/\mathcal{E}\Rightarrow x\mathcal{E}y$. حال باید ثابت‌کنیم که $x\mathcal{E}y\Rightarrow x/\mathcal{E}=y/\mathcal{E}$. گیریم $x\mathcal{E}y$، آنگاه

$$z\in x/\mathcal{E}\Rightarrow z\mathcal{E}x\qquad\text{تعریف ۶}$$

$$(z\mathcal{E}x)\wedge(x\mathcal{E}y)\Rightarrow z\mathcal{E}y\qquad\mathcal{E}\ \text{متعدی است}$$

$$\Rightarrow z\in y/\mathcal{E}\qquad\text{تعریف ۶}$$

چون z اختیاری است، نتیجه می‌شود که $x/\mathcal{E}\subseteq y/\mathcal{E}$. استدلالی مشابه نتیجه می‌دهد کـه $y/\mathcal{E}\subseteq x/\mathcal{E}$. پس $x/\mathcal{E}=y/\mathcal{E}$.

قضیهٔ ۴. اگر $\mathcal{E}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی روی یك مجموعهٔ ناتهی X باشد، آنگاه $X/\mathcal{E}$ یك افراز X است.

برهان. بنابر قضیهٔ ۳ (الف) و تعریف ۶، $X/\mathcal{E}=\{x/\mathcal{E}\mid x\in X\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی X است. اکنون نشان می‌دهیم که

$$x/\mathcal{E}\neq y/\mathcal{E}\Rightarrow(x/\mathcal{E})\cap(y/\mathcal{E})=\varnothing$$

بـرای این منظور عکس نقیض آن: $[x/\mathcal{E}\cap y/\mathcal{E}\neq\varnothing]\Rightarrow[x/\mathcal{E}=y/\mathcal{E}]$ را ثابت می‌کنیم. اما این رابطه یك نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۳ (ب) و (ج) است. بـالاخره، باید نشان دهیم که $\bigcup_{x\in X}x/\mathcal{E}=X$. این نیز بدیهی است، زیرا هر $x\in X$ به $x/\mathcal{E}$ متعلق است، به‌این‌ترتیب برهان قضیه‌کامل است.

هم‌اکنون درقضیهٔ ۲ دیدیم که یك‌رابطهٔ هم‌ارزی روی‌مجموعهٔ ناتهی X، یك‌افراز

X ایجاد می‌کند. اکنون نشان خواهیم داد که عکس قضیهٔ ۴ نیز درست است؛ یعنی، هر افراز X یك رابطهٔ هم‌ارزی روی X ایجاد می‌کند.

تعریف ۷. $\mathcal{P}$ یك افراز مجموعهٔ ناتهی X است. یك رابطهٔ $X/\mathcal{P}$ روی X با $x(X/\mathcal{P})y$ اگر و تنها اگر یك مجموعهٔ $A\in\mathcal{P}$ وجود داشته باشد به قسمی که $x,\ y\in A$، تعریف می‌کنیم.

تذکر. به‌خواننده توصیه می‌شود تعاریف ۶ و ۷ را با دقت بخوانند و با یکدیگر مقایسه کند، تا اختلاف ظریف بین نمادهای مشابه $x/\mathcal{E}$، $X/\mathcal{E}$ و $X/\mathcal{P}$ را دریابد.

قضیهٔ ۵. اگر $\mathcal{P}$ یك افراز مجموعهٔ ناتهی X باشد، آنگاه رابطهٔ $X/\mathcal{P}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی روی X است، و رده‌های هم‌ارزی که از رابطهٔ هم‌ارزی $X/\mathcal{P}$ به‌وجود می‌آیند دقیقاً مجموعه‌های افراز $\mathcal{P}$ هستند. به‌زبان نمادی $X/(X/\mathcal{P})=\mathcal{P}$.

برهان. چون هر عنصر X مانند x متعلق به یکی از $A\in\mathcal{P}$ است، $x(X/\mathcal{P})x$؛ پس $X/\mathcal{P}$ انعکاسی است. تقارن $X/\mathcal{P}$ یك نتیجهٔ بدیهی تعریف ۷ است. برای اینکه نشان دهیم رابطهٔ $X/\mathcal{P}$ متعدی است، فرض کنید x، y و z سه عنصر X هستند که در شرطهای زیر صدق می‌کنند

$$x(X/\mathcal{P})y,\quad y(X/\mathcal{P})z$$

آنگاه، بنابرتعریف ۷، A و B در $\mathcal{P}$ وجود دارند به‌قسمی‌که $x,\ y\in A$ و $y,\ z\in B$. درنتیجه $y\in A\cap B\neq\varnothing$. ازتعریف افراز، نتیجه می‌شود $A=B$. ازاین‌رو، $x,\ z\in A$ و بنابراین $x(X/\mathcal{P})z$. پس $X/\mathcal{P}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی روی X است.

برای اثبات بقیهٔ قضیه، گیریم x یك‌عنصر اختیاری X باشد. یك وفقط یك‌مجموعهٔ A در $\mathcal{P}$ وجود دارد به‌قسمی‌که $x\in A$ (چرا؟). درنتیجه، بنابرتعریف ۶، داریم

$$x/(X/\mathcal{P})=A$$

ثابت شدکه هر ردهٔ هم‌ارزی مدولو $X/\mathcal{P}$ یك مجموعه از خانوادهٔ $\mathcal{P}$ است. برعکس فرض کنیم A یك مجموعهٔ افراز $\mathcal{P}$ باشد. چون $A\neq\varnothing$، یك عنصر x در X وجود داردکه متعلق به A است. پس با استدلال قبلی، $x/(X/\mathcal{P})=A$. به‌این‌ترتیب ثابت شد که $X/(X/\mathcal{P})=\mathcal{P}$ و برهان قضیه کامل است.

هر رابطهٔ هم‌ارزی $\mathcal{E}$ روی مجموعهٔ ناتهی X یك افراز $X/\mathcal{E}$ (قضیهٔ ۴) به وجود می‌آورد. با این افراز رابطهٔ هم ارزی $X/(X/\mathcal{E})$ مشخص می‌شود (قضیهٔ ۵). مهم است بدانیم‌که $X/(X/\mathcal{E})=\mathcal{E}$ (مسئلهٔ ۱۱را ببینید). با این رابطه و رابطهٔ $X/(X/\mathcal{P})=\mathcal{P}$ ارتباط نزدیك بین رابطه‌های هم‌ارزی و افرازها روشن می‌شود.

قضیهٔ ۵ را با یك مثال خاص توضیح می‌دهیم. گیریم $\mathbf{Z}_0$ و $\mathbf{Z}_1$ به‌ترتیب مجموعهٔ

اعداد صحیح زوج و مجموعهٔ اعداد صحیح فرد باشند. آنگاه $\mathcal{P}=\{\mathbf{Z}_۰, \mathbf{Z}_۱\}$ یك افراز مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ است. بنا بر تعریف رابطهٔ $\mathbf{Z}/\mathcal{P}$، داریم $a(\mathbf{Z}/\mathcal{P})b$ اگر و تنها اگر یا $a, b\in\mathbf{Z}_۰$ یا $a, b\in\mathbf{Z}_۱$. یعنی $a(\mathbf{Z}/\mathcal{P})b$ اگر و تنها اگر a و b هردو زوج یا هردو فرد باشند. به‌سادگی دیده می‌شود که این رابطه یك رابطهٔ هم‌ارزی است. درواقع، $a(\mathbf{Z}/\mathcal{P})b$ اگر و تنها اگر $a\equiv b(\mathrm{mod}\ ۲)$. بدین جهت، رابطهٔ $\mathbf{Z}/\mathcal{P}$ در واقع همان رابطهٔ همنهشتی $(\mathrm{mod}\ ۲)\equiv$ است. [مثال ۵ را ببینید.]

برعکس اگر، مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ و رابطهٔ هم‌ارزی $\mathcal{E}$ داده شده باشند به قسمی که $x\,\mathcal{E}\,y$ اگر و تنها اگر $x\equiv y(\mathrm{mod}\ ۲)$، آنگاه

$$a/\mathcal{E}=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x\equiv a(\mathrm{mod}\ ۲)\}=\begin{cases}\mathbf{Z}_۰ & \text{اگر } a \text{ زوج باشد}\\ \mathbf{Z}_۱ & \text{اگر } a \text{ فرد باشد}\end{cases}$$

بنا براین $\mathbf{Z}/\mathcal{E}=\{\mathbf{Z}_۰, \mathbf{Z}_۱\}$، که آشکارا یك افراز $\mathbf{Z}$ است.

تمرین ۳۰۳

۱. فرض کنید $X=\{a, b, c, d, e\}$، $A=\{a, b\}$ و $B=\{c, d, e\}$
(الف) تحقیق کنید که $\{A, B\}$ یك افراز X است.
(ب) رابطهٔ $X/\{A, B\}$ را که از افراز $\{A, B\}$ پدید آمده است، بررسی کنید.

۲. فرض کنید $X=\{a, b, c, d\}$ و
$$\mathcal{R}=\{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b), (c, d)\ (d, c), (c, c), (d, d)\}$$
(الف) تحقیق کنید که $\mathcal{R}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی روی X است.
(ب) افراز $X/\mathcal{R}$ را که از $\mathcal{R}$ پدید آمده‌است، بیابید.

۳. فرض کنید $\mathcal{P}$ افراز $X/\mathcal{R}$ مسئلهٔ ۲ ی بالا باشد. رابطهٔ $X/\mathcal{P}$ روی X را که از $\mathcal{P}$ پدید آمده‌است، بیابید.

۴. $\mathcal{P}$ یك افراز مجموعهٔ ناتهی X و رابطهٔ هم‌ارزی $X/\mathcal{P}$ مفروض‌اند. ثابت کنید
$$X/\mathcal{P}=\bigcup_{A\in\mathcal{P}}A\times A.$$

۵. درمسئلهٔ ۱، چندعنصر در $A\times A\cup B\times B$ وجود دارد؟ چندجفت مرتب در $X/\{A, B\}$ وجود دارد؟

۶. X را یك مجموعهٔ متناهی و $\mathcal{P}$، افراز $\mathcal{P}$ را
$$\mathcal{P}=\{A_۱, A_۲, \dots, A_k\}$$
بگیرید و فرض کنید مجموعهٔ A_j، $j=۱, ۲, \dots, k$، n_j عضو دارد. ثابت کنید که تعداد جفتهای مرتب در رابطهٔ هم‌ارزی $X/\mathcal{P}$ دقیقاً $n_۱^۲+n_۲^۲+\dots+n_k^۲$ است.

۷. گیریم $X=\{a, b, c, d, e\}$ و $\mathcal{P}=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$.
(الف) نشان دهید که $\mathcal{P}$ یك افراز X است.

(ب) رابطهٔ هم‌ارزی $X/\mathscr{P}$ روی X را به‌صورت مجموعهٔ جفتهای مرتب مشخص کنید.
(پ) $X/\mathscr{P}$ را $\mathscr{E}$ بنامید و مجموعه‌های $a/\mathscr{E}$، $b/\mathscr{E}$، $c/\mathscr{E}$، $d/\mathscr{E}$ و $e/\mathscr{E}$ را صریحاً مشخص کنید.

۸. مثال ۶ را به‌ازای $m=۳$ بررسی کنید.

۹. X را $\mathbf{Z}$، مجموعهٔ اعداد صحیح بگیرید. فرض کنید رابطهٔ $\mathscr{E}$ روی X با $x\mathscr{E}y$ اگر و تنها اگر $x-y=۵k$، که در آن k یك عدد صحیح است، تعریف شده‌است.
(الف) ثابت کنید رابطهٔ $\mathscr{E}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی روی X است.
(ب) $X/\mathscr{E}$، افراز X را پیدا کنید.
(ج) تحقیق کنید که رابطهٔ هم‌ارزی $X/(X/\mathscr{E})$ در واقع همان رابطهٔ هم‌ارزی $\mathscr{E}$ است.

۱۰. فرض کنید $\{A_۱, A_۲, \ldots, A_m\}$ یك افراز مجموعهٔ A، و $\{B_۱, B_۲, \ldots, B_n\}$ یك افراز مجموعهٔ B است. ثابت کنید

$$\{A_i\times B_j \mid i=۱, ۲, \ldots, m;\ j=۱, ۲, \ldots, n\}$$

یك افراز $A\times B$ است.

۱۱. $\mathscr{E}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ ناتهی X است. ثابت کنید $X/(X/\mathscr{E})=\mathscr{E}$.

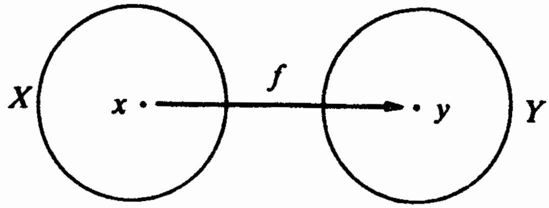
۴. تابع

بی‌شك، مفهوم تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در هر شاخهٔ ریاضی است. ممکن است خواننده با تعریف زیر آشنا شده‌باشد. تابع یك قاعدهٔ تناظر است که به‌هرعنصر x از یك مجموعه (که حوزهٔ تابع نامیده می‌شود) یك و فقط یك عنصر y از مجموعهٔ دیگری را (که برد تابع نامیده می‌شود) نظیر می‌کند. این تعریف روشن نیست. دقیقاً منظور از یك «قاعده» چیست؟ برای اجتناب از هرگونه ابهامی، ریاضیدانان با استفاده از زبان مجموعه‌ها تعریفی دقیق برای تابع درست کرده‌اند.

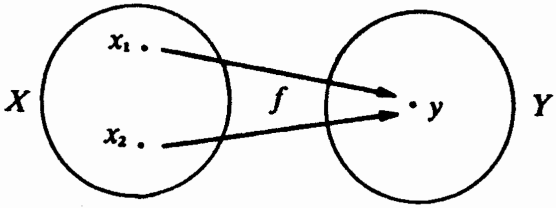
تعریف ۸. X و Y را دومجموعه می‌گیریم. یك تابع از X به Y، یك سه‌گانهٔ (f, X, Y) است که در آن f رابطه‌ای از X به Y است که درشرطهای زیر صدق می‌کند:
(الف) $\mathrm{Dom}\,(f)=X$.
(ب) اگر $(x, y)\in f$ و $(x, z)\in f$، آنگاه $y=z$.

فرض کنیم (f, X, Y) تابعی از X به Y باشد. از این به‌بعد ما هم به‌تبعیت از عرف به‌جای (f, X, Y) و $(x, y)\in f$ به‌ترتیب نمادهای معمولی $f: X\to Y$ و $y=f(x)$ را به‌کار خواهیم برد. اما دلیل اینکه «$y=f(x)$» را می‌توان به‌جای «$(x, y)\in f$» به‌کار برد، این است که

برای هر عنصر $x\in X$ یك و فقط یك $y\in Y$ وجود دارد به قسمی‌که $(x, y)\in f$.



شکل ۹. y نگارهٔ x است.



شکل ۱۰. x_1 و x_2 پیشنگاره‌های y هستند.

برای اینکه ببینید این ادعا درست است، فرض کنید $x \in X$. آنگاه بنابرشرط (الف) تعریف ۸، یك عنصر $y \in Y$ وجود دارد به‌قسمی که $(x, y) \in f$؛ اگر یك عنصر دیگر $z \in Y$ با شرط $(x,z) \in f$ وجود داشته‌باشد، آنگاه بنا برشرط (ب)، $z = y$. حال می‌بینید، y که با $x \in X$ مشخص می‌شود یکتاست.

تابع $f : X \to Y$ مفروض است. اگر $y = f(x)$، گوییم y نگارهٔ x تحت f است و x یك پیشنگارهٔ y تحت f است. خواننده می‌تواند این مطلب را، همان‌گونه که درشکلهای ۹ و ۱۰ نشان‌داده شده، پیش‌خود مجسم کند. مامجموعهٔ Y را، در $f : X \to Y$، برد تابع می‌گوییم. خواننده باید توجه داشته‌باشد که برد تابع ممکن است نگارهٔ تابع نباشد[1] (به‌مثال ۷، در زیر نگاه‌کنید). توجه خواننده را به‌این حقیقت جلب می‌کنیم که بعضی از نویسندگان لغت «برد» را به‌معنی «نگاره» به‌کار می‌برند، اما به‌یك‌دلیل تکنیکی، که دربخش ۶ خواهید دید، بین «نگاره» و «برد» تابع تمایز قائل می‌شویم. درحالت کلی نگارهٔ تابع زیرمجموعه‌ای از برد تابع است.

مثال ۷. فرض کنید $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ با $f(x) = [x]$ به‌ازای تمام xهـای در $\mathbf{R}$ تعریف شده‌است و $[x]$ به‌معنای بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x یا مساوی با x است، مثلاً $[\sqrt{۲}] = ۱$ و $[-۱/۲] = -۱$. در اینجا برد f، $\mathbf{R}$ است، در حالی‌که نگارهٔ f، $\mathbf{Z}$ است، که یك زیرمجموعهٔ سرهٔ $\mathbf{R}$ می‌باشد.

---

۱. نگاره تابع $f : X \to Y$، نگارهٔ رابطهٔ f، یعنی $\operatorname{Im}(f)$ است. بنابراین

$$\operatorname{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

می‌توان برد یك تابع را، بدون تغییردادن تابع، عوض کرد. به‌عنوان نمونه، برای همان تابع‌مثال ۷ بالا، $f:\mathbf{R}\to\mathbf{Q}$ و $f:\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$ تابع‌هستند، زیرا درتعریف ۸ صدق می‌کنند. درحالت کلی، قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۶. تابع $f:X\to Y$ و W یك مجموعهٔ شامل نگارهٔ f مفروض‌اند. آنگاه $f:X\to W$ نیز یك تابع است.

برهان. نخست ثابت می‌کنیم که f یك رابطه از X به W است:

$$(x,\ y)\in f \Rightarrow x\in X\wedge y\in(\operatorname{Im} f) \qquad \text{تعریف Im}$$

$$\Rightarrow x\in X\wedge y\in W \qquad \operatorname{Im}(f)\subseteq W$$

$$\Rightarrow (x,\ y)\in X\times W \qquad \text{تعریف ۱}$$

ثابت شدکه $f\subseteq X\times W$؛ به‌عبارت دیگر، f یك رابطه از X به W است. حال چون $f:X\to Y$ یك تابع است، $\operatorname{Dom}(f)=X$ و شرط (ب) تعریف ۸ نیز برقرار است. بنابراین، $f:X\to W$ یك تابع است.

قضیهٔ ۷. توابع $f:X\to Y$ و $g:X\to Y$ مفروض‌اند. آنگاه $f=g$ اگروتنها اگر $\forall x\in X,\ f(x)=g(x)$.

برهان. (۱) فرض کنیم که $f=g$ و x یك عنصر دلخواه X باشد. آنگاه

$$y=f(x)\Longleftrightarrow(x,\ y)\in f \qquad \text{نماد}$$

$$\Longleftrightarrow(x,\ y)\in g \qquad f=g$$

$$\Longleftrightarrow g(x)=y \qquad \text{نماد}$$

بنابراین $f(x)=g(x)$.

(۲) فرض کنیم که $\forall x\in X,\ f(x)=g(x)$. آنگاه

$$(x,\ y)\in f\Longleftrightarrow y=f(x) \qquad \text{نماد}$$

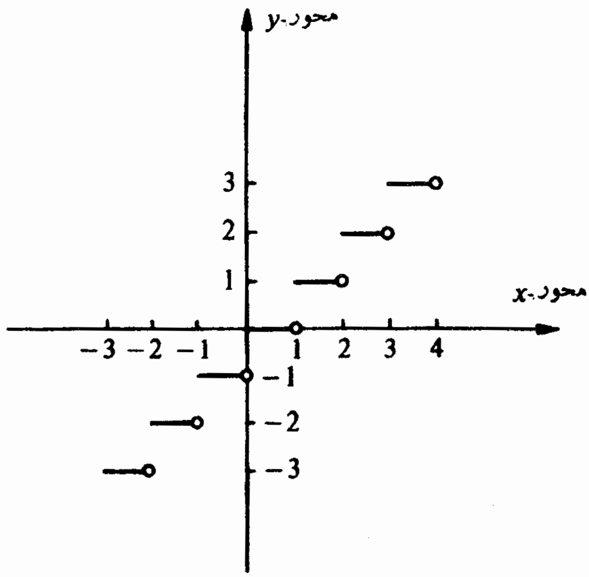
$$\Longleftrightarrow y=g(x) \qquad f(x)=g(x)$$

$$\Longleftrightarrow(x,\ y)\in g \qquad \text{نماد}$$

بنابراین $f=g$.

اگر حوزه و برد یك تابع زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ اعداد حقیقی باشند، آنگاه نظیر کاری که درهندسهٔ تحلیلی می‌شود، نمودار تابع را می‌توان دریك صفحهٔ دکارتی رسم کرد. مثلاً شکل ۱۱ نمودار تابع مثال ۷ است.

مثال ۸. فرض کنید A یك زیرمجموعهٔ ناتهی X است. آنگاه رابطهٔ



شکل ۱۱

$$\{(x,\ y)\in X\times\{۰,\ ۱\}\,|\,y=۱ \text{ اگر } x\in A\text{، و اگر } x\notin A\text{، } y=۰\}$$

تابعی از X به $\{۰,\ ۱\}$ است. این تابع را تابع مشخصهٔ A در X می‌نامند و آن را معمولاً با χ_A نمایش می‌دهند. حرف یونانی χ را خی تلفظ کنید. به‌عبارت دیگر

$$\chi_A : X \longrightarrow \{۰,\ ۱\}$$

به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x)=\begin{cases} ۱ & \text{اگر } x\in A \\ ۰ & \text{اگر } x\in X-A \end{cases}$$

اگرچه یك تابع، بنا بر تعریف، به‌صورت $(f,\ X,\ Y)$ یا $f : X\longrightarrow Y$ نوشته می‌شود، اما اغلب وقتی از متن به‌طور ضمنی حوزه و برد تابع مشخص می‌شوند، نوشتن آنها ضرورت ندارد. به‌این جهت وقتی حوزه و برد تابع معلوم هستند، تابع را به f نمایش خواهیم داد، بدون اینکه حوزه و برد f را ذکر کنیم.

مثال ۹. مجموعهٔ X مفروض است. رابطهٔ قطری Δ_X روی X که در صفحهٔ ۷۰ تعریف شده است، یك تابع از X به X است. وقتی می‌خواهیم تأکید کنیم که رابطهٔ Δ_X یك تابع است، نماد دیگر $I_X : X\longrightarrow X$ را به‌کار می‌بریم. با این نماد، برای هر x در X، $I_X(x)=x$. تابع I_X، تابع همانی روی X نام دارد*.

* I حرف اول identity function، اصطلاح انگلیسی تابع همانی است.ـم.

مثال ۱۰. فرض‌کنیم X و Y دومجموعهٔ ناتهی و b یک‌عنصر ثابت Y باشد. با رابطهٔ

$$C_b=\{(x,\ b)|x\in X\}$$

تابع $C_b : X \to Y$ به‌وجود می‌آید. تابع C_b را تابع ثابت می‌گویند و با $C_b(x)=b$، برای هر x در X، مشخص می‌شود.

درحساب دیفرانسیل و انتگرال، اغلب به‌توابعی‌که با دوقاعدهٔ تناظر (یا با بیش از دوقاعده) تعریف شده‌اند، برخوردکرده‌ایم. مثلاً تابع $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ که به‌صورت زیرداده شده‌است،

$$h(x)=\begin{cases}1-2x & \text{اگر } x\leqslant 0\\ x^2+1 & \text{اگر } x\geqslant 0\end{cases}$$

با دوقاعده تعریف شده‌است. این تابع ممکن است به‌صورت اجتماع دو تابع زیر درنظر گرفته شود:

(۱) $f:(-\infty,\ 0]\to\mathbf{R}$ که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x)=1-2x, \qquad \forall x\in(-\infty,\ 0]$$

(۲) $g:[0,\ +\infty)\to\mathbf{R}$ که به‌صورت زیر تعریف شده‌است:

$$g(x)=x^2+1, \qquad \forall x\in[0,\ +\infty)$$

خواننده باید توجه‌کندکه در اینجا $\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)=\{0\}$ و $f(0)=g(0)$.

مثال اخیر قضیهٔ عمومی زیر را موجب می‌شود.

قضیهٔ ۸. دوتابع $f:A\to C$ و $g:B\to D$ به‌قسمی‌که $\forall x\in A\cap B$، $f(x)=g(x)$ مفروض‌اند. آنگاه h، اجتماع f و g:

$$h=f\cup g : A\cup B\to C\cup D$$

که در آن

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & \text{اگر } x\in A\\ g(x) & \text{اگر } x\in B\end{cases}$$

یک تابع است.

برهان. چون f و g رابطه هستند، $f\subseteq A\times C$ و $g\subseteq B\times D$، و داریم

$$\begin{aligned}h=f\cup g&\subseteq(A\times C)\cup(B\times D)\\ &\subseteq(A\cup B)\times(C\cup D)\end{aligned}$$

زیرا هر دومجموعهٔ $A\times C$ و $B\times D$ زیرمجموعه‌های $(A\cup B)\times(C\cup D)$ هستند.

بنابراین، h یك رابطه از $A\cup B$ به $C\cup D$ است. تحقیق درستی رابطهٔ زیر را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم

$$\mathrm{Dom}(h)=\mathrm{Dom}(f)\cup \mathrm{Dom}(g)=A\cup B$$

این نشان می‌دهد‌که رابطهٔ h در‌تعریف ۸ (الف) صدق می‌کند.

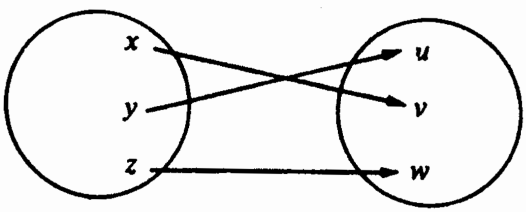
برای هر $x\in A\cup B$، می‌توان سه‌حالت زیر را درنظر گرفت.

(۱) $x\in A-B$، (۲) $x\in B-A$، و (۳) $x\in A\cap B$. از اینکه $f:A\to C$ و $g:B\to D$ در تعریف ۸ (ب) صدق می‌کنند و $\forall x\in A\cap B$، $f(x)=g(x)$، نتیجه می‌شود که $h(x)$ در هرسه حالت تعریف شده و یکتاست. بنابراین رابطهٔ h در تعریف ۸(ب) هم صدق می‌کند. از این‌رو $h:A\cup B\to C\cup D$ واقعاً یك تابع است.

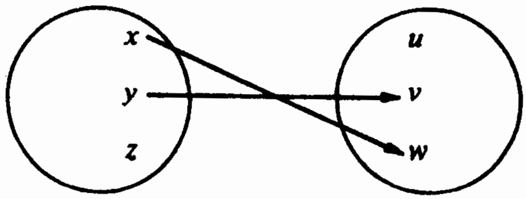
تمرین ۴۰۳

۱. بررسی کنید‌که با کدام یك از نمودارهای زیر یك تابع از $X=\{x, y, z\}$ به $Y=\{u, v, w\}$ تعریف می‌شود.

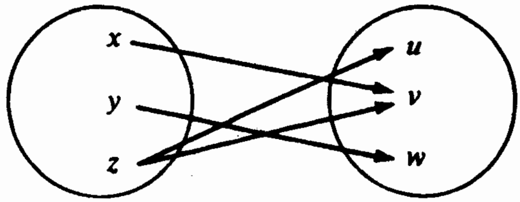
(الف)



(ب)



(ج)



۲. تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده‌است

$$f(x)=\begin{cases} ۵ & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ -۳ & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

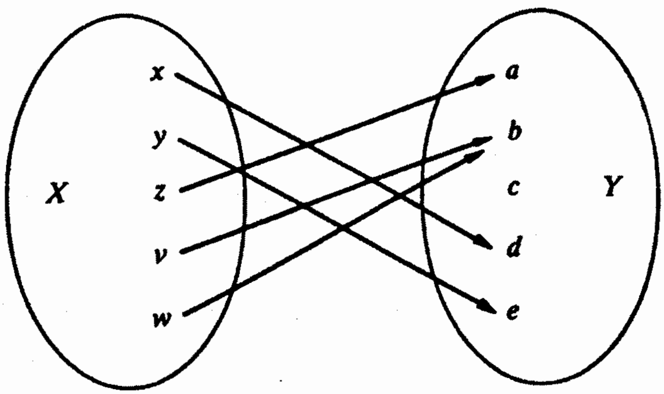
$f(۱/۳)$، $f(۷)$، و $f(۱٫۳۲۳۲۳۲\ldots)$ را بیابید.

۳. تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} ۴x+۳ & \text{اگر } x>۵ \\ x^{۲}-۲ & \text{اگر } -۶\leqslant x\leqslant ۵ \\ ۴-۵x & \text{اگر } x<-۶ \end{cases}$$

$f(-۷)$، $f(۳)$، و $f(۶)$ را بیابید.

۴. فرض‌کنید تابع $f:X\to Y$ با نمودار زیر تعریف شده‌است



نگارهٔ این تابع چیست؟

۵. فرض‌کنید تابع $f:X\to\mathbf{R}$ با $X=\{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ و $f(x)=x^{۲}-۳$ برای هر $x\in X$ تعریف شده‌است. نگارهٔ تابع f را بیابید.

۶. هریك از عبارتهای زیر یك تـابع از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ تعریف می‌کند. نگارهٔ هـریك از این تابعها را بیابید.

(الف) $f(x)=۲x^{۲}+۵$

(ب) $g(x)=\cos x$

(پ) $h(x)=x^{۳}-۱$

۷. گیریم $X\subseteq Y$ و $f=\{(x, x)|x\in X\}$. ثابت‌کنید‌که $f:X\to Y$ یك‌تابع است. [تذکر. این‌تابع را تابع شمولی می‌گویند ومی‌توان آن را با $f:X\subseteq Y$ نشان داد.]

۸. مجموعه‌های $X=\{x, y, z\}$ و $Y=\{۱, ۲, ۳\}$ مفروض‌اند. با کدام یك ازعبارات زیر یك تابع از X به Y مشخص می‌شود؟ برای هرعبارت‌که تابع نیست، دلیل تـابع

نبودن را ذکر کنید.

(الف) $f=\{(x,\ 1),\ (y,\ 2),(z,\ 3)\}$

(ب) $g=(x,\ 2),\ (y,\ 3),\ (z,\ 2)\}$

(ج) $h=\{(x,\ 2),\ (y,\ 1)\}$

(د) $i=\{(x,\ 1),\ (x,\ 2),\ (y,\ 1),\ (z,\ 3)\}$

۹. درمسئله ۸، بالا،

(الف) رابطه‌های وارون f^{-1}، g^{-1}، h^{-1} و i^{-1} را بیابید.

(ب) کدام یك از رابطه‌های وارون در (الف)، تابعی‌از Y به X هستند، وکدام‌یك تابع نیستند؟ چرا؟

۱۰. آیا f^{-1} درمسئلهٔ ۴ یك تابع از Y به X هست؟

۱۱. اگر $X=\{x,\ y,\ z\}$ و $Y=\{1,\ 2\}$، چند تابع از X به Y وجود دارد؟ درحالت کلیتر، اگر مجموعهٔ X، m عنصر و مجموعهٔ Y، n عنصر داشته‌باشد، چند تابع از X به Y وجود دارد؟

۱۲. چند تا از توابع مسئلهٔ ۱۱، توابع ثابت هستند؟

۱۳. فرض‌کنید $f:X\rightarrow Y$ یك تابع و A یك زیرمجموعهٔ ناتهی X است. ثابت‌کنیدکه $f|A:A\rightarrow Y$ تحدید تابع $f:X\rightarrow Y$ یك تابع است. [برای تعریف «تحدید» مسئلهٔ ۱۰، تمرین ۲.۳ را ببینید.]

۱۴. تابع $f:X\rightarrow Y$ مفروض است. ثابت‌کنید که هر زیرمجموعهٔ f مانند g نیز یك تابع است.

۱۵. فرض‌کنید $f:X\rightarrow X$ یك تابع‌از X به X، و همچنین یك رابطهٔ انعکاسی روی X است. ثابت‌کنیدکه دراین‌صورت f تابع همانی $I_X:X\rightarrow X$ است.

۱۶. فرض‌کنید X فاصلهٔ یکه $[0,1]$ است. یك تابع $f:X\rightarrow X$ بیابیدکه یك رابطهٔ متقارن روی X باشد.

۱۷. فرض‌کنیدکه دوتابع $f:X\rightarrow Y$ و $g:X\rightarrow Y$ یك حوزه و یك برد دارند. ثابت کنیدکه اگر $f\subseteq g$ آنگاه $f=g$.

۵. نگاره و نگارهٔ وارون مجموعه

یادآوری می‌شودکه اگر $f:X\rightarrow Y$ یك‌تابع و x و y به‌ترتیب عنصرهایی از X و Y باشند به‌قسمی‌که $y=f(x)$، آنگاه y نگارهٔ x است، و x یك‌پیش‌نگارهٔ y است. این مفهوم طبعاً از عنصرها به‌زیرمجموعه‌ها، به‌صورت زیر تعمیم می‌یابد:

تعریف ۹. گیریم $f:X\rightarrow Y$ یك تابع، و A و B به‌ترتیب زیرمجموعه‌هایی از X و Y باشند.

(الف) نگارهٔ A تحت f، که با $f(A)$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ تمام نگاره‌های $f(x)$ است به‌قسمی که $x \in A$.
(ب) نگارهٔ وارون B تحت f، که با $f^{-1}(B)$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ تمام پیش‌نگاره‌های yهای متعلق به B است.
با استفاده از نماد مجموعه‌ساز، $f(A)$ و $f^{-1}(B)$ با عبارتهای زیر بیان می‌شوند:

$$f(A)=\{f(x)|x \in A\}$$

$$f^{-1}(B)=\{x|f(x) \in B\}$$

قضیهٔ ۹. گیریم $f: X \to Y$ یك تابع است. آنگاه
(الف) $f(\varnothing)=\varnothing$.
(ب) $\forall x \in X,\ f(\{x\})=\{f(x)\}$.
(ج) اگر $A \subseteq B \subseteq X$، آنگاه $f(A) \subseteq f(B)$.
(د) اگر $C \subseteq D \subseteq Y$، آنگاه $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.
چون قضیهٔ ۹ به‌آسانی از تعریف ۹ نتیجه می‌شود، اثبات آن به خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۱۰. تابع $f: X \to Y$ و $\{A_\gamma|\gamma \in \Gamma\}$ یك خانواده از زیرمجموعه‌های X مفروض‌اند. آنگاه
(الف) $f(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)=\bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$.
(ب) $f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$.

برهان. (الف) تعریف ۹، و تعریف ۶ فصل ۲ را مکرر به‌کار می‌بریم، به‌دست‌می‌آید

$y \in f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \iff y=f(x)$ به‌ازای یك یا چند $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$

$\iff y=f(x)$ به‌ازای یك یا چند $x \in A_\gamma$، به‌ازای یك یا چند $\gamma \in \Gamma$

$\iff y \in f(A_\gamma)$ به‌ازای یك یا چند $\gamma \in \Gamma$

$\iff y \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$

بنابراین، $f(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)=\bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$.
(ب) چون بنابر قضیهٔ ۹ (ج)، برای هر $\gamma \in \Gamma$ داریم $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \subseteq A_\gamma$، پس برای هر $\gamma \in \Gamma$، $f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subseteq f(A_\gamma)$. از تعریف ۷ فصل ۲ نتیجه می‌شود که $f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$.

همچنانکه درمثال بعد می‌بینیم، نماد تساوی را نمی‌توان درقضیهٔ ۱۰ (ب) به‌جای نماد شمول $\subseteq$ گذاشت.

مثال ۱۱. گیریم $X=\{a, b\}$، $Y=\{c\}$، $\Gamma=\{1, 2\}$، $A_1=\{a\}$، $A_2=\{b\}$، و $f: X\to Y$ تابع ثابت $f(a)=f(b)=c$ باشند. آنگاه $f(A_1\cap A_2)=f(\varnothing)=\varnothing$، و $f(A_1)\cap f(A_2)=\{c\}$. این نشان می‌دهد که درهمه‌حال $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}f(A_\gamma)$ درست نیست.

قضیهٔ ۱۱. تابع $f: X\to Y$ و $\{B_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های Y مفروض‌اند. آنگاه

(الف) $f^{-1}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(B_\gamma)$.

(ب) $f^{-1}(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(B_\gamma)$.

برهان. (الف) تعریف ۹، و تعریف ۶ فصل ۲ را چندبار به‌کارمی‌بریم، به‌دست‌می‌آید:

$$x\in f^{-1}\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\Big)\Longleftrightarrow f(x)\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma$$

$$\Longleftrightarrow f(x)\in B_\gamma \qquad \text{به‌ازای یك یا چند } \gamma\in\Gamma$$

$$\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(B_\gamma) \qquad \text{به‌ازای یك یا چند } \gamma\in\Gamma$$

$$\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(B_\gamma)$$

بنابراین، ثابت شدکه $f^{-1}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(B_\gamma)$.

(ب) با گذاشتن $\bigcap$ به‌جای $\bigcup$ و عبارت «به‌ازای هر» به‌جای «به‌ازای یك یاچند» در برهان قسمت (الف)، یك برهان قسمت (ب) به‌دست می‌آید. دانشجو باید، مرحله به‌مرحله، جایگزینی را تا آنجا که کاملاً قانع شود، انجام دهد.

قضیهٔ ۱۲. گیریم $f: X\to Y$ یك تابع و B و C زیرمجموعه‌هایی از Y هستند. آنگاه

$$f^{-1}(B-C)=f^{-1}(B)-f^{-1}(C)$$

برهان. به‌هم ارزیهای زیر توجه می‌کنیم:

$$x\in f^{-1}(B-C)\Longleftrightarrow f(x)\in B-C \qquad \text{تعریف ۹}$$

$$\Longleftrightarrow f(x)\in B\wedge f(x)\notin C \qquad \text{تعریف ۵ (فصل ۲)}$$

$$\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(B)\wedge x\notin f^{-1}(C) \qquad \text{تعریف ۹}$$

$$\Longleftrightarrow x\in[f^{-1}(B)-f^{-1}(C)] \qquad \text{تعریف ۵ (فصل ۲)}$$

به‌این ترتیب ثابت می‌شود که

$$f^{-1}(B-C)=f^{-1}(B)-f^{-1}(C)$$

تمرین ۵.۳

۱. درمسئلهٔ ۲، تمرین ۴.۳، مقادیر زیر را بیابید

(الف) $f(\{-1, 0, 1\})$، $f(\{\sqrt{2}, \pi\})$، و $f(\{2, \log 2\})$

(ب) $f^{-1}(\{0, 1\})$، $f^{-1}(\{-3, 3\})$، $f^{-1}(\{4, 5\})$، و $f^{-1}(\{-3, 4, 5\})$

۲. درمسئلهٔ ۳، تمرین ۴.۳، مقادیر زیر را بیابید

(الف) $f(\{-7, 3, 6\})$، $f(\{-8, 2, 7\})$، و $f(\{-9, 1, 8\})$

(ب) $f^{-1}(\{0, 1\})$، $f^{-1}(\{-3, 3\})$، و $f^{-1}(\{1, 2, 3\})$.

۳. درمسئلهٔ ۴، تمرین ۴.۳، مقادیر $f(\{v, w\})$، $f^{-1}(\{c\})$، و $f^{-1}(\{a, b\})$ را بیابید.

۴. گیریم $f: X \to Y$ یك تابع، و $A \subseteq X$، و $B \subseteq Y$ هستند. ثابت کنید

(الف) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

(ب) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

۵. گیریم $f: X \to Y$ یك تابع و $A \subseteq X$، و $B \subseteq Y$ هستند. مثالهایی بیاورید که نشان دهد حکمهای زیر دروغ می‌باشند

(الف) اگر $B \neq \varnothing$، آنگاه $f^{-1}(B) \neq \varnothing$

(ب) $f^{-1}(f(A))=A$

(ج) $f(f^{-1}(B))=B$

(د) $f(X)=Y$.

۶. ثابت کنید که اگر $f(X)=Y$، مسئلهٔ ۵ (ج) راست است.

۷. گیریم تابع $f: X \to Y$ به‌قسمی است که $f(X)=Y$، B و C زیرمجموعه‌هایی از Y هستند. ثابت کنید اگر $f^{-1}(B)=f^{-1}(C)$، آنگاه $B=C$. مثالی بیاورید که نشان دهد که درحالت $f(X) \neq Y$، حکم نادرست است.

۸. گیریم X و Y دومجموعه، و $p_X: X \times Y \to X$ و $p_Y: X \times Y \to Y$ به‌ترتیب توابعی‌هستند که با $p_X(x, y)=x$، و $p_Y(x,y)=y$ برای‌تمام $(x, y) \in X \times Y$ داده شده‌اند. (p_X و p_Y به‌ترتیب Xـتصویر و Yـتصویر گفته می‌شوند). ثابت کنید که اگر $\mathcal{R}$ یك رابطه از X به Y باشد،یعنی $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$، آنگاه $p_X(\mathcal{R})=\mathrm{Dom}\,\mathcal{R}$، و $p_Y(\mathcal{R})=\mathrm{Im}\,\mathcal{R}$.

۹. تابع $f: X \to Y$ و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ مفروض‌اند. ثابت کنید

(الف) $f(A \cap f^{-1}(B))=f(A) \cap B$

(ب) $f(f^{-1}(B))=f(X)\cap B$.

۱۰. تابع $f:X\to Y$ و $B\subseteq Y$ مفروض‌اند. ثابت کنید

$$f^{-1}(Y-B)=X-f^{-1}(B)$$

۱۱. گیریم $f:X\to Y$ یك تابع، و A و B زیرمجموعه‌هایی از X هستند. مثالی بیاورید که نشان دهد عبارت زیر نادرست است.

$$f(A-B)=f(A)-f(B)$$

۱۲. قضیهٔ ۹ را ثابت کنید.

۱۳. گیریم $f:X\to Y$ یك تابع است. ثابت کنید خانوادهٔ مجموعه‌های $\mathcal{P}=\{f^{-1}(y)|f^{-1}(y)\neq\varnothing,\ y\in Y\}$ یك افراز X است.

۱۴. تابع $f:X\to Y$ مفروض است. ثابت کنید رابطهٔ

$$\mathcal{R}(f)=\{(a,b)\in X\times X|f(a)=f(b)\}$$

یك رابطهٔ هم‌ارزی در X است.

۱۵. فرض کنیم f، $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}(f)$ همانهایی باشند که در مسئلهٔ ۱۳ و ۱۴ عنوان شده‌است. ثابت کنید $X/\mathcal{R}(f)=\mathcal{P}$ و $X/\mathcal{P}=\mathcal{R}(f)$.

۶. تابع یك به‌یك، پوششی، و دوسویی

در مطالعهٔ توابع، مناسب می‌دانیم که سه نوع مهم از توابع را نامگذاری کنیم.

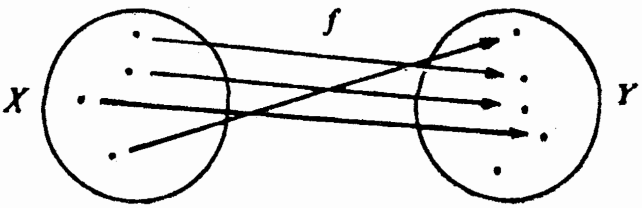
تعریف ۱۰. تابع $f:X\to Y$ یك به‌یك یا انژکتیو گفته می‌شود اگر $x_1, x_2\in X$، و $f(x_1)=f(x_2)$، آنگاه $x_1=x_2$. تابع انژکتیو را انژکسیون نیز می‌گویند.

بنا بر قانون عکس‌نقیض در منطق، این تعریف هم‌ارز است با اینکه بگوییم تابع $f:X\to Y$ یك به‌یك است اگر و تنها اگر از $x_1, x_2\in X$ و $x_1\neq x_2$ نتیجه شود $f(x_1)\neq f(x_2)$. مثلاً، تابع شمول در مسئلهٔ ۷، تمرین ۴.۳، یك به‌یك است.

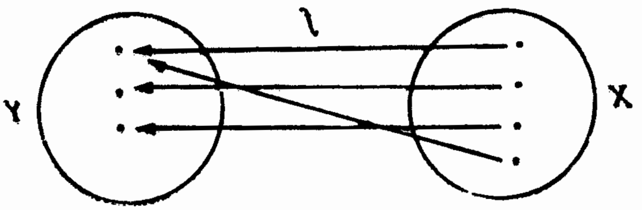
تعریف ۱۱. تابع $f:X\to Y$ سورژکتیو یا پوششی گفته می‌شود درصورتی که اگر $y\in Y$ آنگاه حداقل یك $x\in X$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $y=f(x)$. تابع سورژکتیو، سورژکسیون نیز نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر، $f:X\to Y$ سورژکسیون است اگر و تنها اگر $f(x)=Y$.

مثلاً، تابع مثال ۷، بخش ۴، پوششی نیست.

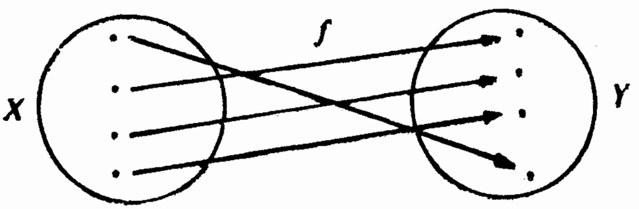
مثال ۱۲. تابع سینوسی $f:\mathbf{R}\to[-1,1]$ که با $f(x)=\sin x$ تعریف می‌شود پوششی است. اما اگر به‌جای $[-1,1]$، برد تابع $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ پوششی نیست.



شکل۰۱۲ $f: X \to Y$ یک به‌یک است.



شکل۰۱۳ $f: X \to Y$ پوششی است.



شکل۰۱۴ $f: X \to Y$ دوسویی است.

تعریف ۰۱۲ تابع $f: X \to Y$ دوسویی یا بیژکتیو گفته می‌شود اگر هم یک به‌یک باشد وهم پوششی. به‌تابع دوسویی، تناظر یک به‌یک نیز گفته می‌شود.

مثلاً، تابع همانی در مثال ۹، بخش۴، یک دو سویی است. تعاریف ۱۰، ۱۱ و ۱۲ در شکلهای ۱۲، ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده‌اند. مجموعه‌های X و Y به‌صورت مجموعه‌هایی از نقاط داخل دایره‌ها نشان داده شده‌اند. در هرشکل، هر نقطهٔ X با یک پیکان به‌یک نقطهٔ Y مربوط شده‌است. با مجموعهٔ جفتهایی که به‌این ترتیب به‌دست می‌آیند یک تابع $f:X \to Y$ مشخص می‌شود.

حکم قضیهٔ ۱۰ (ب) را می‌توان برای تابع یک به‌یک به‌صورت بهتری درآورد.

قضیهٔ ۰۱۳ گیریم $f: X \to Y$ یک به‌یک است و $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X هستند. آنگاه

$$f\Big(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\Big) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

برهان. بنا بر تعریف ۹، و تعریف ۷ فصل۲، داریم

$$y\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)\Longleftrightarrow y\in f(A_\gamma)\,\forall\gamma\in\Gamma$$

$$\Longleftrightarrow (\exists x_\gamma\in A_\gamma \text{ بهقسمی که } y=f(x_\gamma))\,\forall\gamma\in\Gamma$$

چون $f:X\to Y$ یك به‌یك است، همهٔ این x_γها یکی هستند؛ این عنصر را با $x_\circ$ نشان می‌دهیم. پس داریم

$$y\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)\Longleftrightarrow \exists x_\circ\in A \quad \text{بهقسمی‌که} \quad \forall\gamma\in\Gamma \text{ ،} y=f(x_\circ)$$

$$\Longleftrightarrow \exists x_\circ\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \quad \text{بهقسمی‌که} \quad y=f(x_\circ)$$

$$\Longleftrightarrow y\in f\Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\Big)$$

بنابراین، $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

یادآوری می‌شود که اگر $\mathcal{R}$ یك رابطه از X به Y باشد، آنگاه رابطهٔ وارون آن

$$\mathcal{R}^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in\mathcal{R}\}$$

یك رابطه از Y به X است. چون تابع $f:X\to Y$ (نوع بخصوصی‌از) یك رابطه از X به Y است، f^{-1} حداقل یك رابطه از Y به X است. طبیعی است سؤال شود که چه‌وقت f^{-1} یك تابع است. جواب این سؤال در قضیهٔ زیر آمده‌است.

قضیهٔ ۱۴. گیریم $f:X\to Y$ دوسویی است، آنگاه $f^{-1}:Y\to X$ دوسویی است.

برهان. نخست ثابت می‌کنیم که رابطهٔ f^{-1} از Y به X یك تابع است. چون $f:X\to Y$ پوششی است، بنا بر مسئلهٔ ۳ (الف) تمرین ۲۰۳ داریم

$$\mathrm{Dom}(f^{-1})=\mathrm{Im}(f)=Y$$

بنابراین شرط (الف) تعریف ۸ برقرار است. برای اینکه نشان داده شود که f^{-1} درشرط دیگر نیزصدق می‌کند، فرض‌می‌کنیم که $(y,x_1)\in f^{-1}$ و$(y,x_2)\in f^{-1}$. آنگاه داریم $(x_1,y)\in f$ و $(x_2,y)\in f$. در نتیجه $f(x_1)=f(x_2)$. حال چون $f:X\to Y$ یك به‌یك‌است، تساوی‌اخیر نتیجه می‌دهد که $x_1=x_2$. درنتیجه‌ثابت کرده‌ایم که $f^{-1}:Y\to X$ یك تابع است.

برای اینکه نشان دهیم $f^{-1}:Y\to X$ یك به‌یك است، گیریم $y_1,y_2\in Y$ و $f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2)=x$. پس‌داریم $f(x)=y_1$ و$f(x)=y_2$ و از این‌رو $y_1=y_2$. این ثابت می‌کندکه f^{-1} یك به‌یك است.

بالاخره بایدنشان داده شود که $f^{-1}:Y\to X$ پوششی‌است. بنا برمسئلهٔ۳ (ب)، تمرین

۲.۳، داریم $\operatorname{Im}(f^{-1}) = \operatorname{Dom}(f) = X$، که نشان می‌دهد f^{-1} پوششی است. به‌این ترتیب اثبات کامل است.

اگر $f: X \to Y$ دوسویی باشد، تابع $f^{-1}: Y \to X$ تابع وارون گفته می‌شود (مسئلهٔ ۱۷، تمرین ۶.۳ را هم ببینید).

بنابر قضیهٔ ۱۴، اگر $f: X \to Y$ دوسویی باشد (= تناظر یك به‌یك)، می‌توانیم بگوییم f یك تناظر یك به‌یك بین مجموعه‌های X و Y است.

تمرین ۶.۳

۱. کدام‌یك از توابع مسائل ۲، ۳ و ۴ تمرین ۴.۳ یك به‌یك هستند؟ کدام‌یك پوششی هستند؟

۲. کدام‌یك از توابع مسائل ۵ و ۶ تمرین ۴.۳ یك به‌یك هستند؟ پوششی هستند؟ دوسویی هستند؟

۳. گیریم $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ تابعی است که به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ با $f(x) = ۳x - ۲$ تعریف شده است.

(الف) ثابت کنید که تابع f دوسویی است.

(ب) تابع وارون f، یعنی f^{-1}، را پیدا کنید.

۴. گیریم $g: (-\pi/۲, \pi/۲) \to \mathbf{R}$ تابعی است که به‌ازای هر $-\pi/۲ < x < \pi/۲$ با $g(x) = \operatorname{tg} x$ تعریف شده است. آیا این تابع دوسویی است؟ اگر چنین است، تابع وارون آن را پیدا کنید.

۵. ثابت کنید که تابع مشخصهٔ $\chi_A: X \to \{۰, ۱\}$ که در مثال ۸، بخش ۴ آمده است، پوششی است اگر و تنها اگر $A \subset X$ و $A \neq \varnothing$. چه وقت $\chi_A: X \to \{۰, ۱\}$ دوسویی می‌شود؟

۶. ثابت کنید که تابع ثابت $C_b: X \to Y$ پوششی است اگر و تنها اگر $Y = \{b\}$. چه‌وقت $C_b: X \to Y$ یك به‌یك می‌شود؟

۷. ثابت کنید که X-تصویر $p_X: X \times Y \to X$ و Y-تصویر $p_Y: X \times Y \to Y$ که در مسئلهٔ ۸، تمرین ۵.۳ آمده‌اند، پوششی هستند. چه‌وقت X-تصویر یك به‌یك است؟

۸. ثابت کنید که یك تناظر یك به‌یك بین مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbf{N}$ و مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج وجود دارد.

۹. ثابت کنید که یك تناظر یك به‌یك بین مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ و مجموعهٔ تمام اعداد صحیح فرد وجود دارد.

۱۰. گیریم X یك مجموعهٔ متناهی با m عنصر و Y یك مجموعهٔ متناهی با n عنصر است. ثابت کنید

(الف) اگر $m > n$، آنگاه هیچ تابع یك به‌یك $f: X \to Y$ وجود ندارد.

(ب) اگر $m \leqslant n$، آنگاه دقیقاً $n!/(n-m)!$ تابع یك به‌یك وجود دارد.

[به مسئلهٔ ۱۱، تمرین ۴.۳ نگاه کنید.]

۱۱. گیریم X یك مجموعهٔ متناهی با m عنصر است. چند تابع دوسویی از X روی X وجود دارد؟

[تذکر: یك تابع دوسویی ازیك مجموعهٔ متناهی‌روی خودش، در مواردی جایگشت نامیده می‌شود.]

۱۲. تابع $f: X \to Y$ و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ مفروض‌اند. ثابت کنید

(الف) اگر f یك به‌یك باشد، آنگاه $A = f^{-1}(f(A))$.

(ب) اگر f پوششی باشد، آنگاه $B = f(f^{-1}(B))$.

۱۳. عکس مسئلهٔ ۱۲ را ثابت‌کنید:

(الف) اگر برای هر $A \subset X$، $A = f^{-1}(f(A))$، آنگاه f یك‌به‌یك است.

(ب) اگر برای هر $B \subset Y$، $B = f(f^{-1}(B))$، آنگاه f پوششی است.

۱۴. فرض کنیم $f: X \to Y$ یك به یك است و $B \subset X$. ثابت کنید $f(X-B) = f(X) - f(B)$.

۱۵. گیریم $f: X \to Y$ یك به‌یك، و A و B زیرمجموعه‌های X هستند. ثابت‌کنیدکه $f(A-B) = f(A) - f(B)$. [با مسئلهٔ ۱۱ تمرین ۵.۳ مقایسه‌کنید]

۱۶. فرض‌کنیم تابع $f: X \to X$ چنان باشدکه برای هر $x \in X$، $f(f(x)) = x$. ثابت کنید f یك رابطهٔ متقارن روی X است.

۱۷. عکس‌قضیهٔ ۱۴ را ثابت‌کنید: فرض‌کنید $f: X \to Y$ چنان تابعی است‌که f^{-1} تابعی از Y به X است. آنگاه $f: X \to Y$ دوسویی است.

۱۸. ثابت‌کنید $f: X \to Y$ یك به‌یك است اگروتنها اگر برای تمام زیرمجموعه‌های X مانند A و B، $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

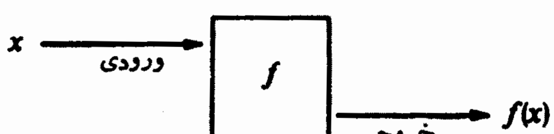
۱۹. عکس مسئلهٔ ۱۵ را ثابت‌کنید:

اگر برای تمام زیرمجموعه‌های X مانند A و B، $f(A-B) = f(A) - f(B)$، آنگاه f یك به‌یك است.

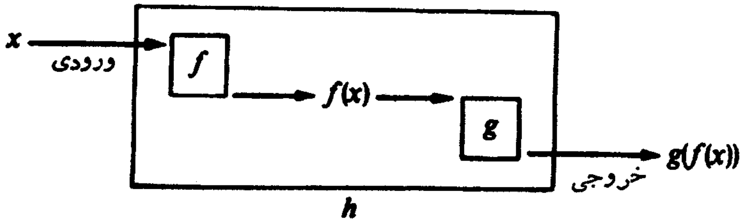
۲۰. آیا عکس مسئلهٔ ۱۴ صحیح است؟

۷. ترکیب توابع

یك تابع $f: X \to Y$ را می‌توان ماشینی‌تصورکردکه شیئی اختیاری از مجموعهٔ X مانند x را می‌گیرد، روی آن به‌طریقی عمل می‌کند، و آن‌را به‌شیء جدید $f(x)$ تبدیل‌کرده تحویل می‌دهد. این تعبیر در شکل۱۵ نشان داده شده‌است.



شکل۱۵



شکل ۱۶

دو تابع $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ به‌طوری‌که حوزهٔ تابع دومی برد تابع اولی است، مفروض‌اند. این دو تابع را دو ماشین تصور کنید، مثلاً یکی ماشین لباسشویی و دیگری ماشین خشك‌کن. لازم نیست مخترع باشیم تا بتوانیم تصور کنیم که امکان دارد از ترکیب این دو ماشین، ماشین جدیدی بسازیم؛ ماشینی می‌سازیم که لباس چرك x را می‌شوید، آن را به‌لباس پاك وخیس $f(x)$ تبدیل می‌کند و سپس آن را خشك می‌کند. چیزی که از ماشین خارج می‌شود لباس پاك و خشك $g(f(x))$ است. این طرز فکر در شکل ۱۶ نشان داده شده‌است.

از «ترکیب» ماشینهای $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$، که با $h: X \to Z$ نمایش داده می‌شود، ماشین جدیدی به‌دست می‌آید که یك شیء دلخواه X مانند x را می‌گیرد و آن‌را به‌شیء $h(x) = g(f(x))$، که یکی از اشیاء Z است، تبدیل می‌کند. نماد مرسوم برای h، $g \circ f$ است و $g \circ f(x) = g(f(x))$؛ h را «ترکیب» f و g می‌نامند.

اکنون می‌توانیم تعریف زیر را ارائه دهیم.

تعریف ۱۳. دو تابع $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ مفروض‌اند. ترکیب این دو تابع، تابع $g \circ f: X \to Z$ است که در آن به‌ازای هر x در X، $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. به‌صورت دیگر

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g\}$$

مثال ۱۳. گیریم $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ و $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ دو تابع هستند که به‌ترتیب برای تمام xهای در $\mathbf{R}$ به‌صورت $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x^2$ داده شده‌اند. ترکیب $(g \circ f)(x)$ و $(f \circ g)(x)$ را بیابید.

حل. با استفاده از تعریف ۱۳، داریم

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \qquad (1)\\ &= g(x+1)\\ &= (x+1)^2\\ &= x^2 + 2x + 1\end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2+1 \qquad (۲)$$

از مثال ۱۳ نتیجه می‌شود که درحالت کلی $g \circ f \neq f \circ g$ و بنابراین، ترکیب تابعی، جابه‌جایی نیست.

قضیهٔ ۱۵. ترکیب تابعی شرکتپذیر است. یعنی اگر $f : X \to Y$، $g : Y \to Z$، و $h : Z \to W$، آنگاه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

برهان. نخست توجه می‌کنیم که $h \circ (g \circ f)$ و $(h \circ g) \circ f$ هردو توابعی از X به W هستند. پس، بنابر قضیهٔ ۷ بخش ۴ کافی است نشان دهیم که برای هر x در X، $[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x)$.

اما از تعریف ۱۳ نتیجه می‌شود که برای هر x در X

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$$

و

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

از این‌دو رابطه دیده می‌شود که $[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x)$، $\forall x \in X$. اکنون اثبات‌کامل است.

قضیهٔ ۱۶. تابع $f : X \to Y$ مفروض است. آنگاه

(الف) اگر تابع $g : Y \to X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g \circ f = I_X$ (که در آن $I_X : X \to X$ تابع همانی است‌که در مثال ۹، بخش ۴ تعریف شده‌است)، آنگاه $f : X \to Y$ یك به‌یك است.

(ب) اگر تابع $h : Y \to X$ وجود داشته‌باشد به‌طوری که $f \circ h = I_Y$، آنگاه $f : X \to Y$ پوششی است.

برهان. (الف) فرض‌کنید تابع $g : Y \to X$ به‌طوری‌که $g \circ f = I_X$ وجود دارد. آنگاه برای هر x_1 و x_2 در X به‌طوری‌که $f(x_1) = f(x_2)$، داریم:

$$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2$$

این نشان می‌دهد که $f : X \to Y$ یك به‌یك است.

(ب) فرض کنید تابع $h: Y \to X$ به‌طوری که $f \circ h = I_Y$ وجود دارد. آنگاه برای هر $y \in Y$، یک عنصر

$$x = h(y) \in X$$

وجود دارد به‌قسمی که

$$f(x) = f(h(y)) = (f \circ h)(y) = I_Y(y) = y$$

بنابر تعریف ۱۱، $f: X \to Y$ پوششی است.

تمرین ۷.۳

۱. فرض کنید که دو تابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ و $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌ترتیب با $f(x) = 2x^3 + 1$ و $g(x) = \cot x$ برای هر $x \in \mathbf{R}$ تعریف شده‌اند.
(الف) ترکیب $g \circ f$ را بیابید.
(ب) ترکیب $f \circ g$ را بیابید.

۲. فرض کنید که دو تابع $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ و $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ به‌ترتیب با $f(x) = \log_{10} x$ و $g(x) = 10^x$، برای هر $x \in \mathbf{R}$ تعریف شده‌اند.
(الف) ترکیب $g \circ f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ را بیابید.
(ب) ترکیب $f \circ g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید.

۳. گیریم f، g، و h توابع داده شده در مسئلهٔ ۶، تمرین ۴.۳ هستند.
(الف) ترکیب $g \circ f$ را بیابید.
(ب) ترکیب $h \circ g$ را بیابید.
(پ) ترکیب $h \circ (g \circ f)$ را بیابید.
(ت) ترکیب $(h \circ g) \circ f$ را بیابید.
(ث) دو تابع $h \circ (g \circ f)$ و $(h \circ g) \circ f$ را که به‌دست آورده‌اید باهم مقایسه کنید؛ آیا آنها یکی هستند؟

۴. تابع $f: X \to Y$ مفروض است. ثابت کنید که $f \circ I_X = f = I_Y \circ f$.

۵. گیریم $f: X \to Y$ دوسویی و $f^{-1}: Y \to X$ تابع وارون f است. ثابت کنید که $f \circ f^{-1} = I_Y$ و $f^{-1} \circ f = I_X$.

۶. گیریم $f: X \to Y$ یک تابع است. اگر توابع $g: Y \to X$ و $h: Y \to X$ وجود داشته باشند به‌طوری که $g \circ f = I_X$ و $f \circ h = I_Y$، ثابت کنید $f: X \to Y$ دوسویی است و $g = h = f^{-1}$.

۷. دو تابع $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ مفروض‌اند. ثابت کنید
(الف) اگر $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ یک به‌یک باشند، آنگاه $g \circ f: X \to Z$ نیز یک به‌یک است.
(ب) اگر $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ پوششی باشند، آنگاه $g \circ f: X \to Z$ نیز

پوششی است.

۸. گیریم $\mathcal{R}$ یك رابطه از X به Y و $\mathcal{S}$ یك رابطه از Y به Z است. می‌توانیم، همانند ترکیب توابع، ترکیب این رابطه‌ها را با

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) \in X \times Z \,|\, (\exists y)[(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{S}]\}$$

که رابطه‌ای از X به Z است، تعریف کنیم. ثابت کنید که

(الف) $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$

(ب) اگر به‌علاوه $\mathcal{T}$ یك رابطه از Z به W باشد، آنگاه $\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$.

۹. فرض کنیم $\mathcal{R}$ یك رابطه روی X است. ثابت کنید

(الف) $\mathcal{R}$ متقارن است اگر و تنها اگر $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \supseteq I_X$.

(ب) $\mathcal{R}$ متعدی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

۱۰. فرض کنید $\mathcal{R}$ یك رابطه از X به Y و $\mathcal{S}$، $\mathcal{T}$ رابطه‌هایی از Y به Z هستند. ثابت کنید

$$(\mathcal{T} \cup \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = (\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$$

۱۱. فرض کنید $\mathcal{R}$ و $\mathcal{S}$ رابطه‌هایی از X به Y هستند و $\mathcal{T}$ یك رابطه از Y به Z است. ثابت کنید

$$\mathcal{T} \circ (\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq (\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})$$

۱۲. گیریم $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دو تابع دوسویی هستند. ثابت کنید که $g \circ f: X \to Z$ دوسویی است، و تابع وارون $(g \circ f)^{-1}: Z \to X$، ترکیب $f^{-1} \circ g^{-1}: Z \to X$ است، که در آن تابعهای $g^{-1}: Z \to Y$ و $f^{-1}: Y \to X$ به‌ترتیب وارون توابع g و f هستند. خلاصه اینکه $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

۴

جبر بول و کاربردهای آن

مطالعهٔ جالب و مفید مجموعه‌ها در ارتباط با عملهای اجتماع، اشتراک و متممگیری به‌تجرید دستگاه جبری مهم و مفیدی منجر می‌شود که به‌جبر بول (به‌افتخار جورج بول* (۱۸۱۳–۱۸۶۴)، ریاضیدان و منطقدان) معروف است. دراین فصل، ویژگیهای اصلی جبر بول و کاربرد آن در طراحی مدارهای الکترونیکی و مدارهای رقمی مطالعه شده‌است.

۰۱ جبر بول

تعریفهای هم‌ارز اما ظاهراً متفاوتی ازجبر بول وجود دارد، ما به‌خاطر تشابه‌آن باساختمان بعضی از مجموعه‌های مجموعه‌ها، تعریف زیر را انتخاب می‌کنیم. منظور از یك عمل دوتایی روی مجموعهٔ S، تابعی است مانند $\circ$ از حاصلضرب دکارتی $S\times S$ به S. برای هر $(a, b)\in S\times S$، به‌جای $\circ(a, b)$ معمولاً $a\circ b$ می‌نویسیم.

تعریف ۰۱ جبر بول یك سه‌گانهٔ $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ است که در آن $\mathcal{B}$ یك مجموعهٔ غیر تهی، و

---

* George Bool (1813–1864)

$+$ و $\bullet$ دوعمل دوتایی روی $\mathcal{B}$ هستند که به‌ازای هر $a, b, c \in \mathcal{B}$ در شرطهای (الف) تا (ه) صدق می‌کنند:

(الف) جابه‌جایی:
$$a+b=b+a$$
$$a\bullet b=b\bullet a$$

(ب) شرکتپذیری:
$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a\bullet(b\bullet c)=(a\bullet b)\bullet c$$

(ج) پخشپذیری:
$$a\bullet(b+c)=(a\bullet b)+(a\bullet c)$$
$$a+(b\bullet c)=(a+b)\bullet(a+c)$$

(د) یکه‌ها: عضوهای $۰, ۱ \in \mathcal{B}$ با شرط $۱ \neq ۰$ وجود دارند به‌قسمی که
$$a+۰=a \quad \text{و} \quad a\bullet ۱=a$$

(ه) متممگیری: برای هر $a \in \mathcal{B}$، عضو $a' \in \mathcal{B}$ وجود دارد به‌قسمی که
$$a+a'=۱ \quad \text{و} \quad a\bullet a'=۰$$

عملهای $+$ و $\bullet$ به‌ترتیب جمع (یا) وضرب (و) نامیده می‌شوند. عضوهای ۰ و ۱ در (د)، گرچه هیچ‌گونه ربطی با اعداد ۰ و ۱ ندارند، عنصرهای صفر و همانی گفته می‌شوند عضو a' در (ه) متمم a گفته می‌شود.

مثال ۱. گیریم $\mathcal{B}_۲=\{۰, ۱\}$ و عملهای دوتایی $+$ و $\bullet$ روی $\mathcal{B}_۲$ با جدولهای زیر داده شده‌اند

جدول ۱

$+$	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۱

$\bullet$	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

آنگاه، سه‌گانهٔ $(\mathcal{B}_۲, +, \bullet)$ درتعریف جبر بول صدق می‌کند. بنابر (د) بدیهی است که تعداد عضوهای این جبر بول کمترین است. عضوهای $۰'$ و $۱'$ را بیابید.

مثال ۲. U مجموعه‌ای است غیرتهی. در مجموعهٔ توانی $\mathcal{P}(U)$، گیریم برای هر

$A, B \in \mathcal{P}(U)$، $A+B=A\cup B$ و $A\cdot B=A\cap B$. آنگاه $(\mathcal{P}(U), +, \cdot)$ یك جبر بول است.

مثال ۳. گیریم $\mathcal{B}$ مجموعهٔ کلاسهای هم‌ارزی منطقی گزاره‌های پدیدآمده از مجموعه‌ای از گزاره‌های سادهٔ $\{p, q, r\ldots\}$ است. آنگاه سه‌گانه $(\mathcal{B}, \vee, \wedge)$ یك جبر بول است که در آن ۰ کلاس تناقضها و ۱ کلاس راستگوها است. برای $a\in\mathcal{B}$، a' چیست؟

اکنون آماده‌ایم چند قضیهٔ اساسی درجبر بول را ثابت‌کنیم.

قضیهٔ ۱. در جبر بول،

(الف) ۰ و ۱ یکتا هستند.

(ب) برای هر a در $\mathcal{B}$، a' یکتا است.

برهان. (الف) گیریم $\tilde{0}$ یك عنصر صفر دیگر در $\mathcal{B}$ باشد. داریم

$\tilde{0}=\tilde{0}+0$ بنابرتعریف ۱ (د)

$=0+\tilde{0}$ بنابرتعریف ۱ (الف)

$=0$ بنابرتعریف ۱ (د)، زیرا $\tilde{0}$ عنصر صفر است

برهان یکتایی ۱ با آنچه گفته‌شد مشابه است.

(ب) گیریم x یك عضو $\mathcal{B}$ است به‌قسمی‌که $a+x=1$ و $a\cdot x=0$. آنگاه

$x=x\cdot 1$ تعریف ۱ (د)

$=x\cdot(a+a')$ تعریف ۱ (ه)

$=(x\cdot a)+(x\cdot a')$ تعریف ۱ (ج)

$=(a\cdot x)+(x\cdot a')$ تعریف ۱ (الف)

$=0+(x\cdot a')$ چون $a\cdot x=0$

$=x\cdot a'$ تعریف ۱ (د)

همچنین، می‌توان ثابت کرد که $a'=x\cdot a'$. بنابراین $x=a'$ و ازاین‌رو a' یکتا است.

قضیهٔ ۲. برای هر $a\in\mathcal{B}$، $(a')'=a$.

برهان این قضیه به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۳ را ببینید).

قضیهٔ ۳. عملهای $+$ و $\cdot$ خود توان هستند:

برای هر $a\in\mathcal{B}$، $a+a=a$ و $a\cdot a=a$

برهان.

$$a+a=(a+a)\cdot ۱ \qquad \text{تعریف ۱ (د)}$$
$$=(a+a)\cdot(a+a') \qquad \text{تعریف ۱ (ه)}$$
$$=a+(a\cdot a') \qquad \text{تعریف ۱ (ج)}$$
$$=a+۰ \qquad \text{تعریف ۱ (ه)}$$
$$=a \qquad \text{تعریف ۱ (د)}$$

برهان $a\cdot a=a$ به‌خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۴. در جبر بول، $۱=۰'$ و $۰=۱'$.

برهان. بنابر تعریف ۱ (الف) و ۱ (د) داریم $۱=۰+۱=۱+۰$، و از تعریف ۱ (د) داریم $۰=۱\cdot۰$، پس بنابر تعریف ۱ (ه) وقضیهٔ ۱ (ب) داریم $۱=۰'$. معادلهٔ دوم $۰=۱'$ به‌همین ترتیب، یا با به‌کاربردن قضیهٔ ۲ برای $۱=۰'$ ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۵. برای هر $a\in\mathcal{B}$، $a+۱=۱$ و $a\cdot۰=۰$.

برهان.

$$a+۱=a+(a+a') \qquad \text{تعریف ۱ (ه)}$$
$$=(a+a)+a' \qquad \text{تعریف ۱ (ب)}$$
$$=a+a' \qquad \text{قضیهٔ ۳}$$
$$=۱ \qquad \text{تعریف ۱ (ه)}$$

برهان $a\cdot۰=۰$ به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۶. قانون دمورگن: برای هر $a, b\in\mathcal{B}$ داریم

$$(a+b)'=a'\cdot b' \quad \text{و} \quad (a\cdot b)'=a'+b'$$

برهان. برای اثبات قسمت اول، بنابر تعریف ۱ (ه) وقضیهٔ ۱ (ب) کافی است نشان دهیم‌که $(a+b)+(a'\cdot b')=۱$ و $(a+b)\cdot(a'\cdot b')=۰$.
اما داریم

$$(a+b)+(a'\cdot b')=[(a+b)+a']\cdot[(a+b)+b'] \qquad \text{تعریف ۱ (ج)}$$
$$=[a'+(a+b)]\cdot[a+(b+b')] \qquad \text{تعریف ۱ (الف) و ۱ (ب)}$$
$$=[(a'+a)+b]\cdot[a+۱] \qquad \text{تعریف ۱ (ب) و ۱ (ه)}$$

$$=(1+b)\cdot(a+1)$$ تعریف ۱ (ه)

$$=1\cdot 1$$ تعریف ۱ (الف)، قضیهٔ ۵

$$=1$$

برهان $(a+b)\cdot(a'\cdot b')=0$ و قسمت دوم قضیه به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

جبر بول $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ نقش مهمی درمطالعهٔ جبرهـای بول مجرد دارد. اگـر $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ یك جبر بول متناهی‌باشد، آنگاه می‌توان ثابت کرد که یك مجموعهٔ متناهی U وجود دارد به‌قسمی کـه $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ دقیقاً دارای همان خواص جبری $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ است و بنابراین $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ را می‌توان کاملاً به‌جای $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ به‌کار برد. اگر $\mathcal{B}$ نامتناهی باشد، این مطلب دقیقاً درست‌نیست، اما $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ را می‌توان با یك زیرخانوادهٔ $\mathcal{P}(U)$ از یك مجموعهٔ نامتناهی مناسب U، تطبیق داد.

تمرین ۱۰۴

۱. نشان دهیدکه $(\mathcal{B}_2, +, \cdot)$ درمثال ۱ کوچکترین جبر بول است.

۲. نشان‌دهیدکه $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ درمثال ۲،درشرایط تعریف ۱ از(الف)تا(ه)صدق‌می‌کند.

۳. قضیهٔ ۲ را ثابت‌کنید: برای هر $a \in \mathcal{B}$، $(a')'=a$.

۴. آیا می‌توانید جبر بولی بسازیدکه دقیقاً سه عنصر داشته‌باشد؟ چرا؟

۵. آیا یك جبر بول می‌تواند عنصری مانند a داشته باشد به‌طوری‌که $a'=a$؟

۶. ثابت‌کنیدکه برای هر a متعلق به $\mathcal{B}$ داریم $a\cdot a=a$.

۷. ثابت‌کنیدکه $1'=0$.

۸. ثابت‌کنیدکه $a\cdot 0=0$.

۹. قانونهای جذب زیر را ثابت‌کنید:

(الف) $a+(a\cdot b)=a$ (ب) $a\cdot(a+b)=a$.

۱۰. ثابت‌کنیدکه $(a+b)\cdot(a'\cdot b')=0$.

۱۱. قسمت دوم قضیهٔ ۶ را ثابت‌کنید: $(a\cdot b)'=a'+b'$.

۱۲. ثابت‌کنیدکه اگر $a+b=0$ آنگاه $a=0$ و $b=0$.

۱۳. ثابت‌کنیدکه اگر $a\cdot b=1$ آنگاه $a=1$ و $b=1$.

۱۴. ثابت‌کنیدکه $a\cdot(a'+b)=a\cdot b$.

۱۵. گیریم a و b دوعضو یك جبر بول هستند. ثابت‌کنیدکه چهار شرط زیر هم‌ارزند.

(الف) $a+b=b$ (ب) $a'+b=1$

(ج) $a\cdot b=a$ (د) $a'\cdot b=0$

۱۶. دریک جبر بول $\mathcal{B}$، می‌گوییم a مقدم بر b است و آن را با $a \leqslant b$ نشان می‌دهیم، اگر وتنها اگر یکی ازچهار شرط مسئلهٔ ۱۵ برقرار باشد. ثابت کنید

(الف) $\leqslant$ انعکاسی است: برای هر $a \in \mathcal{B}$، $a \leqslant a$.

(ب) $\leqslant$ متعدی است: اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$ آنگاه $a \leqslant c$.

(ج) $\leqslant$ پاد متقارن است: اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant a$ آنگاه $a = b$.

[چنین رابطه‌ای را، رابطهٔ ترتیب جزئی می‌گویند.]

۱۷. ثابت کنید برای هر $a \in \mathcal{B}$، $0 \leqslant a \leqslant 1$.

۲. تابع بول

متغیری که ارزشهایش فقط یا ۰ است یا ۱، متغیر دوتایی نامیده می‌شود. تابع بول، عبارتی صوری متشکل از متغیرهای دوتایی، عملهای دوتایی $+$ و $\cdot$، عمل یکتایی، و پرانتزهاست. ما همواره جدولهای عمل در جبر بول $\mathcal{B}_2$ی مثال ۱ را برای ارزیابی ارزش یک تابع بول به‌کار خواهیم برد. پس، هروقت ارزشهای متغیرها داده شده باشند، ارزش تابع بول یا ۰ است یا ۱. نمادهای منطقی $p, q, r, \ldots$ که در فصل اول آمده‌اند، متغیرهای دوتایی با ارزشهای ۰ (برای دروغ) و ۱ (برای راست) هستند. هرعبارت منطقی، مانند $p \vee (q \wedge r)'$، یک تابع بول است که در آن $\vee$، $\wedge$ و $'$ به‌ترتیب مجموع، حاصلضرب و متمم در جبر بول مثال ۳ هستند.

جدول ارزش برای یک تابع بول جدولی است شبیه جدول ارزش یک گزارهٔ منطقی با این تفاوت که ۰ و ۱ به‌جای F و T در آن به‌کار رفته است. یک تفاوت جزئی بین جدولهای ارزش تابعهای بول وجدولهای ارزش درمنطق است: درمنطق، جدولهای ارزش از T به‌سوی F می‌روند، درحالی که درتابعهای بول، جدولهای ارزش از ۰ به‌سوی ۱ می‌روند. علت اصلی اینکه «جدول ارزش پسرو» را انتخاب کرده‌ایم این است که با ترتیبی که در کدگذاری دوتایی اعداد اعشاری معمول است هماهنگ باشد.

برای اختصار، ازاین به‌بعد برای نشان دادن حاصلضرب بولی $\cdot$ (یا $\wedge$)، عاملهای ضرب را پهلوی هم می‌نویسیم. هرجا قانون شرکتپذیری پیش می‌آید، پرانتزها را حذف می‌کنیم. مثلاً به‌جای $x \cdot (y \cdot z)$ یا $(x \wedge y) \wedge z$ می‌نویسیم xyz.

مثال ۴. جدولهای ارزش تابعهای بول $F = x + y'z$، $G = x'yz$ و $H = xy' + x'z$ در یک جدول بزرگ، که در آن سه ستون آخر ارزشهای F، G و H را نشان می‌دهند، گردآوری شده‌است.

جدول ۲

x	y	z	F	G	H
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۰

تابعهای بول را اغلب می‌توان با مینیمم کردن تعداد «لفظها» و تعداد جمله‌ها با استفاده از $x+x'=1$ ، $xx'=0$ و دیگر اتحادها، ساده‌تر کرد. یك لفظ یا یك متغیر پریم‌دار (متمم متغیر) است، یا یك متغیر بدون پریم. درکاربردهای نظریهٔ جبر بول درطرحهای مداری (بخشهای ۳ و ۴ را ببینید) مینیمم کردن تعداد لفظها به‌این معنی است که درمواد و وسایل می‌توان صرفه‌جویی کرد.

مثال ۵. تابعهای بول زیر را ساده کنید:

(الف) $xy+xy'+x'y'$

(ب) $xy+xz+y'z$

(ج) $x+x'y$

حل. (الف)

$$xy+xy'+x'y'=x(y+y')+x'y' \qquad \text{تعریف ۱ (ج)}$$

$$=x+x'y' \qquad y+y'=1$$

$$=(x+x')(x+y') \qquad \text{تعریف ۱ (ج)}$$

$$=x+y' \qquad x+x'=1$$

(ب)

$$xy+xz+y'z=xy+(y+y')xz+y'z \qquad y+y'=1$$

$$=xy+xyz+xy'z+y'z \qquad \text{تعریف ۱ (الف) و ۱ (ج)}$$

$$=xy(1+z)+(x+1)y'z$$ تعریف ۱ (ج)

$$=xy+y'z$$ قضیهٔ ۵

ساده کردن (ج) به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

درکاربردهای عملی، همانند طراحی مدارهای رقمی، معمولاً از جدول ارزش داده شده یك تابع بول می‌سازنـد. این نوع مسئله راه حلی معین دارد. بـرای توضیح، حالت سه متغیری x، y و z را که جدول ارزش آن $(2^3=)8$ ردیف دارد، در نظر می‌گیریم

جدول ۳

	x	y	z	$F=F(x, y, z)$
ردیف ۱	۰	۰	۰	.
ردیف ۲	۰	۰	۱	.
ردیف ۳	۰	۱	۰	.
ردیف ۴	۰	۱	۱	.
ردیف ۵	۱	۰	۰	.
ردیف ۶	۱	۰	۱	.
ردیف ۷	۱	۱	۰	.
ردیف ۸	۱	۱	۱	.

حالت ۱. تابع بول داده شده، در ردیف j ام، $1\leqslant j\leqslant 8$، دارای ارزش ۱ و دربقیهٔ ردیفها دارای ارزش ۰ است.

برای حل این مسئلهٔ ساده تابعهای بول اساسی زیر را در نظر می‌گیریم

$$G_1: x'y'z'$$

$$G_2: x'y'z$$

$$G_3: x'yz'$$

$$G_4: x'yz$$

$$G_5: xy'z'$$

$$G_6: xy'z$$

$$G_7: xyz'$$

$$G_8: xyz$$

به‌راحتی دیده می‌شود که ارزش هر G_j، $1 \leqslant j \leqslant 8$، در ردیف j ام برابر با ۱ و در جاهای دیگر ۰ است.

حالت ۲. تابع داده شده در ردیفهای $j_1, j_2, \dots, j_k$ ،$1 \leqslant j_1, \dots, j_k \leqslant 8$ دارای ارزش ۱، و در بقیه جاها دارای ارزش ۰ است.
در این حالت، $F = G_{j_1} + G_{j_2} + \dots + G_{j_k}$ در شرط داده شده صدق می‌کند. این مطلب مثلاً با بررسی $G_2 + G_3 = x'y'z + x'yz'$ که دارای ارزش ۱ در ردیفهای ۲ و ۳، و ارزش ۰ در ردیفهای دیگر است، به‌آسانی دیده می‌شود.
فرایند بالا برای یافتن یك تابع بول از یك جدول ارزش داده شده تنها به‌سه متغیر محدود نیست. درحقیقت فرایند مذبور را می‌توان به‌همین نحو برای هر تعداد متناهی از متغیرها به‌کار برد. جواب کلی که در بالا برای حالت ۲ به‌دست آوردیم به‌صورت «مجموع حاصلضربها» است. یك راه دیگر برای حل این گونه مسائل، این است که جواب به‌صورت «حاصلضرب مجموعها» بیان شود. در مسئله‌های ۱۸، ۱۹ و ۲۰ زیر، به این راه اشاره شده‌است.

تمرین ۲۰۴

درمسئله‌های ۱ تا ۱۰، تابعهای بول داده‌شده را ساده‌کنید:

۱. $x + x'y$

۲. $xy + x'y + x'y'$

۳. $x'y + yz + xz$

۴. $x(x' + y)$

۵. $xy'z' + xy'z + x'z'$

۶. $(x + y)(x + z)(y' + z)$

۷. $x'yz + x'yz' + xy'z + xy'z'$

۸. $xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z'$

۹. $xy + xy'z$

۱۰. $x(y'z + yz) + yz$

در مسئله‌های ۱۱ تا ۱۳، تابعهای بول داده شده را ساده کنید به‌طوری‌که لفظهای تابعهای ساده شده به‌تعدادی باشد که درمقابل هرمسئله تعیین شده‌است

۱۱. $xy + zw + x + (x + z' + w')'$ ۳ لفظ

۱۲. $xy + yz + xz' + yzw$ ۴ لفظ

۱۳. $xyz + xyz' + x'yz + x'y'z + x'y'z'$ ۵ لفظ

۱۴. با جدول ارزش، نشان دهید که $G_2 + G_5 = x'y'z + xy'z'$ در ردیفهای ۲ و ۵ دارای ارزش ۱ و دربقیهٔ ردیفها دارای ارزش ۰ است.

۱۵. نشان دهید که $G_2 + G_5 + G_7 = x'y'z + xy'z' + xyz'$ در ردیفهای ۲، ۵ و ۷ دارای ارزش ۱ و دربقیهٔ ردیفها دارای ارزش ۰ است.

۱۶. یك تابع بول مثال بزنیدکه درهر ردیف دارای ارزش ۰ باشد.
۱۷. یك تابع بول مثال بزنیدکه درهر ردیف دارای ارزش ۱ باشد.
۱۸. با متممگیری از $G_1=x'y'z'$ تا $G_8=xyz$ داریم

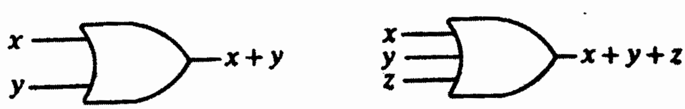
$$G'_1=x+y+z,\dots,G'_8=x'+y'+z'$$

ارزشهای G'_j، $j=1,2,\dots,8$ را تعیین کنید.
۱۹. ارزشهای $G'_1G'_3G'_4G'_6G'_8$ را برای ردیفهای ۱ تا ۸ پیدا کنید.
۲۰. ارزشهای تابعهای بول مسئله‌های ۱۵ و ۱۹ بالا را باهم مقایسه کنید.

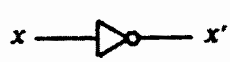
۳. تابع بول و دریچه‌های منطقی

با ورودی مناسب، مدارهای رقمی الکترونیکی (یا مدارهای منطقی) به مسیرهای عملیات منطقی تبدیل می‌شوند. با توجه به‌اینکه هرسیگنال معرف یك‌متغیر دوتایی است (و هرمتغیر دوتایی معرف یك‌سیگنال است) که حامل یك «بیت»[1] آگاهی است، می‌توان با گذراندن سیگنالهای دو دویی از میان ترکیبهای گوناگون مدارهای منطقی، هرگونه آگاهی لازم برای محاسبه یا کنترل را روی آنها پیاده کرد. مدارهای منطقی (یا دریچه‌ها) که عملیات منطقی و (.)، یا (+)، و نه (′) را انجام می‌دهند، با نمادهایشان درشکل ۱ نشان داده شده‌اند. این دریچه‌ها بلوکهای سخت‌افزاری هستندکه اگرشرطهای منطقی ورودی برقرار باشند، سیگنال خروجی ۱ ـ منطقی یا ۰ ـ منطقی ایجاد می‌کنند. دریچهٔ نه گاهی اوقات «وارونگر» خوانده می‌شود زیرا سیگنال دو دویی را از ۰ به ۱ (و از ۱ به ۰) تبدیل می‌کند.

(الف) دریچهٔ و با دو و سه ورودی



(ب) دریچهٔ یا با دو و سه ورودی



(ج) وارونگر (دریچهٔ نه)

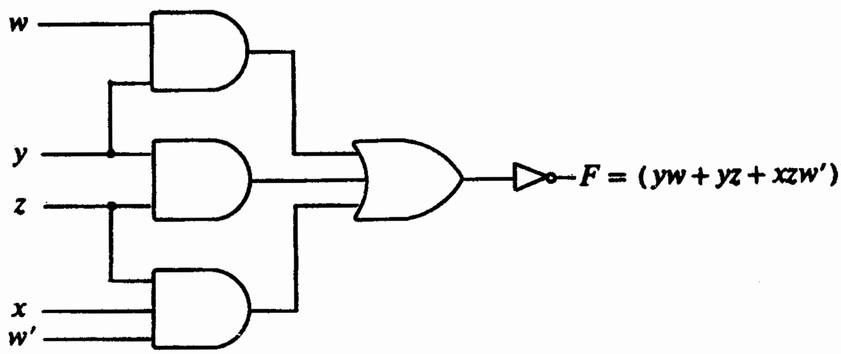
شکل ۱

---

۱. یك بیت، در زبان‌کامپیوتری، یك رقم دو دویی است.

چون تابعهای بول برحسب $+$ (یا)، . (و) و ′ (نه) بیان می‌شوند، هر تابع بول را می‌توان با استفاده از دریچه‌های منطقی که درشکل ۱ معرفی شده‌اند، به‌وسیلهٔ یك نمودار مدار الکترونیکی یا مدار منطقی نشان داد (مثال ۶ را ببینید). تبدیل تابع بول به‌مدار منطقی را پیاده‌سازی می‌نامیم.

مثال ۶. تابع بول $F=(yw+yz+xzw')'$ را می‌توان با نمودارمدار منطقی زیر پیاده کرد.

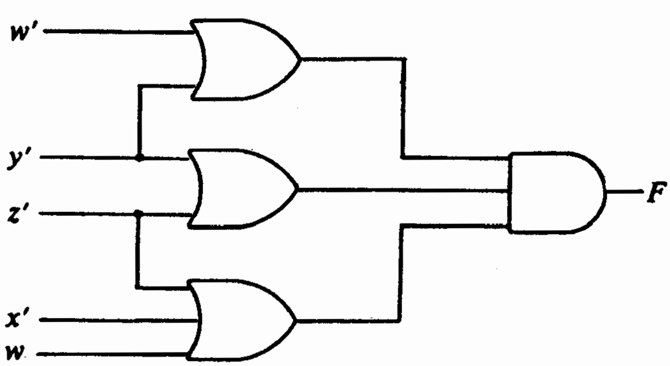


شکل ۲

مثال ۷. بنابرقانون دمورگن، تابع بول مثال قبلی را می‌توان به‌صورت

$$F=(y'+w')(y'+z')(x'+z'+w)$$

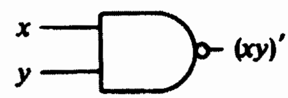
بیان کرد. پس F به‌صورت زیر نیز پیاده می‌شود.



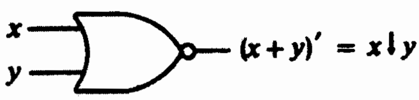
شکل ۳

چون تابعهای بول مثال ۶ و ۷ یك جدول ارزش دارند، مدارهای منطقی شکل ۲ و ۳ برای یك هدف به‌کار می‌روند. اما از نظر اقتصادی و کارآیی، مدار شکل ۳ برمدار شکل ۲ برتری دارد، زیرا درآن یك دریچهٔ منطقی کمتر به‌کار می‌رود.

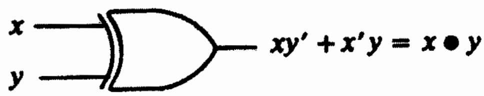
یك راه کم کردن هزینهٔ ابزارها و افزایش کارآیی آن‌است که انواع بیشتری از دریچه‌های منطقی مفید ایجاد کنیم. دریچه‌های منطقی **نه و**، **نه یا**، **یای مانع جمع**، و **هم‌ارزی** در زیر به‌همین منظور ساخته شده‌اند.



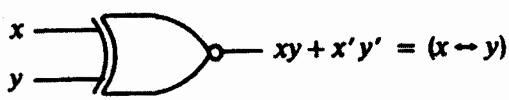
(الف) دریچهٔ نه و



(ب) دریچهٔ نه یا



(ج) دریچهٔ یای مانع جمع



(د) دریچهٔ هم‌ارزی

شکل ۴

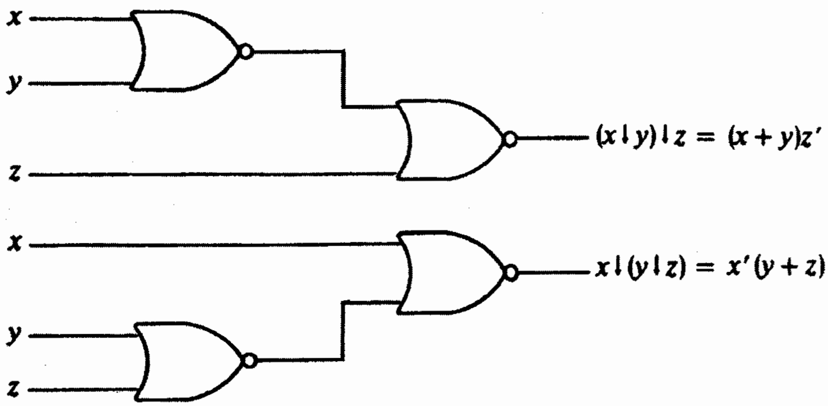
اگرچه هرچهارعمل (= دریچهٔ) جدید جابه‌جایی هستند، اما باید توجه کردکه **نه و** و **نه یا** شرکتپذیر نیستند، درحالی‌که **یای مانع جمع** و **هم‌ارزی** شرکتپذیرند.

مثال ۸. پیاده‌سازی $(x\downarrow y)\downarrow z$ و $x\downarrow(y\downarrow z)$ به وسیله دریچه‌های **نه یا** در شکل ۵ داده شده‌اند. نشان دهیدکه $(x\downarrow y)\downarrow z$ و $x\downarrow(y\downarrow z)$ یکی نیستند.

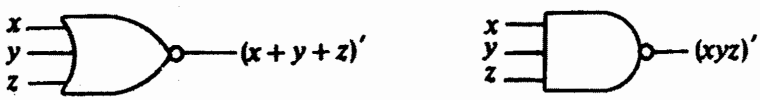
حل: برای یك‌مجموعهٔ وروديها، مثلاً $x=y=0$ و $z=1$، خروجی مدار بالایی ۰ و خروجی مدار پایینی۱ است. بنابراین دریچهٔ **نه یا** شرکتپذیر نیست.

برعهدهٔ خواننده است که به‌عنوان تمرین نشان دهد عمل **نه و** نیز شرکتپذیر نیست. بنابراین دریچه‌های **نه یا** و **نه و** را برای وروديهای بیشتر از دو، باید تعریف کرد.

با نمودارهای زیر این دریچه‌ها برای سه ورودی تعریف می‌شوند، و به آسانی می‌توان آن را به‌هرتعداد متناهی از وروديها تعمیم داد.



شکل ۵



شکل ۶

تمرین ۳.۴

۱. جدول ارزش تابعهای زیر را بیابید:

(الف) نه و: $F=(xy)'$

(ب) نه یا: $F=x\downarrow y=(x+y)'$

(ج) یای مانع جمع: $F=x\oplus y=xy'+x'y$

(د) هم‌ارزی: $F=x\leftrightarrow y=xy+x'y'$.

۲. با استفاده از دریچه‌های نه و، تابعهای $(x(yz)')'$ و $((xy)'z)'$ را پیاده‌کنید و نشان دهیدکه نه و شرکتپذیر نیست.

۳. ثابت کنیدکه **هم‌ارزی** $(x\leftrightarrow y)$ شرکتپذیر است.

۴. ثابت کنیدکه **یای مانع جمع** شرکتپذیر است.

در هر یك از مسئله‌های ۵ تا ۱۲، تابعهای بول داده شده را با استفاده از دریچه‌های منطقی پیاده‌کنید.

۵. $(x+y'+z')(y+z'+w')(x'+y'+z')(x'+y+z)$

۶. $(xy'+x'y)(zw+z'w')$

۷. $x+z+yw+y'w'$

۸. $x+zw+z'w'$

۹. $x+y'z+yz'w+zw'+y'w'$

۱۰. $x'zw'+y'z'w'$

۱۱. $x+y'w'+yz'+z'w'$

۱۲. $x+yz'+yw'+y'z+zw'$

۴. کاربرد در مدارهای کامپیوتر رقمی

کامپیوترهای رقمی، علاوه برکارهای دیگر، تمام انواع عملهای حساب‌را انجام می‌دهند. اساسی‌ترین عمل حساب، جمع دو رقم دوتایی است که از $0=0+0$، $1=1+0$، $1=0+1$ و $10=1+1$ تشکیل یافته است. مجموع هریك از سه عمل اول، عددی یك رقمی است، درحالی‌که مجموع عمل چهارم دو رقمی است. بیت مرتبهٔ بالاتر این مجموع رقم نقلی نامیده می‌شود. در جمع دو عدد چند رقمی، رقم نقلی باید به‌رقم مرتبهٔ بالاتر بعدی اضافه شود. مدار رقمی‌که عملش جمع کردن دوبیت است نیم‌ـفزونگر نامیده می‌شود، و مداری که عملش جمع کردن سه‌بیت است(دوبیت و رقم نقلی قبلی)، تمام‌ـفزونگر نام دارد.

بدیهی است‌که نیم‌ـفزونگر نیاز به دو ورودی دودویی (که با x و y نشان داده می‌شوند) و دو خروجی دودویی که با S (برای جمع) و C (برای رقم نقلی) نشان داده می‌شوند، نیاز دارد. جدول ارزشی که عمل نیم‌ـفزونگر را مشخص می‌کند می‌توان به‌صورت زیر نشان داد.

جدول ۴

x	y	C	S
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۰

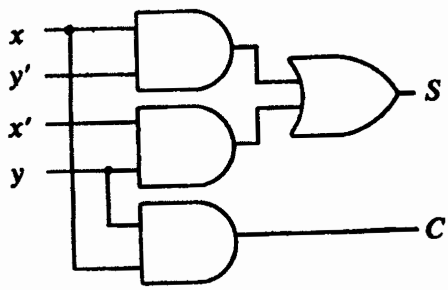
مثلاً، ردیف چهارم جدول ارزش به‌معنای $10=1+1$ است. به‌راحتی می‌توان توابع بول جدول ۴ را به‌دست آورد

$$S=x'y+xy', \qquad C=xy$$

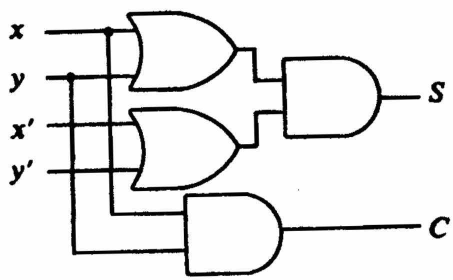
شکل ۷ راههای‌گوناگون پیاده‌سازی دوتابع بول S و C را نشان می‌دهد.

پیاده‌سازی نیم-فزونگر در شکل ۷ نشان می‌دهـد که حتی برای عمل ساده‌ای نظیر نیم-فزونگر طرحهای مختلفی وجود دارد. این‌مسئله‌ای برای طراح‌کامپیوتر است‌که طرحی بریزدکه‌کمترین تعداد مدار را داشته‌باشد.

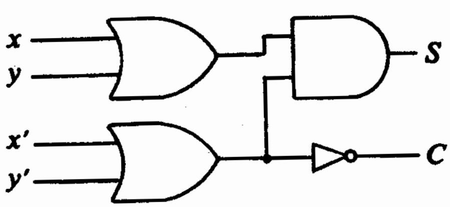
در یك تمام-فزونگر، دومتغیر از متغیرهای ورودی (که با x و y مشخص می‌شوند)



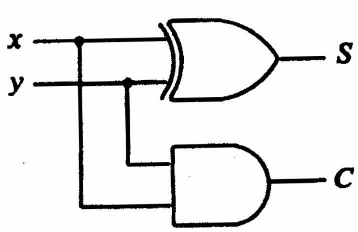
(الف) $S = xy' + x'y$
$C = xy$



(ب) $S = (x+y)(x'+y')$
$C = xy$



(ج) $S = (x+y)(x'+y')$
$C = (x'+y')'$



(د) $S = x \oplus y$
$C = xy$

شکل ۷

دو بیتی را که باید باهم جمع شوند، نشان می‌دهد. متغیر سوم (که با z مشخص می‌شود) رقم نقلی مرتبهٔ پایینتر قبلی را نشان می‌دهد. دوخروجی، همانند حالت نیم-فزونگر، که با S و C نشان داده می‌شود به‌ترتیب جمع و رقم نقلی هستند. اکنون می‌توانیم جدول ارزش تمام-فزونگر را بنویسیم.

جدول ۵

x	y	z	C	S
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱

ازجدول ارزش بالا، تابعهای بول برای تمام-فزونگر مستقیماً به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند (رجوع کنید به‌مسئلهٔ ۲۵، تمرین ۳۰۱):

$$S=xyz+xy'z'+x'yz'+x'y'z$$

$$C=xyz+xyz'+xy'z+x'yz$$

خلاصه‌کردن لفظها در S و C به‌صورتهای

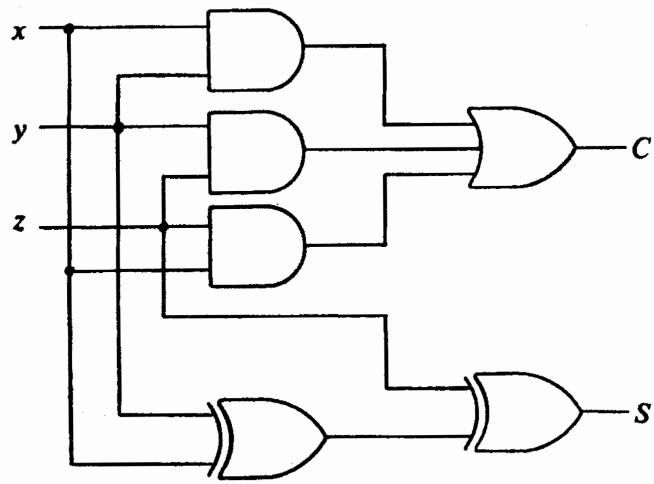
$$S=(x\oplus y)\oplus z,\ C=xy+xz+yz$$

به‌عهدهٔ خواننده است. این دوتابع مستقیماً درشکل ۸ پیاده شده‌اند. شش دریچهٔ منطقی در این پیاده‌سازی به‌کار رفته‌اند.

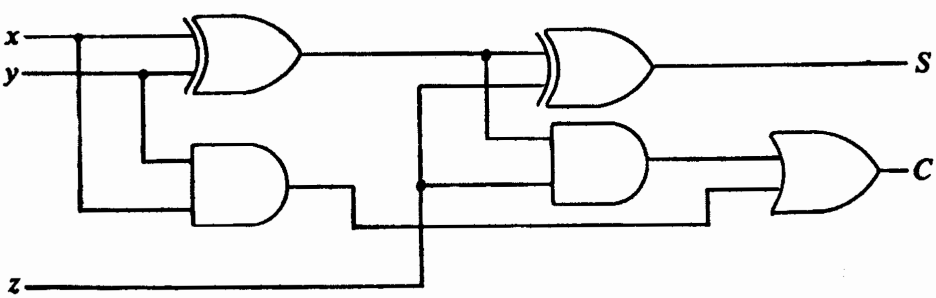
بار دیگر این طراح است کـه باید تعداد دریچه‌های منطقی را با حفظ کارآیی آن کاهش دهد. طراح خوب می‌تواند C را به‌صورت زیر بنویسد:

$$C=xy+(xy'+x'y)z$$

این عبارت همراه با $S=(x\oplus y)\oplus z$ مدار نمودار شکل ۹ را به‌دست می‌دهد.



شکل ۸



شکل ۹

توجه‌کنید که تمام‌ـفزونگر شکل ۹، ترکیب دو نیم‌ـفزونگر شکل ۷ (د) با یك‌دریچهٔ یا است. بدین‌جهت، می‌توان یك تمام‌ـفزونگر را به‌عنوان دو نیم‌ـفزونگر درنظر گرفت.

تمرین ۴.۴

۱. ثابت‌کنید تابعهای بول شکل ۷ هم‌ارزند، یعنی جدول ارزش آنها یکی است.

(الف) $S=xy'+x'y$

(ب) $S=(x+y)(x'+y')$

(ج) $S=x\oplus y$

۲. نشان دهید که $C=xy$ در شکل ۷ (الف) و $C=(x'+y')'$ در شکل ۷ (ج) دارای یك جدول ارزش هستند.

۳. نشان دهید که در یك تمام‌ـفزونگر داریم،

$$S=xyz+xy'z'+x'yz'+x'y'z=(x\oplus y)\oplus z$$

۴. نشان دهید که

$$\begin{aligned}C&=xyz+xyz'+xy'z+x'yz\\&=xy+xz+yz\\&=xy+(xy'+x'y)z\end{aligned}$$

۵. عمل نیم‌ـتفاضلگر درجدول ارزش زیر

x	y	B	D
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۰	۰

داده شده‌است، که در آن D تفاضل، $x-y$، را نشان می‌دهد و B رقم قرضی از بیت مرتبهٔ بالاتر بعدی را مشخص می‌کند.

(الف) یك دسته تابع بول برای B و D بیابید.

(ب) درصورت امکان، تابعهای بولی را که در (الف) پیدا کرده‌اید، ساده کنید.

۶. درمسئلهٔ ۵ بالا، نمودار مدارهای (الف) و (ب) را رسم کنید.

۷. عمل تمام‌ـتفاضلگر با جدول ارزش زیر داده شده‌است:

x	y	z	B	D
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱

که درآن x ، y ، B ، D همانهایی‌هستندکه درنیم-تفاضلگر آمده‌اند، و z رقم قرضی قبلی است.

(الف) یك دسته تابع بول برای B و D بیابید.

(ب) تابعهای بول را که در (الف) به‌دست آورده‌اید، ساده‌کنید.

۸. نمودارهای مداری ۷ (الف) و ۷ (ب) را رسم‌کنید.

۹. تمام-تفاضلگری را طراحی‌کنیدکه دو نیم-تفاضلگر را با یك دریچهٔ یا ترکیب می‌کند.

۵

مجموعه‌های شمارای نامتناهی و ناشمارا

برای بحث در خواص مجموعه‌های نامتناهی و متناهی از تعریف ددکیند در مورد مجموعه‌های نامتناهی استفاده شده‌است. یکی از مطالب اثبات شده این است که مجموعه‌های شمارای نامتناهی در بین مجموعه‌های نامتناهی از نظر «اندازه» کوچکترین هستند. ویژگیها و مثالهایی ازمجموعه‌های شمارای نامتناهی ومجموعه‌های ناشمارا آورده شده‌است.

۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

در بخش ۱، فصل ۲، به‌مناسبتی اشاره کردیم که مجموعهٔ متناهی مجموعه‌ای است که فقط شامل تعدادی متناهی عنصر باشد؛ اما این مفهوم را می‌توان با یك تعریف دقیقتر ریاضی بیان کرد. ما تعریفی را (تعریف ۱) که ددکیند ابداع کرده است ترجیح می‌دهیم.

در بخش ۱، فصل ۲، تأکید شد که $\mathbf{N}$، مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی، یك مجموعهٔ نامتناهی است. گیریم $\mathbf{N}_e=\{۲, ۴, ۶, \ldots\}$ مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی زوج است. همان‌گونه‌که خواننده در مسئلهٔ ۸، تمرین ۶.۳، نشان داده است، یك تناظر یك به یك بین مجموعهٔ $\mathbf{N}$ و زیرمجموعهٔ سرهٔ آن، $\mathbf{N}_e$ وجود دارد.

به‌عبارت دیگر،

یك جزء به بزرگی کل است.[۱]

این ویژگی عجیب مجموعهٔ نامتناهی بسیاری از ریاضیدانان، ازجمله گئورگ کانتور را نگران ساخت. ریچارد ددکیند[۲] (۱۸۳۱–۱۹۱۶) این ویژگی را برای تعریف مجموعهٔ نامتناهی به‌کاربرد. تعریف زیر را ددکیند در ۱۸۸۸ عرضه‌کرد.

تعریف ۱. مجموعهٔ X نامتناهی است اگر زیرمجموعه‌ای سره مانند Y داشته باشد به‌طوری‌که یك‌تناظر یك به‌یك بین X و Y وجود داشته باشد. مجموعه متناهی است اگر نامتناهی نباشد.

به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ X نامتناهی است اگر و تنها اگر یك تابع یك به یك $f : X \to X$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی‌که $f(X)$ یك‌زیرمجموعهٔ سرهٔ X باشد. از این‌رو، مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbf{N}$ یك مجموعهٔ نامتناهی است.

مثال ۱. مجموعهٔ تهی $\varnothing$ و مجموعه‌های تك‌عنصری[۳] متناهی هستند.

حل. (الف) چون مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ سره ندارد، نمی‌تواند نامتناهی باشد. لذا، مجموعهٔ تهی‌متناهی است. (ب) مجموعهٔ تك‌عنصری دلخواه $\{a\}$ را درنظرمی‌گیریم. چون تنها زیرمجموعهٔ سرهٔ $\{a\}$ مجموعهٔ تهی است و هیچ تناظر یك به‌یکی بین $\{a\}$ و $\varnothing$ نیست، $\{a\}$ متناهی است.

قضیهٔ ۱.

(الف) هر ابرمجموعهٔ یك‌مجموعهٔ نامتناهی، نامتناهی است.

(ب) هرزیرمجموعهٔ یك مجموعهٔ متناهی، متناهی است.

---

۱. یك اختلاف آشکار با اصل موضوع اقلیدس (Euclid's Axiom): «کل بزرگتر ازهرجزء خودش است» (۳۲۵ سال قبل از میلاد).

۲. ریچارد ددکیند (Richard Dedekind) یکی از بزرگترین ریاضیدانان، در ۶ اکتبر ۱۸۳۱، در برونشویك آلمان به‌دنیا آمد. در اول به‌فیزیك و شیمی علاقه داشت؛ ریاضیات را فقط خادم علوم تصور می‌کرد. اما عمر این طرز تفکرکوتاه بود؛ درسن ۱۷ سالگی از فیزیك و شیمی به‌ریاضیات، که منطقش را رضایتبخش یافت، روی‌آورد. درسن نوزده سالگی برای مطالعهٔ ریاضیات وارد دانشگاه‌گوتینگن شد، و سه سال بعد به‌دریافت درجهٔ دکتری زیر نظر گاوس نایل شد. ازجمله‌کارهای اساسی او در ریاضیات «برش ددکیند» مشهور است، که درمطالعهٔ اعداد اصم مفهومی مهم است، و خواننده در درس آنالیز حقیقی احتمالاً فرصت مطالعهٔ آن را خواهد داشت.

۳. یك مجموعهٔ تك‌عنصری مجموعه‌ای است که فقط از یك عنصر تشکیل شده‌است.

برهان. (الف) مجموعهٔ X را نامتناهی و Y را یك ابرمجموعهٔ X می‌گیریم، یعنی $X\subseteq Y$. آنگاه بنابر تعریف ۱ یك تابع یك به یك $f:X\to X$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(X)\neq X$. تابع $g:Y\to Y$ را با

$$g(y)=\begin{cases} f(y) & y\in X \text{ اگر } \\ y & y\in Y-X \text{ اگر } \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. بررسی یك به‌یك بودن تـابع $g:Y\to Y$ و نیز اینکه $g(Y)\neq Y$ را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. اکنون از تعریف ۱ نتیجه می‌شود که Y نامتناهی است.

(ب) مجموعهٔ Y را متناهی و X را یك زیـرمجموعهٔ Y می‌گیریم؛ یعنی $X\subseteq Y$. برای اینکه نشان دهیم X متناهی است، خلاف آن را فرض می‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم X نامتناهی است. اما دراین صورت بنابر (الف)، مجموعهٔ Y باید نامتناهی بـاشد. این یك تناقض است. بنابراین مجموعهٔ X متناهی است.

قضیهٔ ۲. گیریم $g:X\to Y$ یك تناظر یك به‌یك است. اگر مجموعهٔ X نامتناهی باشد، Y نیز نامتناهی است.

برهان. چون X نامتناهی است، بنابرتعریف ۱ یك تـابع یك به‌یك $f:X\to X$ وجود دارد به‌طوری‌کـه $f(X)\neq X$. چـون $g:X\to Y$ یـك‌تناظر یك به‌یك است، $g^{-1}:Y\to X$ نیز یك‌تناظر یك به‌یك است (قضیهٔ ۱۴، فصل ۳). اکنون به‌نمودار توابع یك به‌یك زیر توجه می‌کنیم:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "g^{-1}"'] & Y \\ X \arrow[r, "f"'] & X \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

در نتیجه، $h=g\circ f\circ g^{-1}:Y\to Y$ که ترکیبی از توابع یك به‌یك است، یك تـابع یك به‌یك است [مسئلهٔ ۷، تمرین ۷.۳]. بالاخره داریم

$$h(Y)=(g\circ f\circ g^{-1})(Y)=(g\circ f)(g^{-1}(Y))$$
$$=(g\circ f)(X)=g(f(X))$$

و $g(f(X))\neq Y$، زیرا $f(X)\neq X$.

پس، $h(Y)$ یك زیرمجموعهٔ سرهٔ Y است و از این‌رو Y نامتناهی است.

نتیجه. گیریم $g:X\to Y$ یك‌تناظر یك به‌یك است. اگرمجموعهٔ X متناهی باشد، Y نیز متناهی است.

برهان. به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۳. مجموعهٔ‌نامتناهی X و $x_0\in X$ مفروض‌اند. آنگاه $X-\{x_0\}$ نیز نامتناهی‌است.

برهان. بنا بر تعریف ۱، یك تابع یك به‌یك $f:X\to X$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(X)\subset X$. باید دوحالت درنظر بگیریم، (۱)، $x_0\in f(X)$ یا (۲)، $x_0\in X-f(X)$. در هرحالت باید تابعی یك به‌یك مانند $g:X-\{x_0\}\to X-\{x_0\}$ بسازیم به‌طوری‌که $g(X-\{x_0\})\neq X-\{x_0\}$.

حالت ۱. $x_0\in f(X)$

یك عنصر x_1 در X وجود دارد به‌طوری‌که $f(x_1)=x_0$. اکنون تابع

$$g:X-\{x_0\}\to X-\{x_0\}$$

را با

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{اگر } x\neq x_1 \\ x_2 & \text{اگر } x=x_1\in X-\{x_0\} \end{cases}$$

که در آن x_2 یك‌عنصر ثابت اختیاری مجموعهٔ ناتهی $X-f(X)$ است، تعریف می‌کنیم. نتیجه می‌شود که $g:X-\{x_0\}\to X-\{x_0\}$ یك به‌یك است و

$$g(X-\{x_0\})=f(X-\{x_0,x_1\})\cup\{x_2\}\neq X-\{x_0\}$$

از این‌رو $X-\{x_0\}$ دراین حالت نامتناهی است.

حالت ۲. $x_0\in X-f(X)$

یك تابع $g:X-\{x_0\}\to X-\{x_0\}$ با $g(x)=f(x)$ برای هر $x\in X-\{x_0\}$ تعریف می‌کنیم. چون $f:X\to X$ یك‌به‌یك است، $g:X-\{x_0\}\to X-\{x_0\}$ نیز یك به‌یك است. بالاخره،

$$g(X-\{x_0\})=f(X)-\{f(x_0)\}\neq X-\{x_0\}$$

پس، در هرحالت، $X-\{x_0\}$ نامتناهی است.

از این به‌بعد، مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی از ۱ تا $k\in\mathbf{N}$ را با $\mathbf{N}_k$ نمایش‌می‌دهیم؛ یعنی $\mathbf{N}_k=\{1,2,\dots,k\}$. به‌عنوان یك‌کاربرد قضیهٔ ۳، در مثال زیر نشان می‌دهیم که هر $\mathbf{N}_k$ یك مجموعهٔ متناهی است.

مثال ۲. برای هر $k \in \mathbf{N}$، مجموعهٔ $\mathbf{N}_k$ متناهی است.

برهان. این حکم را با اصل استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. بنابرمثال ۱، برای $k=1$ حکم راست است. حال فرض کنید که برای عدد طبیعی k، مجموعهٔ $\mathbf{N}_k$ متناهی است. مجموعهٔ $\mathbf{N}_{k+1}=\mathbf{N}_k \cup \{k+1\}$ را درنظر بگیرید. اگر $\mathbf{N}_{k+1}$ نامتناهی باشد، آنگاه بنابرقضیهٔ ۳، $\mathbf{N}_{k+1}-\{k+1\}=\mathbf{N}_k$ نیز یک‌مجموعهٔ نامتناهی است، که فرض استقرا را نقض می‌کند. بنابراین اگر $\mathbf{N}_k$ متناهی باشد، $\mathbf{N}_{k+1}$ نیز متناهی است. پس، بنابراصل استقرای ریاضی، مجموعهٔ $\mathbf{N}_k$ برای هر $k \in \mathbf{N}$ متناهی است.

درواقع، رابطهٔ نزدیکی بین یک‌مجموعهٔ متناهی‌ناتهی و یک‌مجموعهٔ $\mathbf{N}_k$ وجود دارد.

قضیهٔ ۴. مجموعهٔ X متناهی است اگر و تنها اگر یا $X=\varnothing$ یا X با یک $\mathbf{N}_k$ در تناظر یک به‌یک باشد.

برهان. اگر X یا تهی‌باشد یا با یک $\mathbf{N}_k$ درتناظر یک به‌یک باشد؛ آنگاه بنابرنتیجهٔ قضیهٔ ۲ و مثالهای ۱ و ۲، مجموعهٔ X متناهی است.

برای اثبات عکس آن، عکس نقیض آن را (که با آن هم‌ارز است)، ثابت می‌کنیم: اگر $X \neq \varnothing$ و X با هیچ یک از $\mathbf{N}_k$ها در تناظر یک به یک نباشد، آنگاه X نامتناهی است. اکنون از X یک عنصر x_1 انتخاب می‌کنیم، $X-\{x_1\}$ تهی نیست؛ زیرا درغیراینصورت $X=\{x_1\}$ و درتناظر یک به‌یک با $\mathbf{N}_1$ می‌شود که با فرض تناقض دارد. برای $X-\{x_1\}$ عملی‌مشابه انجام‌می‌دهیم، یعنی یک‌عنصر آن‌مانند x_2 را انتخاب‌می‌کنیم. با ادامهٔ این روش، فرض کنید که عناصر $x_1, x_2, \ldots, x_k$ را از X انتخاب کرده‌ایم. آنگاه $X-\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ تهی نیست؛ زیرا درغیر این صورت $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ در تناظر یک به‌یک با $\mathbf{N}_k$ می‌شود، که با فرض مربوط به X درتناقض است. بنابراین همیشه می‌توانیم یک عنصر x_{k+1} از $X-\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ انتخاب کنیم. آنگاه بنابراستقرای ریاضی، برای هرعددطبیعی n، یک‌زیرمجموعهٔ‌سرهٔ X مانند $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ وجود دارد. مجموعهٔ x_nهای منتخب برای هرعدد طبیعی n را با Y[1] نشان می‌دهیم. آنگاه تابع $f: Y \to Y-\{x_1\}$ که با $f(x_k)=x_{k+1}$ تعریف‌می‌شود، بین Y و $Y-\{x_1\}$، زیرمجموعهٔ سرهٔ Y، یک تناظر یک‌به‌یک برقرار می‌کند. لذا، بنابر تعریف ۱، Y نامتناهی است و، بنابرقضیهٔ ۱، X نامتناهی است.

---

۱. در اینجا نویسندگان به‌طور ضمنی از «اصل انتخاب» که اصلی مهم است و در فصل ۶ به‌بحث آن خواهیم پرداخت، استفاده کرده‌اند. صورتی از اصل انتخاب را در اینجا می‌آوریم: «فرض می‌کنیم $\mathcal{P}$ یک مجموعهٔ غیرتهی از زیرمجموعه‌های غیرتهی یک مجموعهٔ مفروض X است. آنگاه یک مجموعهٔ $R \subseteq X$ وجود دارد به‌قسمی‌که برای هر $C \in \mathcal{P}$، $C \cap R$ یک مجموعهٔ تک عضوی است». این اصل در سراسر کتاب بدون اینکه صریحاً ذکر شود، به‌کار خواهد رفت.

توجه خواننده را به‌این نکته جلب می‌کنیم که با توجه به‌قضیهٔ ۴ می‌توانیم تعریف دیگری برای مجموعه‌های متناهی و نامتناهی بیاوریم. می‌توانیم بگوییم که مجموعه متناهی است اگر و تنها اگر یا تهی باشد یا با یك $\mathbf{N}_k$ درتناظر یك به‌یك باشد، و نامتناهی است اگر و تنها اگر متناهی نباشد. با این تعریف جدید، تعریف ۱ به‌عنوان یك قضیه ثابت می‌شود. به‌هرحال، استفاده از این تعریف ساده‌تر نیست و به‌اندازهٔ تعریف اول کار می‌برد.

تمرین ۱۰۵

۱. برهان قضیهٔ ۱ را کامل کنید.

۲. گیریم $g: X \longrightarrow Y$ یك تناظر یك به‌یك است. ثابت کنید که اگر X متناهی باشد، آنگاه Y متناهی است.

۳. ثابت کنید که مجموعه‌های $\mathbf{Z}$، $\mathbf{Q}$، و $\mathbf{R}$ نامتناهی هستند.

۴. ثابت کنید که اگر A یك مجموعهٔ نامتناهی باشد، آنگاه $A \times A$ نیز نامتناهی است.

۵. ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B نامتناهی باشند، آنگاه $A \cup B$ یك مجموعهٔ نامتناهی است.

۶. ثابت کنید که اجتماعی متناهی از مجموعه‌های متناهی، متناهی است.

۷. فرض کنید $A \cup B$، اجتماع دومجموعهٔ A و B، نامتناهی است. ثابت کنید که حداقل یکی از دومجموعهٔ A و B نامتناهی است.

۸. تعمیم زیر ازقضیهٔ ۳ را ثابت کنید: اگر Y یك زیرمجموعهٔ متناهی ازمجموعهٔ نامتناهی X باشد، آنگاه $X - Y$ نامتناهی است.

۹. ثابت کنید که اگر مجموعهٔ A به‌قسمی باشد که هر ابرمجموعهٔ سرهٔ A نامتناهی باشد، آنگاه A نامتناهی است.

۱۰. ثابت کنید که اگر یك مجموعهٔ B به‌قسمی باشد که هرزیرمجموعهٔ سرهٔ B متناهی باشد، آنگاه B متناهی است.

۱۱. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbf{N}$، و مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_k$ به‌قسمی باشند که $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ نامتناهی باشد، آنگاه برای یك $j \in \mathbf{N}$، A_j نامتناهی است.

۱۲. ثابت کنید که اگر مجموعهٔ A به‌قسمی باشد که $A \times A$ نامتناهی باشد، آنگاه A نامتناهی است.

۱۳. ثابت کنید که اگرمجموعه‌های A و B به‌قسمی باشند که $A \times B$ نامتناهی باشد، آنگاه یا A نامتناهی است یا B.

۱۴. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbf{N}$، و مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_k$ به‌قسمی باشند که $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ نامتناهی باشد، آنگاه برای یك $j \in \mathbf{N}_k$، A_j نامتناهی است.

۱۵. ثابت کنید که اگرمجموعه‌های A و B به‌قسمی باشند که $A \oplus B$ نامتناهی باشد، آنگاه یا A نامتناهی است یا B.

۱۶. نشان دهید که مجموعهٔ $\{۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, \ldots\}$ نامتناهی است.

۱۷. ثابت کنید که مجموعهٔ توانی یك مجموعهٔ متناهی، متناهی است.

۲. همتوانی مجموعه‌ها

تعداد عنصرهای دومجموعهٔ متناهی X و Y برابر است اگر وتنها اگر یك تناظر یك به‌یك $f: X \to Y$ بین X و Y وجود داشته‌باشد. هرچندکه عبارت «تساوی تعداد عنصرها» را برای حالتی‌که مجموعه‌های X و Y نامتناهی هستند، به‌کار نمی‌بریم، به‌نظرمی‌رسد طبیعی باشد فکرکنیم دو مجموعه (نامتناهی) که درتناظر یك‌به‌یك هستند، دارای‌یك اندازه هستند. ما این ادراك را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

تعریف ۲. دو مجموعهٔ X و Y را همتوان می‌گویند و نماد $X \sim Y$ را برای آن به‌کار می‌برند، هرگاه بین X و Y یك تناظر یك به‌یك $f: X \to Y$ وجود داشته باشد.

بدیهی است که هر مجموعه همتوان خودش است. چون وارون تناظر یك به‌یك نیز یك تناظر یك به‌یك است (قضیهٔ ۱۴، فصل۳)، $X \sim Y$ اگر و تنها اگر $Y \sim X$. قرار می‌گذاریم که نماد $f: X \sim Y$ بدین‌معنی است که «$f: X \to Y$ یك تناظریك به‌یك است و در نتیجه $X \sim Y$». با این نماد قراردادی، قسمت اول حکم مسئلهٔ ۱۲ تمرین ۷.۳ را می‌توان چنین بیان‌کرد: اگر $f: X \sim Y$ و $g: Y \sim Z$، آنگاه $g \circ f: X \sim Z$. به‌این ترتیب قضیهٔ زیر را ثابت‌کرده‌ایم.

قضیهٔ ۵. گیریم φ یك مجموعهٔ مجموعه‌ها است و $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی φ است که‌با «$X \mathcal{R} Y$ اگر و تنها اگر X و Y عضوهای φ باشند و $X \sim Y$»، تعریف شده است. آنگاه $\mathcal{R}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی روی φ است.

در مثال زیر، نمادهای $(\circ, 1)$ و $(-1, 1)$ فاصله‌های باز اعداد حقیقی هستند، نه جفتهای مرتبی از اعداد صحیح.

مثال ۳.

(الف) $(-1, 1) \sim (\circ, 1)$.

(ب) $(-1, 1) \sim \mathbf{R}$ و $(\circ, 1) \sim \mathbf{R}$.

حل: (الف) تابع $f: (\circ, 1) \to (-1, 1)$ که با $f(x) = 2x - 1$ داده شده‌است، یك تناظر یك به‌یك است. از این‌رو $(-1, 1) \sim (\circ, 1)$.

(ب) تابع مثلثاتی $g: (-1, 1) \to \mathbf{R}$ که با $g(x) = \tan(\pi x/2)$ داده شده است، یك تناظر یك به‌یك است؛ پس $(-1, 1) \sim \mathbf{R}$. لازم است خواننده این مطلب را با رسم‌نمودار $g(x) = \tan(\pi x/2)$ بررسی‌کند. با تحقیق در درستی‌دونکتهٔ زیر برهانی دقیق به‌دست می‌آید:

(۱) $g: (-1, 1) \to \mathbf{R}$ پیوسته، و از طرف بالا و پایین بی‌کران است.

(۲) از $g'(x) = (\pi/2)\sec^2(\pi x/2) > \circ$، $\forall x \in \mathbf{R}$ نتیجه می‌شود که g اکیداً صعودی است.

چون «رابطهٔ» همتوانی $\sim$، متعدی است[1]، از $(-1, 1) \sim (0, 1)$ و $\mathbf{R} \sim (-1, 1)$ نتیجه می‌شود $\mathbf{R} \sim (0, 1)$.

قضیهٔ ۶. مجموعه‌های X، Y، Z، و W با شرط $X \cap Z = \varnothing = Y \cap W$، و $f : X \sim Y$ و $g : Z \sim W$ مفروض‌اند. آنگاه $f \cup g : (X \cup Z) \sim (Y \cup W)$.

برهان. چون $f : X \to Y$ و $g : Z \to W$ توابعی بـا شرط $X \cap Z = \varnothing$ هستند، بنا بر قضیهٔ ۸ فصل ۳، $f \cup g : X \cup Z \to Y \cup W$ یك تابع است. بر خواننده است که ثابت کند تابع اخیر یك تناظر یك به‌یك است.

قضیهٔ ۷. گیریم X، Y، Z، و W مجموعه‌هایی با شرط $X \sim Y$ و $Z \sim W$ هستند، آنگاه $X \times Z \sim Y \times W$.

برهان. گیریم $f : X \sim Y$ و $g : Z \sim W$. تابع $f \times g : X \times Z \to Y \times W$ را برای هر $(x, z) \in X \times Z$ با $(f \times g)(x, z) = (f(x), g(x))$ تعریف می‌کنیم. از خواننده می‌خواهیم تحقیق کند که تابع اخیر یك تناظر یك به‌یك است.

اگر مجموعه‌های متناهی $\mathbf{N}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ را هنگامی که k بزرگ می‌شود درنظر بگیریم و توجه کنیم که مجموعه‌های نامتناهی $\mathbf{Z}$، $\mathbf{Q}$، و $\mathbf{R}$ فوق مجموعه‌های $\mathbf{N}$ هستند (مسئلهٔ ۳، تمرین ۱.۵ را ببینید)، روشن می‌شود که «کوچکترین» مجموعهٔ نامتناهی، مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbf{N}$، یا هر مجموعهٔ همتوان با $\mathbf{N}$، است. به‌زودی در بخش ۴، خواهیم دید که همهٔ مجموعه‌های نامتناهی با $\mathbf{N}$ همتوان نیستند.

تعریف ۳. مجموعهٔ X شمارای نـامتناهی گفته می‌شود هرگاه $X \sim \mathbf{N}$. مجموعهٔ شمارا مجموعه‌ای است که یا متناهی باشد یا شمارای نامتناهی.

گیریم X یك مجموعهٔ شمارای نامتناهی است. آنگاه یك تناظر یك به‌یك $f : \mathbf{N} \sim X$ وجود دارد. اگر بنویسیم

$$f(1) = x_1,\ f(2) = x_2,\ f(3) = x_3, \ldots,\ f(k) = x_k, \ldots$$

آنگاه X را می‌توان با نماد $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots\}$ نیز نشان داد. منظور از نقاط بین x_3 و x_k وبعد از x_k این است که نشان دهند عناصر به‌ترتیب شماره‌های اندیس مرتب شده‌اند. اکنون بجاست توضیحی دربارهٔ اصطلاح «شمارا» داده شود. برای یك مجموعهٔ متناهی، ازنظر تئوری شمردن عناصر مجموعه امکان دارد و بنابراین اصطلاح مناسب است. اگرچه واقعاً شمردن تمام عنصرهای یك مجموعهٔ شمارای $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ امکان

---

۱. اگر دقت رعایت شود «$\sim$» رابطه نیست، زیرا حوزهٔ تعریف آن یك مجموعه نیست (به‌قضیهٔ ۱۰ فصل ۲ نگاه کنید). امـا می‌توانیم آن را یك رابطه بنامیم اگر فرض کنیم $\sim$ روی یك مجموعهٔ مفروض φ از مجموعه‌ها تعریف شده‌است (قضیهٔ ۵).

ندارد، اما به‌هرحال X در یك تناظر یك به‌یك با اعداد طبیعی یا **اعداد شمارش*** است.

قضیهٔ ۸. هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از یك مجموعهٔ شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

برهان. گیریم Y یك زیرمجموعهٔ نامتناهی از مجموعهٔ شمارای نامتناهی $X=\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ است. فرض کنیم n_1 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_1} \in Y$ و n_2 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_2} \in Y-\{x_{n_1}\}$. فرض کنید $x_{n_{k-1}} \in Y$ را تعریف کرده‌ایم، آنگاه n_k را کوچکترین اندیسی می‌گیریم که $x_{n_k} \in Y-\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}\}$. چون Y نامتناهی است، برای هر $k \in \mathbf{N}$، $Y-\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}\} \neq \varnothing$، پس همیشه برای هر $k \in \mathbf{N}$، x_{n_k} وجود دارد. به‌این‌ترتیب یك تناظر یك به‌یك $f: N \sim Y$ به‌صورت $f(k)=x_{n_k}$، برای هر $k \in \mathbf{N}$، درست کرده‌ایم. بنابراین، Y شمارای نامتناهی است.

برهان کوتاهتر دیگری که کمتر شهودی است، درمسئلهٔ ۱۰ در آخرهمین بخش برای قضیهٔ ۸ عنوان شده است. نتیجهٔ زیر به‌آسانی از تعریف ۳ و قضیهٔ ۸ به‌دست می‌آید.

نتیجه. هر زیرمجموعهٔ یك مجموعهٔ شمارا، شماراست.

در بخش بعدی چند مثال و چند ویژگی مجموعه‌های شمارای نامتناهی آورده شده است.

تمرین ۵.۲

۱. برهان قضیهٔ ۶ راکامل کنید.
۲. برهان قضیهٔ ۷ راکامل کنید.
۳. ثابت کنید که اگر X و Y دومجموعه باشند، آنگاه $X\times Y \sim Y\times X$.
۴. ثابت کنید که اگر $(X-Y)\sim(Y-X)$، آنگاه $X\sim Y$.
۵. این تعمیم قضیهٔ ۶ را ثابت کنید: گیریم $\{X_\gamma | \gamma\in\Gamma\}$ و $\{Y_\gamma | \gamma\in\Gamma\}$ دوخانوادهٔ مجموعه‌های مجزا هستند و برای هر $\gamma\in\Gamma$، $X_\gamma \sim Y_\gamma$. آنگاه $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \sim \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$.
۶. ثابت کنید که اگر X یك مجموعهٔ شمارای نامتناهی، و Y یك زیرمجموعهٔ متناهی X باشد، آنگاه $X-Y$ شمارای نامتناهی است. [با مسئلهٔ ۸، تمرین ۱.۵ مقایسه کنید.]
۷. ثابت کنید که اگر X یك مجموعهٔ شمارای نامتناهی و Y یك مجموعهٔ متناهی باشد، آنگاه $X\cup Y$ شمارای نامتناهی است.
۸. ثابت کنید که مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی زوج $\mathbf{N}_e$ ومجموعهٔ تمام اعداد طبیعی فرد $\mathbf{N}_o$ شمارای نامتناهی هستند**.

* چون اشیاء را با اعداد طبیعی می‌شماریم، مؤلف برای توجیه بیشتر اصطلاح «شمارا» اعداد طبیعی را، اعداد شمارش نیز گفته است. ـ م.

** e حرف اول even به‌معنای زوج و o حرف اول odd به‌معنای فرد است. ـ م.

۹. گیریم A یک مجموعهٔ غیرتهی، و 2^A مجموعهٔ تمام توابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ $\{0,1\}$ است. ثابت کنید که $2^A \sim \mathcal{P}(A)$.

۱۰. گیریم X یک مجموعهٔ شمارای نامتناهی و Y یک زیرمجموعهٔ نامتناهی X باشد. فرض کنیم که $g: X \sim \mathbf{N}$، و گیریم $h: Y \to \mathbf{N}$ با

$$h(y) = \{1, 2, 3, \cdots, g(y)\} \cap g(Y) \text{ تعداد عنصرهای }$$

تعریف شده است. ثابت کنید که h یک تناظر یک به یک است و بنابراین Y شمارای نامتناهی است.

۱۱. گیریم $a < b$، $[a, b]$ یک فاصلهٔ بسته است. ثابت کنید که تابع $f: [0,1] \to [a, b]$ که با $f(x) = a + (b-a)x$ برای هر x واقع در $[0, 1]$ تعریف می‌شود، همتوانی $[0, 1] \sim [a, b]$ را برقرار می‌کند. بنابراین، برای هر دو عدد حقیقی c و d به‌قسمی که $c < d$، داریم $[a, b] \sim [c, d]$.

۱۲. گیریم اعداد حقیقی a، b، c، و d به‌قسمی هستند که $a < b$ و $c < d$. ثابت کنید

(الف) $[0, 1] \sim (0, 1]$

(ب) $[a, b] \sim (c, d]$

(ج) $(c, d] \sim [c, d)$

۱۳. با فرضهای مسئلهٔ ۱۲، ثابت کنید

(الف) $[0, 1] \sim (0, 1)$

(ب) $[a, b] \sim (c, d)$

(ج) $[a, b] \sim (c, d]$

۳. چند مثال و ویژگی مجموعه‌های شمارای نامتناهی

مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی زوج $\mathbf{N}_e$ و مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی فرد $\mathbf{N}_o$، شمارای نامتناهی هستند (مسئلهٔ ۸، تمرین ۵-۲). چون اجتماع این دو مجموعهٔ شمارای نامتناهی یعنی $\mathbf{N}_e \cup \mathbf{N}_o (= \mathbf{N})$ شمارای نامتناهی است، قضیهٔ بعدی قابل پیش‌بینی است.

قضیهٔ ۹. اجتماع دو مجموعهٔ شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

برهان. گیریم A و B دو مجموعهٔ شمارای نامتناهی باشند. نشان خواهیم داد که $A \cup B$ درهر دو حالت زیر، شمارای نامتناهی است:

حالت ۱. $A \cap B = \varnothing$.

چون $A \sim \mathbf{N}$ و $\mathbf{N} \sim \mathbf{N}_o$، داریم $A \sim \mathbf{N}_o$. همچنین، داریم $B \sim \mathbf{N}_e$. درنتیجه بنابر قضیهٔ ۶ داریم $(A \cup B) \sim (\mathbf{N}_o \cup \mathbf{N}_e) = \mathbf{N}$، که نشان می‌دهد $A \cup B$ شمارای نامتناهی است.

حالت ۲. $A\cap B\neq\varnothing$.

می‌نویسیم $C=B-A$. آنگاه $A\cup C=A\cup B$ و $A\cap C=\varnothing$؛ مجموعهٔ $C\subseteq B$ یا متناهی است یا شمارای نـامتناهی [نتیجهٔ قضیهٔ ۸]. اگر C متناهی باشد، بنابر مسئلهٔ ۷ تمرین ۲.۵، $A\cup C$ شمارای نامتناهی است، درحالی‌که اگر C شمارای نامتناهی باشد، $A\cup C$ بنابرحالت ۱ بالا شمارای نامتناهی است.

پس مجموعهٔ $A\cup B$ شمارای نامتناهی است.

نتیجه. گیریم $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعه‌های شمارای‌نامتناهی هستند. آنگاه $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ نیز شمارای نامتناهی است.

برهان. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

ازخواننده می‌خواهیم که مثال بعدی را خود بررسی کند.

مثال ۴. مجموعهٔ تمام اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ شمارای نامتناهی است.

قضیهٔ ۱۰. مجموعهٔ $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ شمارای نامتناهی است.

برهان. تابع $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ راکه با

$$f(j,k)=2^j3^k \qquad \forall (j,k)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$$

داده شده‌است، درنظر بگیرید. این تابع یك به‌یك است، بنابراین

$$\mathbf{N}\times\mathbf{N}\sim f(\mathbf{N}\times\mathbf{N})\subseteq\mathbf{N}$$

چون $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ نامتناهی‌است، $f(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$ نیز نامتناهی است. بنابرقضیهٔ ۸، $f(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$ شمارای نامتناهی است و ازاین‌رو مجموعهٔ $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ نیز شمارای نامتناهی است.

نتیجه. برای هر $k\in\mathbf{N}$ گیریم A_k یك مجموعهٔ شمارای نـامتناهی بـاشدکه برای تمام $j\neq k$، درشرط $A_j\cap A_k=\varnothing$ صدق می‌کند، آنگاه $\bigcup_{k\in\mathbf{N}}A_k$ شمارای نامتناهی است.[1]

برهان. برای هر $k\in\mathbf{N}$، تابع $f_k:\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\{k\}$ را با $f_k(j)=(j,k)$ برای هر $j\in\mathbf{N}$ تعریف می‌کنیم. بدیهی است که هر $f_k:\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\{k\}$ یـك تناظر یك بـه یك است. یعنی، $\mathbf{N}\sim\mathbf{N}\times\{k\}$. چون بـرای هـر $k\in\mathbf{N}$، $A_k\sim\mathbf{N}$ و $\mathbf{N}\sim\mathbf{N}\times\{k\}$، برای هر $k\in\mathbf{N}$ داریم $A_k\sim\mathbf{N}\times\{k\}$. حال ازمسئلهٔ ۵ تمرین ۲۰۵ نتیجه می‌شود که $\bigcup_{k\in\mathbf{N}}A_k\sim\bigcup_{k\in\mathbf{N}}\mathbf{N}\times\{k\}$. امـا مجموعهٔ $\bigcup_{k\in\mathbf{N}}\mathbf{N}\times\{k\}$ برابر مجموعهٔ شمارای نامتناهی $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ است. بنابراین، $\bigcup_{k\in\mathbf{N}}A_k$ شمارای نامتناهی است.

مثال ۵. $\mathbf{Q}$، مجموعهٔ تمام اعدادگویا، شمارای نامتناهی است.

---

۱. این نتیجه بدون‌فرض «$A_j\cap A_k=\varnothing$ برای هر $j\neq k$» نیزصحیح‌است. مسئلهٔ ۷ را ببینید.

برهان. هرعددگویا را با p/q که در آن $p \in \mathbf{Z}$، $q \in \mathbf{N}$ و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك p و q یك است، به‌صورتی یکتا* نمایش می‌دهیم. گیریم $\mathbf{Q}_+$ مجموعهٔ تمام اعداد مثبت p/q است، و $\mathbf{Q}_- = \{-p/q \mid p/q \in \mathbf{Q}_+\}$. آنگاه $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}_-$. بدیهی است که $\mathbf{Q}_+ \sim \mathbf{Q}_-$. ازاین‌رو، برای اینکه نشان‌دهیم $\mathbf{Q}$ شمارای نامتناهی است، کافی است نشان‌دهیم که $\mathbf{Q}_+$ شمارای نامتناهی است. برای این منظور، تابع $f : \mathbf{Q}_+ \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ را که با $f(p/q) = (p, q)$ داده‌شده‌است، در نظر می‌گیریم. چون این تابع یك به یك است، داریم $\mathbf{Q}_+ \sim f(\mathbf{Q}_+) \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. چون $\mathbf{Q}_+$ یك فوق مجموعهٔ $\mathbf{N}$ است، نامتناهی است، $f(\mathbf{Q}_+)$ یك زیرمجموعهٔ نـامتناهی مجموعهٔ شمارای نامتناهی $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ است. از این‌رو، $f(\mathbf{Q}_+)$ شمارای نـامتناهی است و درنتیجه $\mathbf{Q}_+$ شمارای نامتناهی است. اکنون اثبات کامل است.

قضیهٔ بعدی حاکی ازاین است که در واقع، مجموعه‌های شمارای نامتناهی ازلحاظی در بین مجموعه‌های نامتناهی دارای کوچکترین «اندازه» هستند.

قضیهٔ ۱۱. هرمجموعهٔ نامتناهی شامل یك زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی است.

برهان. فرض کنید X یك مجموعهٔ نـامتناهی است. چون $X \neq \varnothing$، می‌توانیم یك عنصر ازمجموعهٔ X انتخاب کنیم و آن را x_1 بنامیم. حال عنصری از $X - \{x_1\}$ را x_2 می‌نامیم. همچنین، x_3 را عنصری ازمجموعهٔ غیرتهی $X - \{x_1, x_2\}$ انتخاب می کنیم. این عمل را ادامـه می‌دهیم، یعنی پس از اینکه x_{k-1} را بدین طریق مشخص کـردیم، x_k را عنصری از $X - \{x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}\}$ انتخاب می‌کنیم. x_k برای هـر $k \in \mathbf{N}$ وجود دارد، زیـرا X نـامتناهی است و درنتیجـه مطمئن هستیم کـه برای هـر $k \in \mathbf{N}$، $X - \{x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}\}$ تهی نیست. مجموعهٔ $\{x_k \mid k \in \mathbf{N}\}$ یك زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی X است، وبنابراین اثبات کامل است.

تمرین ۳.۵

۱. حکم مثال ۴ را ثابت کنید: مجموعهٔ تمام اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ شمارای نامتناهی است.
۲. نتیجهٔ قضیهٔ ۹ را ثابت کنید.
۳. ثابت کنید که اجتماع تعدادی متناهی ازمجموعه‌های شمارا، شماراست.
۴. ثابت کنید که اگر A و B مجموعه‌های شمارای نامتناهی بـاشند، $A \times B$ نیز شمارای نامتناهی است، بخصوص $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$، $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$، و $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ شمارای نامتناهی هستند.
۵. یك تابع یك‌به‌یك $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ پیدا کنید وبرهان دیگری برای مثال ۵ بیاورید.
۶. ثابت کنید که مجموعهٔ تمام دایره‌هـای واقع درصفحهٔ دکارتی که شعاعهایشان اعدادگویا ومختصات مرکزهایشان اعدادگویا هستند، شمارای نامتناهی است.

---

* یعنی اگر $p/q = p'/q'$ و $p' \in \mathbf{Z}$، $q' \in \mathbf{N}$ و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك p' و q' یـك باشد، آنگاه $p' = p$ و $q' = q$.—م.

۷. ثابت کنید که اگر برای هر $k \in \mathbf{N}$، B_k یك مجموعهٔ شمارای نامتناهی باشد، آنگاه $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} B_k$ شمارای نامتناهی است.

۸. ثابت کنید که اگر X یك مجموعهٔ شمارا، و $f: X \to Y$ یك سورژکسیون باشد، آنگاه Y شماراست.

۹. ثابت کنید که هرمجموعهٔ شمارای نامتناهی X یك زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی مانند Y دارد به‌طوری که $X - Y$ شمارای نامتناهی است.

۱۰. ثابت کنید که مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایهای

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

با ضرایب صحیح شمارای نامتناهی است. [راهنمایی: نتیجهٔ قضیهٔ ۱۵ را به‌کار برید.]

۱۱. عدد جبری، بنابر تعریف، هر ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ با ضرایب صحیح است. ثابت کنید که مجموعهٔ تمام اعداد جبری شمارای نامتناهی است.

۱۲. ثابت کنید کـه مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های متناهی یك مجموعـهٔ شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

۴. مجموعه‌های ناشمارا

تمام مجموعه‌های نامتناهی‌ای که تاکنون دیده‌ایم، شمارا بوده‌انـد. این مطلب ممکن است خواننده را به‌این فکر بیاندازد که شاید تمام مجموعه‌های نامتناهی، شمارا هستند. عمومـاً فکر می کنند که گئورگ کانتور، هنگامی که نظریهٔ مجموعه‌ها را تدوین می کرد، نخست سعی کرد ثابت کند کـه هرمجموعهٔ نامتناهی، شماراست. وقتی اثبات کرد کـه مجموعهٔ ناشمارا وجود دارد، نتیجه برایش غیرمنتظره بود.

قضیهٔ ۱۲. فاصلهٔ یکهٔ باز $(0, 1)$ اعداد حقیقی، یك مجموعهٔ ناشماراست.

برهان. نخست هرعـدد x، $0 < x < 1$، را بـا بسط اعشاری آن بـه صورت $0/x_1 x_2 x_3 \cdots$ که در آن به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $x_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$، نشان می‌دهیم. مثلاً، $1/3 = 0/333\ldots$، $\sqrt{2}/2 = 0/707106\ldots$. برای اینکه وقتی بسط اعشاری عددی، مانند $1/4 = 0/25$، محدود است، نمایش یکتایی از اعشار نامتناهی داشته‌باشیم، قرار می‌گذاریم کـه از رقم آخر یکی کم کرده و رقمهای بعدی را ۹ بنویسیم، بنابراین می‌نویسیم $1/4 = 0/24999\ldots$، نه $0/25000\ldots$. با این قرارداد، دوعدد درفاصلهٔ $(0, 1)$ مساوی هستند اگر و تنها اگر رقمهـای متناظر بسط اعشاری آنهـا یکی باشند. ازاین‌رو، اگر دوعدد $x = 0/x_1 x_2 x_3 \cdots$ و $y = 0/y_1 y_2 y_3 \cdots$ دریك رقم اعشاری، مثلاً در kامین، متفاوت بـاشند: $x_k \neq y_k$، آنگاه $x \neq y$. در برهان مـا این یکی از نکته‌های اصلی است.

حال فرض کنید که مجموعهٔ $(0, 1)$ شمارای نامتناهی است. آنگاه یك تناظر یك‌به‌یك

$f: \mathbb{N} \sim (0,1)$ وجود دارد. از این‌رو می‌توانیم تمام عناصر $(0,1)$ را به‌صورت زیر مرتب کنیم:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\ f(2) &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\ f(3) &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\ &\vdots \\ f(k) &= 0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (*)$$

که در آن، هر $a_{jk} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

اکنون عدد $z \in (0,1)$ را چنان می‌سازیم که با هیچ یك از $f(k)$های بالا برابر نباشد. از این تناقض نتیجه می‌شود که فرض قبلی ما مبنی بر شمارای نامتناهی بودن $(0,1)$ نادرست است و بنابراین مجموعهٔ $(0,1)$ ناشماراست. عدد $z = 0.z_1z_2z_3\ldots$ را چنین تعریف می‌کنیم: برای هر $k \in \mathbb{N}$، اگر $a_{kk} \neq 5$، $z_k = 5$، و اگر $a_{kk} = 5$، $z_k = 1$. بدیهی است که عدد $z = 0.z_1z_2z_3\ldots$ درشرط $0 < z < 1$ صدق می‌کند؛ اما $z \neq f(1)$ زیرا $z_1 \neq a_{11}$ و $z \neq f(2)$ زیرا $z_2 \neq a_{22}$، ...، و درحالت کلی $z \neq f(k)$ زیرا به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، $z_k \neq a_{kk}$. بنابراین $z \notin f(\mathbb{N}) = (0,1)$، که یك تناقض است، بنابراین اثبات کامل است.

نتیجه. مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، ناشماراست.

برهان. در مثال ۳ (ب) ثابت کردیم که $\mathbb{R} \sim (0,1)$. حال چون $(0,1)$ ناشماراست، $\mathbb{R}$ که همتوان آن است، نیز ناشماراست (مسئلهٔ ۱ را ببینید).

مثال ۶. مجموعهٔ تمام اعداد گنگ، ناشماراست.

برهان. درمثال ۵، نشان داده‌ایم که مجموعهٔ تمام اعداد گویای $\mathbb{Q}$ شمارای متناهی است. مجموعهٔ تمام اعداد گنگ، بنابر تعریف، $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ است. به‌آسانی می‌توان دید که $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ یك مجموعهٔ نامتناهی است. برای اینکه نشان دهیم $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ناشماراست، خلاف آن را فرض می‌کنیم، یعنی $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ را شمارای نامتناهی می‌گیریم. آنگاه نتیجه می‌شود که $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ شمارای نامتناهی است (قضیهٔ ۹). اما این، نتیجهٔ قضیهٔ ۱۲ را نقض می‌کند. پس مجموعهٔ تمام اعداد گنگ، $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$، ناشماراست.

دو تذکار. (۱) روشی که در برهان قضیهٔ ۱۲، به‌کار رفته است، روش قطری کانتور نامیده می‌شود، زیرا از ابتکارهای کانتور است و در جدول ارقام (*)، ارقام عدد

$z = 0.z_1 z_2 z_3 \cdots$ که کلید برهان است براساس ارقام قطر اصلی $a_{11}, a_{22}, a_{33} \cdots$ تشکیل شده‌اند. گرچه ممکن است درك ارزش این برهـان برای دانشجویان مبتدی آسان نباشد، نبوغ کانتور با این برهان آشکار می‌شود.

(۲) وجود مجموعه‌های ناشمارا نشان می‌دهد که مجموعه‌های نامتناهی از رده‌هایی تشکیل شده‌انـد. درفصل بعد خواهیم دید که درحقیقت مجموعه‌های نـامتناهی «رده‌هـای همتوانی» فراوان دارند.

تمرین ۴.۵

۱. گیریم A و B دومجموعهٔ همتوان هستند. ثابت‌کنید که اگر A ناشمارا باشد، B نیز ناشماراست.

۲. ثابت‌کنید که هر فوق مجموعهٔ یك مجموعهٔ ناشمارا، ناشماراست.

۳. با استفاده ازنتیجهٔ مسئلهٔ ۲ی بالا، برهان دیگری برای نتیجهٔ قضیهٔ ۱۲ بیاورید.

۴. ثابت‌کنید که مجموعهٔ تمام اعدادگنگ بین ۰ و ۱ ناشماراست.

۵. عدد متعالی، بنابرتعریف، یك عدد حقیقی غیرجبری است (مسئلهٔ ۱۱، تمرین ۳.۵ را ببینید). ثابت‌کنید که مجموعهٔ تمام اعداد متعالی ناشماراست.

۶. گیریم $S' = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$. ثابت کنید $S' \sim \mathbf{R}$ و از این‌رو ناشماراست.

۷. ثابت‌کنید که مجموعهٔ A ناشماراست اگر وتنها اگر $A \times A$ ناشمارا باشد.

۸. ثابت‌کنید که اگر مجموعه‌های A و B به‌قسمی باشند که $A \times B$ ناشمارا باشد، آنگاه A یا B ناشماراست.

۹. ثابت‌کنید که اگر $k \in \mathbf{N}$ ومجموعه‌هـای $A_1, A_2, \ldots, A_k$ به‌قسمی باشند کـه $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ ناشمارا بـاشد، آنگاه $j \in \mathbf{N}_k$ وجود دارد به‌قسمی‌که A_j ناشماراست.

۱۰. ثابت‌کنید که اگر $k \in \mathbf{N}$ و مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_k$ به‌قسمی بـاشندکـه $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ ناشمارا باشد، آنگاه یك $j \in \mathbf{N}_k$ وجود دارد به‌قسمی‌که A_j ناشماراست.

۱۱. ثابت‌کنید که اگر مجموعه‌های A و B به‌قسمی باشندکه $A \oplus B$ ناشمارا باشد، آنگاه A یا B ناشماراست. آیا عکس آن درست است؟

۶

اعداد اصلی و حساب اعداد اصلی

مفهوم اعداد اصلی را معرفی می‌کنیم. ویـژگیهای متشابه و متمایـز بین اعـداد اصلی متناهی و تـرامتناهی را ضمن شناسائی حساب اعـداد اصلی ـ جمع، ضرب، و توانرسانی ـ عرضه می‌کنیم. فصل را با تبصره‌ای در بارهٔ فرض پیوستار (تعمیم یافته) که جنبهٔ تاریخی دارد خاتمه می‌دهیم.

۱. مفهوم اعداد اصلی

مفهوم عدد از قدیم به‌طور طبیعی وارد زندگی ما شده‌است. مـا می‌توانستیم مثلاً، تشابه بین سه سیب و سه پرتقال، و تمایز بین دوانگشت و چهار انگشت را درک کنیم. گـرچه مفهومی از عـدد داشتیم، اکثراً تعریفی دقیق از عـدد نـداشتیم. مثلاً می‌دانستیم کـه، $۵ = ۳ + ۲$، $۴ > ۳$، $۴۲ = ۷ \times ۶$ و غیره. این موجب می‌شود معتقد شویم که احتیاجی نیست که واقعاً بدانیم عدد چیست؛ چیزی که باید بدانیم تساوی و ترتیب بین اعداد است وبدانیم چگونه با اعداد محاسبه‌کنیم‌ـدرست مثل شطرنج بازها که علاقه‌مند نیستند بدانند که اسب دربازی شطرنج چیست بلکه باید با حرکتهای آن آشنا باشند. بنابراین در اینجا

عدد اصلی را تعریف نمی‌کنیم[1]، بلکه آن را به‌عنوان یک مفهوم اولیه برای «اندازهٔ» مجموعه‌ها معرفی می‌کنیم. مهمترین قاعده‌های راهنمای این مفهوم جدید عبارت‌اند از:

*الف-۱. هرمجموعهٔ A با یك عدد اصلی مربوط است که با $\operatorname{card} A$ نمایش‌داده می‌شود** و برای هرعدد اصلی a یك مجموعهٔ A وجود دارد به‌طوری‌که $\operatorname{card} A=a$.

الف-۲. $\operatorname{card} A=0$ اگر و تنها اگر $A=\varnothing$.

الف-۳. اگر A یك مجموعهٔ متناهی غیرتهی باشد؛ یعنی، برای یك $k\in\mathbf{N}$،

$$A\sim\{1, 2, \ldots, k\}$$ آنگاه $$\operatorname{card} A=k$$

الف-۴. برای هردومجموعهٔ A و B، $\operatorname{card} A=\operatorname{card} B$ اگر و تنها اگر $A\sim B$.

قاعده‌های الف-۲ و الف-۳ اعداد اصلی مجموعه‌های متناهی را تعریف می‌کنند- عدد اصلی یك مجموعهٔ متناهی تعداد عنصرهای آن مجموعه است. در نظریهٔ مجموعه‌ها با روش اصل موضوعی، الف-۱ و الف-۴ را معمولاً* یك اصل موضوع می‌گیرند، به نام اصل موضوع اعداد اصلی. ممکن است پذیرفتن قاعده‌های الف-۱ و الف-۴ برای خوانندهٔ مبتدی مشکل باشد، زیرا این‌قاعده‌ها وقتی A نامتناهی است، چیز زیادی در بارهٔ $\operatorname{card} A$ نمی‌گوید. این اشکال درضمن ادامهٔ بحث به‌تدریج برطرف‌خواهد شد-درست شبیه به‌این است که دانشجو تنها پس از اینکه حدود نیمی از درس حساب دیفرانسیل و انتگرال را می‌خواند موضوع درس را می‌فهمد. در این‌مرحله اجمالاً* می‌توانیم بگوییم که عدد اصلی یك مجموعه، ویژگی مشترکی است بین مجموعه و تمام مجموعه‌های همتوان خود.

تمرین ۱۰۶

۱. نشان دهیدکه اعداد طبیعی، اعداد اصلی هستند.

۲. سه عدد اصلی بیابیدکه عدد طبیعی نباشند.

۳. نشان دهیدکه $\operatorname{card}\mathbf{N}=\operatorname{card}\mathbf{Z}=\operatorname{card}\mathbf{Q}=\operatorname{card}\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$.

۴. فرض کنیم A یك مجموعه باشد و x عنصر A نباشد. ثابت کنید که اگر $\operatorname{card}(A\cup\{x\})=\operatorname{card} A$، آنگاه A نامتناهی است.

۵. آیا عکس مسئلهٔ ۴ درست است؟

۶. ثابت کنیدکه اگر $\operatorname{card} A=\operatorname{card} B=\operatorname{card}\mathbf{N}$، آنگاه

$$\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card} B$$

۷. فرض‌کنیم $\mathbf{N}^1=\mathbf{N}$ و برای هر $n\in\mathbf{N}$، $\mathbf{N}^{n+1}=\mathbf{N}^n\times\mathbf{N}$. ثابت‌کنید

---

۱. شایدلازم باشد خواننده بداندکه اعداد اصلی‌را می‌توان «اعداد ترتیبی‌آغازی» تعریف‌کرد. صفحهٔ ۱۸۱ را ببینید.

* card چهار حرف اول cardinal number به‌معنای عدد اصلی است.-م.

(الف) برای هر $k\in \mathbf{N}$، $\operatorname{card}\mathbf{N}^k=\operatorname{card}\mathbf{N}$.

(ب) $\operatorname{card}\bigcup_{k\in\mathbf{N}}\mathbf{N}^k=\operatorname{card}\mathbf{N}$.

۲. مرتب‌کردن اعداد اصلی-قضیهٔ شرودر-برنشتاین

عدد اصلی یك مجموعهٔ متناهی را عدد اصلی متناهی، و عدد اصلی یك مجموعهٔ نامتناهی را عدد اصلی ترامتناهی (یا ترانسفینی) می‌نامیم. قاعده‌های الف-۲ و الف-۳ از بخش قبل نشان می‌دهند که اعداد اصلی متناهی دقیقاً اعداد صحیح نامنفی هستند. از این‌رو، اعداد اصلی متناهی دارای ترتیب طبیعی ذاتی $\cdots<k+1<k<\cdots<2<1<0$ هستند. درمورد دوعدد اصلی ترامتناهی، قاعدهٔ الف-۴ مشخص می‌کند چه وقت این دوعدد مساوی هستند وچه وقت نیستند. این برای ما کافی نیست؛ وقتی آنها نامساوی‌اند می‌خواهیم بتوانیم بگوییم کدام یك «کوچکتر» از دیگری است.

تعریف ۱. دو مجموعهٔ A و B مفروض‌اند. می‌گوییم $\operatorname{card}A$ کوچکتر از $\operatorname{card}B$ یا مساوی با آن است، $\operatorname{card}A\leqslant\operatorname{card}B$، هرگاه مجموعهٔ A با یك‌زیرمجموعهٔ B همتوان باشد. اگر $\operatorname{card}A\leqslant\operatorname{card}B$ و $\operatorname{card}A\neq\operatorname{card}B$، آنگاه می‌نویسیم $\operatorname{card}A<\operatorname{card}B$.

اگرچه این تعریف را برای مرتب‌کردن اعداد اصلی ترامتناهی آورده‌ایم، اما درمورد اعداد اصلی متناهی هم می‌توان آن را به‌کار برد، و از این راه هم به‌همان ترتیب طبیعی سنتی، که دربالا ذکر شد، می‌رسیم.

مثال ۱. $\operatorname{card}\mathbf{N}<\operatorname{card}\mathbf{R}$.

برهان. چون $\mathbf{N}$ یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ است، $\mathbf{N}$ همتوان با یك‌زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ است، یعنی $\mathbf{N}\sim\mathbf{N}\subset\mathbf{R}$، اما دربخش۴، فصل ۵ دیدیم که مجموعهٔ نامتناهی $\mathbf{R}$، ناشمارا است. بنابراین $\mathbf{R}$ با هیچ یك از زیرمجموعه‌های $\mathbf{N}$ همتوان نیست. پس بنابر تعریف ۱، $\operatorname{card}\mathbf{N}<\operatorname{card}\mathbf{R}$.

تا کنون برای ما روشن نیست که وقتی مجموعهٔ A همتوان با یك‌زیرمجموعهٔ B است و مجموعهٔ B نیز همتوان با یك‌زیرمجموعهٔ A است، چگونه دوعدد $\operatorname{card}A$ و $\operatorname{card}B$ را باهم مقایسه‌کنیم. گئورگ کانتور حدس زدکه دراین حالت $\operatorname{card}A$ باید با $\operatorname{card}B$ مساوی باشد. بعد در دههٔ ۱۸۹۰ برنشتاین* درسمینارکانتور، و شرودر** برپایهٔ یك‌حساب منطقی، مستقل از یکدیگر، این حدس کانتور را ثابت‌کردند. این نتیجهٔ مشهور امروزه عموماً به‌نام قضیهٔ شرودر-برنشتاین معروف است.

* F. Bernstein ** E. Schröder

قضیهٔ ۰۱ (قضیهٔ شرودر-برنشتاین) اگر دومجموعهٔ A و B به‌قسمی باشندکه A با یك زیرمجموعهٔ B همتوان باشد و B نیز با یك زیرمجموعهٔ A همتوان باشد، آنگاه A و B همتوان هستند.

ما نخست حالت خاصی از قضیهٔ ۱ را ثابت می‌کنیم و از آن به‌آسانی قضیهٔ ۱ را نتیجه می‌گیریم.

لم. اگر B یك زیرمجموعهٔ A باشد و اگر یك انژکسیون $f: A \rightarrow B$ وجود داشته‌باشد، آنگاه یك بیژکسیون $h: A \sim B$ وجود دارد.

برهان. اگر B خود A باشد، تابع همانی روی A یك h است. پس B را یك زیرمجموعهٔ سرهٔ A می‌گیریم. فرض می‌کنیم C مجموعهٔ $\bigcup_{n \geqslant 0} f^n(A-B)$ باشد، که در آن f^0 تابع همانی روی A است و به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k و هر $x \in A$، $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$. تابع $h(z)$ را به‌ازای هر z در A، به‌طریق زیر تعریف کنید:

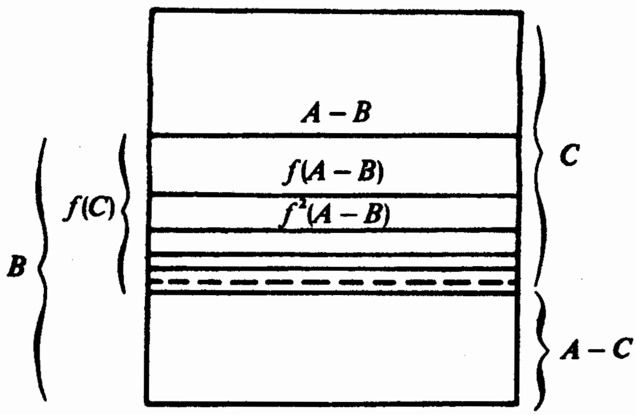
$$h(z) = \begin{cases} f(z) & z \in C \text{ اگر} \\ z & z \in A-C \text{ اگر} \end{cases}$$

توجه کنید که $A-B$ زیرمجموعهٔ C است، $f(C) \subseteq C$، و اگر m و n دوعدد صحیح نامنفی متمایز باشند، مثلاً $m < n$، آنگاه $f^m(A-B)$ و $f^n(A-B)$ دومجموعهٔ مجزا هستند. زیرا، اگر x و x' در $A-B$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $f^m(x) = f^n(x')$، آنگاه داریم $f^{n-m}(x') = x \in B \cap (A-B)$ که یك تناقض‌است. بالاخره، بنابرتعریف h و تذکار اخیر، داریم

$$\begin{aligned} h(A) &= (A-C) \cup f(C) \\ &= \left[A - \bigcup_{n \geqslant 0} f^n(A-B)\right] \cup f\left(\bigcup_{n \geqslant 0} f^n(A-B)\right) \\ &= \left[A - \bigcup_{n \geqslant 0} f^n(A-B)\right] \cup \left[\bigcup_{n \geqslant 1} f^n(A-B)\right] \\ &= A-(A-B) \\ &= B \end{aligned}$$

ازآنچه گفته شد و از اینکه f انژکتیو است، نتیجه می‌شودکه $h: A \rightarrow B$ یك بیژکسیون است. پس برهان لم کامل است.

نکتهٔ اصلی برهان بالا در شکل گویای زیر نمایانده شده‌است. دراین شکل مجموعهٔ A تمام مستطیل است.



شکل ۱۷

برهان (قضیهٔ ۱). گیریم $A_\circ$ و $B_\circ$ به‌ترتیب زیرمجموعه‌های A و B هستند به‌قسمی‌که $A\sim B_\circ$ و $B\sim A_\circ$، و فرض‌کنیم $f_\circ: A\sim B_\circ$ و $g_\circ: B\sim A_\circ$ دو بیژکسیون هستند. تابع $f: A\to A_\circ$ را با $f(x)=g_\circ(f_\circ(x))$ تعریف می‌کنیم، که یك انژکسیون است. پس بنا بر لم بالا یك بیژکسیون $h: A\sim A_\circ$ وجود دارد. در نتیجه $g_\circ^{-1}\circ h: A\sim B$ که ترکیب دو بیژکسیون $h: A\sim A_\circ$ و $g_\circ^{-1}: A_\circ\sim B$ است، یك بیژکسیون است[1].

نتیجه. اگر A و B دو مجموعه باشند به قسمی‌که $\operatorname{card} A\leqslant \operatorname{card} B$ و $\operatorname{card} B\leqslant \operatorname{card} A$، آنگاه $\operatorname{card} A=\operatorname{card} B$.

تاکنون اطلاعات اندکی در بارهٔ اعداد اصلی ترامتناهی داریم، زیرا فقط با دوعدد اصلی ترامتناهی، $\operatorname{card}\mathbf{N}$ و $\operatorname{card}\mathbf{R}$ آشنا شده‌ایم. طبیعی است بخواهیم بدانیم که آیا اعداد اصلی ترامتناهی دیگری وجود دارند؟ پاسخ این سؤال در بخش بعدی آمده است-درحقیقت تعداد نامحدودی عدد اصلی ترامتناهی وجود دارد.

سؤال مهم دیگر این است: اگر m و n دو عدد اصلی متناهی متمایز باشند آنگاه یا $n<m$ یا $m<n$؛ آیا این مطلب برای اعداد اصلی ترامتناهی نیز درست است؟ پاسخ مثبت است. و چون برهان آن به یکی از نتیجه‌های فصل بعدی بستگی دارد، این پاسخ درقضیهٔ ۴ فصل بعدآمده‌است.

---

۱. این برهان و لم قبلی ازمقالهٔ:

R. H. Cox "A proof of the Schröder. Bernstein Theorem" American Mathematical Monthly, 75, No. 5 (1968), 508.

اقتباس شده‌است.

تمرین ۲۰۶

۱. گیریم n یك عدد اصلی متناهی است. ثابت‌کنیدکه $n < \operatorname{card} \mathbf{N}$.

۲. گیریم a یك عدد اصلی ترامتناهی است. ثابت‌کنید که $\operatorname{card} \mathbf{N} \leqslant a$. از این‌رو، $\operatorname{card} \mathbf{N}$ کوچکترین عدد اصلی ترامتناهی است.

۳. دومجموعهٔ A و B مفروض‌اند. ثابت‌کنیدکه $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ اگر و تنها اگر یك انژکسیون $f: A \to B$ وجود داشته‌باشد.

۴. سه مجموعهٔ A، B، و C مفروض‌اند. ثابت‌کنیدکه

(الف) اگر $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ و $\operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} C$، آنگاه $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} C$.

(ب) اگر $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$ و $\operatorname{card} B < \operatorname{card} C$، آنگاه $\operatorname{card} A < \operatorname{card} C$.

۵. سه مجموعهٔ A، B، و C مفروض‌اند. ثابت‌کنیدکه

(الف) اگر $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ و $\operatorname{card} B < \operatorname{card} C$، آنگاه $\operatorname{card} A < \operatorname{card} C$.

(ب) اگر $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$ و $\operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} C$، آنگاه $\operatorname{card} A < \operatorname{card} C$.

۶. ثابت‌کنید که اگر A و B دومجموعه باشند و $A \subseteq B$، آنگاه $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$.

۷. ثابت‌کنیدکه اگرمجموعه‌های A، B، و C به‌طوری باشندکه $A \subseteq B \subseteq C$ و $A \sim C$، آنگاه $A \sim B$.

۸. نشان دهیدکه $\operatorname{card} \mathbf{N} < \operatorname{card} \mathbf{R}$.

۹. گیریم A یك مجموعه است و x عنصر A نیست. ثابت‌کنیدکه اگر

$$\operatorname{card} A < \operatorname{card}(A \cup \{x\})$$

آنگاه A متناهی است.

۳. عدد اصلی یك مجموعهٔ توانی ـ قضیهٔ کانتور

گیریم X یك‌مجموعه است. یادآوری می‌شودکه مجموعهٔ توانی X، یعنی $\mathcal{P}(X)$، مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های X است (بخش ۲، فصل ۲). گئورگ کانتور خود ثابت‌کرد که $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$. اهمیت این قضیه درآن است‌که شیوه‌ای برای درست‌کردن یك دنبالهٔ بینهایت از اعداد اصلی (ترامتناهی) جدید به‌دست می‌دهد. مثلاً، داریم

$$\operatorname{card} \mathbf{R} < \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbf{R}) < \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{R})) < \cdots$$

قضیهٔ ۲. (قضیهٔ کانتور). اگر X یك مجموعه باشد، آنگاه $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$.

برهان. اگر $X = \varnothing$، آنگاه $\operatorname{card}(\varnothing) = 0 < 1 = \operatorname{card} \mathcal{P}(\varnothing)$. پس باقی می‌ماندکه حالت $X \neq \varnothing$ ثابت شود. در این حالت تابع $g: X \to \mathcal{P}(X)$ که با $g(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ برای هر $x \in X$، تعریف می‌شود انژکتیو است. بنابراین،مجموعهٔ X با زیرمجموعهٔ $\{\{x\} | x \in X\}$ از $\mathcal{P}(X)$ همتوان است، یا به‌عبارت دیگر، $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$. پس، برای‌اینکه نشان‌داده شودکه $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$،

کافی است نشان داده شود که X با $\mathcal{P}(X)$ همتوان نیست.

خلاف آن را فرض کنید، یعنی فرض کنید یك بیژکسیون $f: X \sim \mathcal{P}(X)$ وجود دارد؛ می‌خواهیم ثابت کنیم که با این فرض به یك تناقض می‌رسیم. مجموعهٔ $S = \{x \in X | x \notin f(x)\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه عبارت است از تمام عنصرهای X که در نگاره‌های تحت f خودشان نیستند. چون $S \in \mathcal{P}(X)$ و فرض کردیم $f: X \sim \mathcal{P}(X)$، یك عنصر $e \in X$ وجود دارد به‌قسمی که $f(e) = S$. اکنون یا $e \in S$ یا $e \notin S$.

حالت ۱. $e \in S$.

از تعریف S نتیجه می‌شود که $e \notin f(e)$؛ که غیرممکن است زیرا $f(e) = S$ و $e \in S$.

حالت ۲. $e \notin S$.

چون $f(e) = S$، داریم $e \notin f(e)$. درنتیجه، بنابرتعریف S، $e \in S$ و از این‌رو $e \in f(e)$. این نیز غیرممکن است.

پس در هردوحالت به‌تناقض رسیدیم و برهان قضیهٔ کانتور کامل است.

بسیار طبیعی است که همراه با قضیهٔ کانتور این سؤال مطرح شود: آیا عددی اصلی، مانند x، وجود دارد به‌قسمی که

$$\operatorname{card} \mathbf{N} < x < \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbf{N})$$

این سؤال، که مسئلهٔ پیوستاری نامیده می‌شود، فکر کانتور و دیگر ریاضیدانان را مدت زیادی به‌خود مشغول کرد. در بخش ۸ دربارهٔ این مسئله گفتگو خواهیم کرد.

تمرین ۳.۶

۱. نشان دهید که بزرگترین عدد اصلی وجود ندارد.

۲. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید که اگر $A \sim B$ آنگاه

$$\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = \operatorname{card} \mathcal{P}(B)$$

۳. گیریم A یك مجموعهٔ شمارای نامتناهی است. ثابت کنید $\mathcal{P}(A)$، مجموعهٔ توانی A، ناشمارا است.

۴. ثابت کنید که مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های نامتناهی $\mathbf{N}$ ناشمارا است. [راهنمایی: مسئلهٔ ۱۲، تمرین ۳.۵ را به‌کار برید]

۵. با استفاده از قضیهٔ کانتور (قضیهٔ ۲) ثابت کنید که مجموعهٔ تمام‌مجموعه‌ها وجود ندارد.

۴. جمع اعداد اصلی

با حساب اعداد اصلی متناهی آشنا هستیم. مثلاً، اگر k و l دوعدد اصلی متناهی باشند، مجموع $k+l$ و حاصلضرب kl همان معنی معمولی خود را دارند. اکنون تلاش می‌کنیم این حساب را تعمیم دهیم تا شامل اعداد اصلی ترامتناهی نیز بشود؛ یعنی حسابی بسازیم که در تمام اعداد اصلی، متناهی یا ترامتناهی، به‌کاررود، و به‌گونه‌ای باشد که معانی و ویژگیهای حساب سنتی اعداد اصلی متناهی محفوظ بماند.

تعریف ۲. گیریم a و b اعدادی اصلی هستند. مجموع اصلی a و b، که با $a+b$ نشان داده می‌شود، عدد اصلی $\operatorname{card}(A\cup B)$ است که در آن A و B مجموعه‌های مجزا و به‌گونه‌ای هستند که $\operatorname{card} A=a$ و $\operatorname{card} B=b$.

برای اینکه نشان داده شود که تعریف ۲ خوش تعریف است*، خواننده باید نخست بداند که برای هردو عدد اصلی a و b (نه لزوماً متمایز)، بنابر قاعدهٔ الف-۱ بخش ۱، مجموعه‌هایی مانند X و Y وجود دارند به‌طوری‌که $\operatorname{card} X=a$ و $\operatorname{card} Y=b$. اما ممکن است مجموعه‌های X و Y مجزا نباشند. دراین صورت می‌نویسیم: $A=X\times\{0\}$ و $B=Y\times\{1\}$؛ آنگاه $A\sim X$، $B\sim Y$، و $A\cap B=\varnothing$. پس $a+b=\operatorname{card}(A\cup B)$ و عددی یکتاست، زیرا اگرمجموعه‌های مجزای دیگری مانند A' و B' وجود داشته باشد که $A\sim A'$ و $B'\sim B$، آنگاه بنابرقضیهٔ ۶ فصل ۴، داریم $(A'\cup B')\sim(A\cup B)$ یا به‌عبارت دیگر، $\operatorname{card}(A'\cup B')=\operatorname{card}(A\cup B)$.

پس قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم:

قضیهٔ ۳. اعداد اصلی a و b مفروض‌اند. آنگاه

(الف) مجموعه‌های مجزای A و B وجود دارند به‌قسمی که $\operatorname{card}A=a$ و $\operatorname{card} B=b$.

(ب) اگر مجموعه‌های A، B، A'، و B' به‌قسمی باشند که $\operatorname{card} A'=\operatorname{card} A$،

$$\operatorname{card} B'=\operatorname{card} B\text{،}\quad A\cap B=\varnothing \quad\text{و}\quad A'\cap B'=\varnothing$$

آنگاه $\operatorname{card}(A'\cup B')=\operatorname{card}(A\cup B)$.

مثالهای زیرنشان می‌دهند که تعریف ۲ درمورد اعداد اصلی متناهی، بامجموع معمولی دوعدد طبیعی مطابقت دارد.

مثال ۲. ۳+۴، مجموع اصلی دوعدد اصلی ۳ و ۴ را بیابید.

---

* مقصود از «خوش تعریف است» این است که $a+b$ بدون ابهام تعریف می‌شود. خوش‌تعریفی در اینجا مطرح است، زیرا اولاً واضح نیست که دومجموعهٔ A و B که درشرایط تعریف ۲ صدق کنند وجود دارند و ثانیاً روشن نیست که $a+b$ به‌انتخاب A و B بستگی ندارد.-م.

حل: چون $N_7=N_4\cup\{5, 6, 7\}$، $\operatorname{card} N_4=4$، $\operatorname{card}\{5, 6, 7\}=3$، ومجموعه‌های N_4 و $\{5, 6, 7\}$ مجزا هستند، داریم

$$\begin{aligned} 4+3&=\operatorname{card}(N_4\cup\{5, 6, 7\})\\ &=\operatorname{card} N_7=7 \end{aligned}$$

که با مجموع معمولی دوعدد صحیح مطابقت دارد.

چون اجتماع مجموعه‌ها جابه‌جایی و شرکتپذیر است، ویـژگیهای مربوطهٔ زیر را دربارهٔ جمع اصلی داریم.

قضیهٔ ۴. گیریم x، y، و z اعداد اصلی دلخواه هستند. آنگاه

(الف) $x+y=y+x$ (جابه‌جایی)

(ب) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (شرکتپذیری)

به‌پیروی از گئورگ کانتور، نماد $\aleph_0$ (بخوانید الف-صفر؛ $\aleph$ اولین حرف الفبای عبری است) برای نشان دادن عدد اصلی یك مجموعهٔ شمارای نامتناهی و c بـرای عدد اصلی پیوستار به‌کار می‌رونـد؛ پیوستار یعنی مجموعهٔ اعـداد حقیقی. به‌عبارت دیگر $\aleph_0=\operatorname{card} N$ و $c=\operatorname{card} R$.

مثال ۳. مجموع اصلی $\aleph_0+\aleph_0$ را بیابید.

حل: گیریم N_e و N_o به‌ترتیب مجموعهٔ اعداد طبیعی‌زوج و مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد هستند. آنگاه N_e و N_o زیرمجموعه‌های‌شمارای نامتناهی ومجزای مجموعهٔ N هستند، و اجتماع آنها N است. درنتیجه، بنابرتعریف ۲،

$$\begin{aligned} \aleph_0+\aleph_0 &=\operatorname{card} N_e+\operatorname{card} N_o\\ &=\operatorname{card}(N_e\cup N_o)\\ &=\operatorname{card} N\\ &=\aleph_0 \end{aligned}$$

نتیجهٔ مثال ۳ یك ویژگی اختصاصی اعداد اصلی ترامتناهی است؛ زیـرا در اعداد اصلی متناهی $n+m=n$ تنها به‌ازای $m=0$ راست است. تـوصیه مـی‌شود خواننده به‌عنوان تمرین ثابت کند که $c+c=c$.

مثال ۴. مجموع اصلی $\aleph_0+c$ را بیابید.

حل: درمثال ۳، بخش ۲، فصل ۵ دیدیم کـه فاصلهٔ باز $(0, 1)$ و مجموعهٔ اعداد

حقیقی $\mathbf{R}$ همتوان هستند. از این‌رو $\operatorname{card}(0,1)=\operatorname{card}\mathbf{R}=c$. می‌نویسیم $S=\mathbf{N}\cup(0,1)$. آنگاه چون $\mathbf{N}$ و $(0,1)$ مجزا هستند، $\operatorname{card}S=\aleph_0+c$. از طرف دیگر، چون $S\subset(0,1)\sim\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}\subset S\sim S$*، بنا بر قضیهٔ شرودر-برنشتاین (قضیهٔ ۱)، داریم $S\sim\mathbf{R}$. بنابراین $\aleph_0+c=c$.

تمرین ۶.۴

۱. ثابت کنید که برای هرعدد اصلی x، $x+0=x$.

۲. گیریم x و y اعدادی اصلی هستند. ثابت کنید که $x+y=y+x$.

۳. گیریم x، y، و z اعدادی‌اصلی‌هستند. ثابت کنید که $(x+y)+z=x+(y+z)$.

۴. گیریم n عدد اصلی متناهی دلخواهی است. ثابت کنید

(الف) $n+\aleph_0=\aleph_0$

(ب) $n+c=c$.

۵. ثابت کنید که $c+c=c$.

۶. گیریم x، y، و z اعدادی اصلی هستند

(الف) ثابت کنید که اگر $x\leqslant y$ آنگاه $x+z\leqslant y+z$

(ب) با یک مثال نشان دهید که اگر در قسمت (الف) به‌جای «$\leqslant$» نماد «$<$» گذاشته شود، حکم الف درست نیست.

۷. گیریم x، y، و z اعداد اصلی هستند. ثابت کنید که اگر $x=y$ آنگاه $x+z=y+z$.

۸. با یک مثال نقیض نشان دهید که عکس مسئلهٔ ۷ بالا درست نیست.

۹. ثابت کنید که برای هرمجموعهٔ A و B،

$$\operatorname{card}A+\operatorname{card}B=\operatorname{card}(A\cup B)+\operatorname{card}(A\cap B)$$

۱۰. ثابت کنید که اگر a یک عدد اصلی ترامتناهی باشد، آنگاه $a=1+a$. [راهنمایی: ازقضیهٔ شرودر-برنشتاین استفاده کنید.]

۱۱. ثابت کنید که اگر n یک عدداصلی متناهی، و a یک عدد اصلی ترامتناهی‌باشد، آنگاه $a+n=a$.

۱۲. عکس مسئلهٔ ۱۱ بالا را ثابت کنید.

۵. ضرب اعداد اصلی

اکنون ضرب اعداد اصلی را به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که نتیجه در مورد اعداد اصلی متناهی، با ضرب معمولی اعداد صحیح نامنفی مطابقت داشته‌باشد.

---

* $S\subset(0,1)\sim\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}\subset S\sim S$ به‌ترتیب خلاصهٔ $(0,1)\subset S$، $\mathbf{R}\sim(0,1)$ و $S\sim S$، $S\subset\mathbf{R}$ هستند.-م.

تعریف ۳. برای هر دوعدد اصلی a و b، حاصلضرب اصلی ab، عدد اصلی حاصلضرب دکارتی $A\times B$ تعریف شده‌است، که در آن $\operatorname{card} A=a$ و $\operatorname{card} B=b$.

برای اینکه ببینیم تعریف ۳ مستقل از انتخاب مجموعه‌های A و B است، مجموعه‌های X و Y را به‌قسمی می‌گیریم که $A\sim X$ و $B\sim Y$. آنگاه بنابر قضیهٔ ۷ فصل ۵ $A\times B\sim X\times Y$ و از این‌رو $\operatorname{card}(A\times B)=\operatorname{card}(X\times Y)$. همچنین آشکار است که با این تعریف، هنگامی که a و b اعداد اصلی متناهی هستند، جواب درست به‌دست می‌آید. چون همگی باضرب اعداد صحیح نامنفی آشنا هستیم، توجه ما به‌حاصلضرب اعداد اصلی ترامتناهی و حاصلضرب یك عدد اصلی متناهی در یك عدد اصلی ترامتناهی است. نخست به‌چند نتیجهٔ سادهٔ تعریف ۳ می‌پردازیم.

قضیهٔ ۵. گیریم x، y، و z اعداد اصلی دلخواه باشند. آنگاه

(الف) $xy=yx$ (جابه‌جایی).

(ب) $(xy)z=x(yz)$ (شرکتپذیری).

(ج) $x(y+z)=xy+xz$ (پخشپذیری).

برهان. به‌عنوان تمرین ازخواننده خواسته شده است.

مثال ۵. گیریم x یك عدد اصلی دلخواه است. مقادیر زیر را به‌دست آورید.

(الف) $1x$

(ب) $0x$

(ج) $\aleph_0\aleph_0$.

حل: گیریم مجموعهٔ A به‌قسمی است که $\operatorname{card} A=x$.

(الف) چون حاصلضرب دکارتی $A\times\{1\}$ با مجموعهٔ A همتوان است، داریم $1x=x$.

(ب) چون $\varnothing\times A=\varnothing$، داریم $0x=0$.

(ج) چون $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\sim\mathbf{N}$ (قضیهٔ ۱۰، فصل ۵)، داریم $\aleph_0\aleph_0=\aleph_0$.

مثال ۶. ثابت کنید $cc=c$، که در آن $\operatorname{card}\mathbf{R}=c$.

برهان. چون مجموعهٔ $\mathbf{R}$ و فاصلهٔ یکهٔ باز $(0,1)$ از اعداد حقیقی، یك عدد اصلی c دارند، برای اثبات $cc\leqslant c$، کافی‌است نشان داده شود که یك انژکسیون ازحاصلضرب دکارتی $(0,1)\times(0,1)$ به‌فاصلهٔ $(0,1)$ وجود دارد. برای این‌منظور هر $x\in(0,1)$ را با بسط اعشاری نامتناهی‌اش نشان می‌دهیم. مثلاً، عدد $1/2$ را با $0.4999\ldots$ نشان می‌دهیم و نه با 0.5. به‌این‌ترتیب هرعدد در $(0,1)$ یك بسط یکتا دارد. اکنون به‌عهدهٔ خواننده است تحقیق کند که تابع $f:(0,1)\times(0,1)\to(0,1)$ که با

$$f(0/x_1x_2x_3\cdots,\ 0/y_1y_2y_3\cdots)=0/x_1y_1x_2y_2\cdots$$

تعریف می‌شود، انژکتیو است. پس برهان $cc\leqslant c$ کامل است. اثبات $cc\geqslant c$ به خواننده واگذار می‌شود.

تمرین ۵.۶

۱. قضیهٔ ۵ را ثابت کنید.

۲. گیریم اعداد اصلی x ، y، و z به‌قسمی هستند که $x\leqslant y$. ثابت کنید که $xz\leqslant yz$.

۳. گزارهٔ زیر را ثابت یا رد کنید: اگر اعداد اصلی x ، y، و z به‌قسمی باشند که $x<y$ و $z\neq 0$ ، آنگاه $xz<yz$.

۴. گیریم n یك عدد اصلی متناهی است. ثابت کنید که اگر $n\neq 0$ ، آنگاه $n\aleph_0=\aleph_0$.

۵. گیریم x و y اعداد اصلی هستند. ثابت کنید که

(الف) اگر $xy=0$ آنگاه $x=0$ یا $y=0$.

(ب) اگر $xy=1$ آنگاه $x=1$ و $y=1$.

۶. نشان دهید که تابع $f:(0,1)\times(0,1)\rightarrow(0,1)$ که در برهان مثال ۶ با

$$f(0/x_1x_2x_3\cdots,\ 0/y_1y_2y_3\cdots)=0/x_1y_1x_2y_2\cdots$$

تعریف شده‌است، سورژکتیو نیست.

۷. ثابت کنید که اگر x یك عدد اصلی و n یك عدد اصلی متناهی باشد، آنگاه

$nx=x+x+\cdots+x$ (n بار).

۸. گیریم x ، y، و z اعداد اصلی هستند. ثابت کنید که اگر $x=y$ آنگاه $xz=yz$.

۹. با آوردن مثال نقیض ثابت کنید که عکس مسئلهٔ ۸، مسئلهٔ قبل، درست نیست.

۶. توان اعداد اصلی

گیریم a و b اعداد اصلی متناهی یا ترامتناهی هستند. برای اینکه b^a (بخوانید: توان a ام b) را به‌صورتی جامع تعریف کنیم، نخست حالت متناهی $2\cdot2\cdot2=2^3$، و به‌طور کلی $n^m=nn\cdots n$ (m بار) را بررسی می‌کنیم. می‌توانستیم این مفهوم را به کمك «حاصلضربهای دکارتی تعمیم‌یافته» به حالت ترامتناهی تعمیم دهیم، اما روشی وجود دارد که در آن به‌حاصلضربهای دکارتی تعمیم یافته نیازی نیست. گیریم A یك مجموعهٔ m عنصری و B یك مجموعهٔ n عنصری باشد چند تابع از A به B وجود دارد (به‌مسئلهٔ ۱۱، تمرین ۴.۳ رجوع کنید)؟ چون برای هرعنصر A، می‌توان n نگاره انتخاب کرد و این انتخاب نگاره را می‌توان برای هریك از m عنصر A، مستقل از انتخاب نگاره‌ها برای دیگر عنصرهای A انجام داد، به‌جواب $nn\cdots n=n^m$ می‌رسیم. این مفهوم به صورت زیر تعمیم می‌یابد.

تعریف ۴. گیریم a و b دوعدد اصلی با شرط $a \neq 0$ هستند. گیریم A و B مجموعه‌هایی هستند با اعداد اصلی $\operatorname{card} A = a$ و $\operatorname{card} B = b$. مجموعهٔ تمام‌توابع از A به B را با B^A نشان می‌دهیم. تعریف می‌کنیم $b^a = \operatorname{card} B^A$.

برای اینکه بتوانیم تعریف ۴ را بپذیریم، لازم است تحقیق‌کنیم‌که تعریف ۴ مستقل از مجموعه‌های انتخاب شدهٔ A و B است. قضیهٔ زیر این‌نیاز را برآورده می‌کند.

قضیهٔ ۶. گیریم مجموعه‌های A، B، X، و Y به‌گونه‌ای باشندکه $A \sim X$، $B \sim Y$. آنگاه $B^A \sim Y^X$.

برهان. گیریم $g : A \sim X$ و $h : B \sim Y$ بیژکسیون هستند، آنگاه تابع

$$\psi : B^A \to Y^X$$

را با $\psi(f) : X \to Y$، که در آن برای هر $f \in B^A$، $\psi(f)(x) = h \circ f \circ g^{-1}(x)$، تعریف می‌کنیم.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, dashed, "\psi(f)"'] & Y \end{tikzcd}$$

به‌خواننده واگذار می‌کنیم ثابت‌کندکه تابع $\psi : B^A \to Y^X$ بیژکتیو است.

مثال ۷. گیریم A یك مجموعه است. اعداد اصلی $\operatorname{card} \mathcal{P}(A)$, $2^{\operatorname{card} A}$ را باهم مقایسه کنید.

حل. گیریم $B = \{0, 1\}$. به‌هرزیرمجموعهٔ A مانند D، تابع مشخصهٔ $\chi_D : A \to B$ راکه در مثال ۸، فصل ۳ تعریف شد، نظیر می‌کنیم. تابع از $\mathcal{P}(A)$ به B^A که D را به χ_D می‌فرستد، بیژکتیو است (ثابت‌کنید). بنابراین مجموعه‌های $\mathcal{P}(A)$ و B^A یك عدد اصلی دارند؛ یعنی $\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = \operatorname{card} B^A = 2^{\operatorname{card} A}$.

قضیهٔ ۷. گیریم a، x، و y اعداد اصلی هستند. آنگاه $a^x a^y = a^{x+y}$.

برهان. گیریم مجموعه‌های A، X، و Y به‌گونه‌ای هستند که $\operatorname{card} A = a$، $\operatorname{card} X = x$، $\operatorname{card} Y = y$، و $X \cap Y = \varnothing$. آنگاه بنابر تعریف ۲، $\operatorname{card}(X \cup Y) = x + y$. برای تکمیل برهان، کافی است نشان داده شودکه مجموعه‌های $A^X \times A^Y$ و $A^{X \cup Y}$ همتوان هستند. برای این منظور به‌هرجفت تابع (f, g)، $f \in A^X$ و $g \in A^Y$، تابع $f \cup g \in A^{X \cup Y}$ را نظیر می‌کنیم [قضیهٔ ۸ فصل ۳ را ببینید]. به‌عهدهٔ خواننده

است تحقیق کند که این تناظر یك همتوانی بین مجموعه‌های $A^{X\cup Y}$ و $A^X \times A^Y$ برقرار می‌کند. از این‌رو، $a^x a^y = a^{x+y}$.

قضیهٔ ۸. گیریم x، y، و z اعدادی اصلی هستند. آنگاه $(z^y)^x = z^{yx}$.

برهان. گیریم X، Y، و Z مجموعه‌هایی باشند که اعداد اصلی آنها به‌ترتیب x، y، و z هستند. مطابق با تعریف ۴، قضیه ثابت می‌شود اگر نشان دهیم $(Z^Y)^X \sim Z^{Y\times X}$. قبل از نشان دادن این همتوانی، نخست به‌یك نماد قراردادی نیازمندیم: برای هر تابع مفروض $f: Y\times X \to Z$ و هر عنصر مفروض $a\in X$، یك تابع $f^a: Y \to Z$ وجود دارد که به‌ازای هر $b\in Y$، با $f^a(b) = f(b, a)$ تعریف می‌شود. به‌خواننده واگذار می‌کنیم نشان دهد که اگر تابع $e_f \in (Z^Y)^X$ به‌ازای هر $a\in X$ با $e_f(a) = f^a$ تعریف شود، آنگاه تابع $\psi: Z^{Y\times X} \to (Z^Y)^X$ که به‌هر $f\in Z^{Y\times X}$ تابع $e_f \in (Z^Y)^X$ را نظیر می‌کند، یك بیژکسیون است.

یادآوری می‌شود که A-تصویر $p_A: A\times B \to A$ تابعی است که به‌هر جفت مرتب $(a, b)\in A\times B$، a را نظیر می‌کند و B-تصویر $p_B: A\times B \to B$ نیز به‌طریق مشابه تعریف می‌شود [به‌مسئلهٔ ۸، تمرین ۵.۳ نگاه کنید].

قضیهٔ ۹. گیریم a، b، و x اعدادی اصلی هستند آنگاه $(ab)^x = a^x b^x$.

برهان. گیریم اعداد اصلی مجموعه‌های A، B، و X به‌ترتیب a، b و x هستند. تابع $\psi: (A\times B)^X \to A^X\times B^X$ که هر $f: X\to A\times B$ را با تابع $(p_A\circ f, p_B\circ f)$ در $A^X\times B^X$ نظیر می‌کند، بیژکتیو است (ثابت کنید). از این‌رو بنابر تعریف ۴، $(ab)^x = a^x b^x$.

یادآوری می‌شود که اعداد اصلی مجموعه‌های $\mathbf{N}$ و $\mathbf{R}$ را به‌ترتیب با نمادهای $\aleph_0$ و c نشان می‌دهند و $\mathbf{N}\sim\mathbf{Q}$ (مثال ۵، فصل ۵ را ببینید) و $\mathbf{R}\sim(0, 1)$ (مثال ۳، فصل ۵ را ببینید). پس $\aleph_0$ عدد اصلی $\mathbf{Q}$ و c عدد اصلی فاصلهٔ $(0, 1)$ است.

قضیهٔ ۱۰. $c = 2^{\aleph_0}$.

برهان. برای اثبات این قضیه نخست نشان می‌دهیم که $c \leqslant 2^{\aleph_0}$ و سپس به‌اثبات $2^{\aleph_0} \leqslant c$ می‌پردازیم. تابع $f: \mathbf{R} \to \mathcal{P}(\mathbf{Q})$ را که با

$$f(a) = \{x\in\mathbf{Q} \mid x < a\} \qquad \text{برای هر } a\in\mathbf{R}$$

تعریف شده‌است در نظر بگیرید. این تابع انژکتیو است: اگر $a < b$ دو عدد حقیقی متمایز باشند، آنگاه یك عدد گویای r وجود دارد به‌گونه‌ای که $a < r < b$.[1] آنگاه $r\in f(b)$ ولی $r\notin f(a)$، بنابراین f انژکتیو است. حال از نتایج مسئلهٔ ۳، تمرین ۶.۲، و مثال ۷،

۱. زیرا اعداد گویا یك زیرمجموعهٔ متراکم اعداد حقیقی هستند.

به‌دست می‌آید که

$$c \leqslant \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbf{Q}) = ۲^{\aleph_0}$$

برای اثبات نامساوی در جهت دیگر، فرض کنید $\psi: \{0, 1\}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$ تابعی باشد که با

$$\psi(f) = 0.f(1)f(2)f(3)\ldots$$

که در آن $f \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$، تعریف شده‌است. توجه کنید که $\psi(f)$ یك عدد اعشاری (متشکل از صفرها و یکها) است. اگر $f, g \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ و $f \neq g$، آنگاه $\psi(f) \neq \psi(g)$، زیرا رقمهای اعشاری $\psi(f)$ و $\psi(g)$ متمایزهستند*. بنابراین $\psi: \{0, 1\}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$ انژکتیو است، و بنابراین $۲^{\aleph_0} \leqslant c$.

نتیجه. $\aleph_0 < c$.

برهان. بنابرقضیهٔ کانتور (قضیهٔ ۲) و نتیجهٔ مثال ۷ داریم

$$\aleph_0 < \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbf{N}) = ۲^{\operatorname{card} \mathbf{N}} = ۲^{\aleph_0} = c$$

تمرین ۶.۶

۱. ثابت کنید که در برهان قضیهٔ ۶، تابع $\psi: B^A \to Y^X$ بیژکتیو است.

۲. گیریم a یك عدد اصلی اختیاری است. ثابت کنید که $a^0 = 1$، $a^1 = a$، $1^a = 1$، و $0^a = 0$ اگر $a \neq 0$.

۳. نشان دهید که برای هرعدد اصلی a، $a < ۲^a$.

۴. گیریم اعداد اصلی a، b، x، و y به‌گونه‌ای هستند که $a \leqslant b$ و $0 < x \leqslant y$. ثابت کنید که $a^x \leqslant b^y$.

۵. ثابت کنید که برای هرعدد متناهی $n \geqslant ۲$، $\aleph_0^{\aleph_0} = c = n^{\aleph_0}$.

۶. ثابت کنید که برای هرعدد متناهی $n \geqslant 1$، $c^n = c = c^{\aleph_0}$.

۷. گیریم C مجموعهٔ تمام اعداد مختلط است. ثابت کنید که $\operatorname{card} C = c$.

۸. ثابت کنید که $\aleph_0 c = c$.

۹. ثابت کنید که تابع از $\mathcal{P}(A)$ به $\{0, 1\}^A$ که هر D در $\mathcal{P}(A)$ را به χ_D می‌برد، بیژکتیو است.

۱۰. مجموعهٔ A ودومجموعهٔ مجزای X و Y مفروض‌اند. ثابت کنید که تابع از $A^X \times A^Y$ به $A^{X \cup Y}$ که هر (f, g) در $A^X \times A^Y$ را به $f \cup g$ در $A^{X \cup Y}$ می‌برد، بیژکتیو است.

۱۱. ثابت کنید که در برهان قضیهٔ ۸، تابع $\psi: Z^{Y \times X} \to (Z^Y)^X$ بیژکتیو است.

۱۲. ثابت کنید که در برهان قضیهٔ ۹، تابع $\psi: (A \times B)^X \to A^X \times B^X$ بیژکتیو است.

* چون $f \neq g$ حداقل یك $n \in \mathbf{N}$ وجود دارد به‌طوری که $f(n) \neq g(n)$ که نتیجه می‌دهد $\psi(f) \neq \psi(g)$. منظور از جملهٔ بالا همین است، نه اینکه الزاماً $f(1)$، $f(2)$، ... به‌ترتیب از $g(1)$، $g(2)$، ... متمایز هستند. ـم.

۷. چند مثال دیگر از حساب اعداد اصلی

در مثال ۶، مستقیماً ثابت کردیم که $cc=c$. حال با استفاده از قضیهٔ ۱۰، که حکم می‌کند $c=۲^{\aleph_0}$، یك برهان کوتاهتر ارائه می‌دهیم.

مثال ۸. با استفاده از قضیهٔ ۱۰ ثابت کنید که $cc=c$ [مثال ۶ را ببینید].

برهان. از قضیهٔ ۷ و ۱۰ و مثال ۳، $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$، نتیجه می‌شود که

$$cc=۲^{\aleph_0}۲^{\aleph_0}=۲^{\aleph_0+\aleph_0}=۲^{\aleph_0}=c$$

مثال ۹. عدد اصلی $\{f|f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\}$، مجموعهٔ تمام توابع $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$، را با عدد اصلی $\mathbf{R}$، یعنی c، مقایسه کنید.

حل: داریم

$\operatorname{card}\{f\|f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\}=c^c$	تعریف ۴
$=(۲^{\aleph_0})^c$	قضیهٔ ۱۰
$=۲^{\aleph_0 c}$	قضیهٔ ۸
$=۲^c$	مسئلهٔ ۸، تمرین ۶.۶
$>c$	مثال ۷، قضیهٔ ۲

بنابراین، $\operatorname{card}\{f|f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\}>\operatorname{card}\mathbf{R}$.

مثال ۱۰. گیریم $C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ و $C(\mathbf{Q},\mathbf{R})$ مجموعه‌های تمام توابع حقیقی پیوسته با حوزهٔ $\mathbf{R}$ و با حوزهٔ $\mathbf{Q}$ هستند. گیریم $K(\mathbf{R},\mathbf{R})$ مجموعهٔ تمام توابع حقیقی ثابت با حوزهٔ $\mathbf{R}$ است. ثابت کنید که

$$\operatorname{card}C(\mathbf{R},\mathbf{R})=\operatorname{card}C(\mathbf{Q},\mathbf{R})=\operatorname{card}K(\mathbf{R},\mathbf{R})=c$$

برهان[1]. به هر تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، تابع $f|\mathbf{Q}:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$ که با $(f|\mathbf{Q})(x)=f(x)$ برای هر $x\in\mathbf{Q}$ تعریف می‌شود، نظیر می‌شود. تابع $f|\mathbf{Q}$ تحدید f به $\mathbf{Q}$ نامیده می‌شود. از این‌رو، تابع طبیعی*

$$\psi:C(\mathbf{R},\mathbf{R})\to C(\mathbf{Q},\mathbf{R})$$

---

۱. اگر معلم مایل باشد، می‌تواند برهان را حذف کند.

* هر تابع از $(\mathbf{R},\mathbf{R})$ به $(\mathbf{Q},\mathbf{R})$ به هر عنصر $C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ یك عنصر $C(\mathbf{Q},\mathbf{R})$ را نظیر می‌کند؛ ψ ساده‌ترین تابع از $C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ به $C(\mathbf{Q},\mathbf{R})$ است و طبیعی است که $f|\mathbf{Q}$ را نظیر f بگیریم، از این‌رو مؤلف ψ را تابع طبیعی می‌نامد.ـم.

وجود دارد که هر تابع $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ را به $f|\mathbf{Q}$، تحدید f روی $\mathbf{Q}$، نظیر می‌کند. بدیهی است که تحدید تابع پیوسته، پیوسته است. بنابراین $\psi: C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to C(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ یك تابع خوش‌تعریف است*.

از اینکه اعداد گویا در اعداد حقیقی متراکم است؛ نتیجه می‌شود که برای هرعدد حقیقی x یك دنبالهٔ اعدادگویا، مانند $\{x_n | n \in \mathbf{N}\}$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

درنتیجه، اگر دوتابع پیوستهٔ $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ این ویژگی‌را داشته باشندکه برای هر $x' \in \mathbf{Q}$، $f(x') = g(x')$، آنگاه‌برای هر $x \in \mathbf{R}$، $f(x) = g(x)$. به‌عبارت‌دیگر، تابع $\psi: C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to C(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ انژکتیو است. پس، بنابرقضیه‌های ۸ و ۱۰ داریم

$$\begin{aligned}\operatorname{card} C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) &\leqslant \operatorname{card} C(\mathbf{Q}, \mathbf{R})\\ &\leqslant \operatorname{card} \mathbf{R}^{\mathbf{Q}}\\ &= c^{\aleph_0}\\ &= (۲^{\aleph_0})^{\aleph_0}\\ &= ۲^{(\aleph_0 \aleph_0)}\\ &= ۲^{\aleph_0}\\ &= c\end{aligned}$$

حال، $K(\mathbf{R}, \mathbf{R})$، مجموعهٔ تمام توابع‌حقیقی ثابت باحوزهٔ $\mathbf{R}$، را درنظر بگیرید. چون برای هرعدد حقیقی a، یك تابع ثابت $f_a: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ که با $f_a(\mathbf{R}) = \{a\}$ تعریف می‌شود، وجود دارد، داریم

$$\operatorname{card} K(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = c$$

چون هر تابع ثابت $f_a: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ پیوسته است، داریم $K(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \subset C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. بنابراین

$$c = \operatorname{card} K(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \leqslant \operatorname{card} C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

که اگر با نامساوی آخر که در پاراگراف قبلی به‌دست‌آمد ترکیب شود، نتیجه می‌دهد

$$c = \operatorname{card} K(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \leqslant \operatorname{card} C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \leqslant \operatorname{card} C(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) \leqslant c$$

* برای اینکه تعریف ψ با معنی باشد، یا به‌عبارت دیگر ψ خوش‌تعریف باشد، لازم است که $f|\mathbf{Q} \in (\mathbf{Q}, \mathbf{R})$، یعنی $f|\mathbf{Q}$ پیوسته باشد.ـم.

به این ترتیب برهان اینکه $\operatorname{card} C(\mathbf{Q},\mathbf{R})$، $\operatorname{card} C(\mathbf{R},\mathbf{R})$، و $\operatorname{card} K(\mathbf{R},\mathbf{R})$ مساوی با c هستند، کامل است.

از مثال ۱۰ نتیجه می‌شود که تابعهای ثابت به «زیادی» تابعهای پیوسته هستند. این یك نشانهٔ دیگر از ویژگیهای جالب مجموعه‌های نامتناهی است.

مثال ۱۱. عدد اصلی $D(\mathbf{R},\mathbf{R})$، مجموعهٔ تمام تابعهای حقیقی مشتقپذیر از یك متغیر حقیقی را بیابید.

حل: چون هر تابع ثابت، مشتقپذیر است و هر تابع مشتقپذیر پیوسته است، داریم

$$K(\mathbf{R},\mathbf{R})\subseteq D(\mathbf{R},\mathbf{R})\subseteq C(\mathbf{R},\mathbf{R})$$

بنا بر مثال ۱۰، داریم

$$c=\operatorname{card} K(\mathbf{R},\mathbf{R})\leqslant \operatorname{card} D(\mathbf{R},\mathbf{R})\leqslant \operatorname{card} C(\mathbf{R},\mathbf{R})=c$$

بنابراین، $\operatorname{card} D(\mathbf{R},\mathbf{R})=c$.

تمرین ۷.۶

۱. نشان دهید که درفضای n-بعدی (n عامل ضرب) $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$ «همان اندازه» نقطه است که درفاصلهٔ باز یکهٔ $(0,1)$.

۲. فضای هیلبرت کلاسیك از تمام دنباله‌های نامتناهی‌اعداد حقیقی $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$، به‌نام نقطه، کـه در آن سری $\cdots+x_1^2+x_2^2+x_3^2$ همگرا است، تشکیل شده‌است. نشان دهید که تعداد نقاط فضای هیلبرت کلاسیك «به اندازهٔ» نقطه‌های خط حقیقی $\mathbf{R}$ است.

۳. $\mathbf{R}^{\aleph_0}$، مجموعهٔ تمام دنباله‌هـای نـامتناهی اعداد حقیقی $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$، کـه نقطه‌های فضای $\mathbf{R}^{\aleph_0}$ نـامیده می‌شوند، مفروض است. یك نقطهٔ مشبکه‌ای در $\mathbf{R}^{\aleph_0}$، نقطهٔ $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ است که در آن تمام x_kها عدد صحیح هستند. نشان دهید که تعداد نقاط فضای $\mathbf{R}^{\aleph_0}$ «به اندازهٔ» تعداد تمام نقاط مشبکه‌ای در $\mathbf{R}^{\aleph_0}$ است.

۴. نشان دهید که تعداد توابع یك متغیرهٔ حقیقی کـه فقط مقادیر ۰ و ۱ را اختیار می‌کنند «به اندازهٔ» تعداد تمام توابع حقیقی n متغیرهٔ حقیقی است؛ n یك عدد طبیعی است.

۵. گیریم عدد اصلی $\{f\,|\,f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\}$، مجموعهٔ تمام توابع یك متغیره با $\mathfrak{f}$ نشان داده شده است. نشان دهید که برای هر $n\in\mathbf{N}$،

$$\mathfrak{f}^n=\mathfrak{f}^{\aleph_0}=\mathfrak{f}^c=\mathfrak{f}.$$

۸. فرضیهٔ پیوستار و تعمیم آن

چون هرمجموعهٔ نامتناهی‌شامل یك زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی‌است (قضیهٔ ۱۱، فصل ۵)،

عدد اصلی $\aleph_0$ کوچکترین عدد اصلی ترامتناهی است. درحدود سال ۱۸۸۰ کانتور سؤال مهمی که به‌مسئلهٔ پیوستار مشهور است، مطرح کرد: آیاعددی اصلی بین $\aleph_0$ و $(=c)\ 2^{\aleph_0}$ وجود دارد؟ به‌زبان مجموعه‌ها، آیا هیچ زیرمجموعهٔ نامتناهی‌ناشمارای $\mathbf{R}$ وجود داردکه عدد اصلی‌اش ازعدد اصلی $\mathbf{R}$ کوچکتر باشد؟ کوشش‌کانتور و بسیاری‌دیگر از ریاضیدانان برجستهٔ آن زمان درحل این مسئله به‌نتیجه نرسید. چون در هیچ جـای ریاضیات کلاسیك به‌چنین مجموعه‌ای برنخورده بودند و به‌نظر می‌رسید راهی بـرای پیدا کردن آن وجود ندارد، کانتور و دیگران معتقد شدند که جواب مسئلهٔ پیوستار بـاید منفی باشد. این اعتقاد به‌عنوان فرضیهٔ پیوستار مشهور شده‌است.

فرضیهٔ پیوستار. عدد اصلی مانند x که در $\aleph_0 < x < c\,(=2^{\aleph_0})$ صدق کند، وجود ندارد.

پـرسشی‌کـه در زیر می‌آید بسیار به مسئلهٔ پیوستار نزدیك است و معمولاً آن را مسئلهٔ پیوستار تعمیم یافته می‌نامند: آیـا عـددی اصلی وجود داردکـه بین دوعدد اصلی ترامتناهی a و 2^a واقع باشد؟ به این سؤال نیز جـواب داده نشده‌است. این اعتقاد کـه چنین‌عددی اصلی وجود ندارد فرضیهٔ پیوستار تعمیم یافته نامیده می‌شود.

فرضیهٔ پیوستار تعمیم‌یافته. عدد اصلی‌ترامتناهی a هرچه‌باشد، عددی اصلی مانند x وجود ندارد به‌گونه‌ای که $a < x < 2^a$.

دیری‌نپایید که درسال ۱۹۰۰، درکنگرهٔ بین‌المللی‌ریاضیدانان درپاریس، ریاضیدان بزرگ آلمانی داوید هیلبرت[1] (۱۸۶۲–۱۹۴۳) فهرستی از ۲۳ مسئلهٔ مهم ریـاضی حل نشده را عرضه‌کرد، که اولین‌آنها مسئلهٔ پیوستار بود. هیچ پیشرفتی درحل این‌مسئله حاصل نشد تا اینکه درسال ۱۹۳۸ کورت‌گودل[2] (۱۹۰۶–۱۹۷۸) منطق‌دان برجستهٔ قرن، ثابت

---

۱. ریاضیدان برجستهٔ همهٔ ادوار، داوید هیلبرت (David Hilbert, 1862-1943)، استاد ریاضیات دانشگاه گوتینگن‌آلمان (۱۸۹۵–۱۹۴۳) بود. او برتمام دنیای ریـاضیات جدید، از جبر قرن نوزدهم تا منطق جدید و فیزیك ریاضی، تأثیرگذاشت. فضای مشهور هیلبرت از جمله‌کارهای تحقیقاتی فراوان اوست. هیلبرت براین عقیده بودکه تمام ایده‌های ریاضی به‌طور هماهنگ با یکدیگر سازگارند.

۲. کورت‌گودل (Kurt Gödel, 1906-1978) از انستیتوی مطالعات عـالی پـرینستون در نیوجرزی، درچکوسلواکی متولـد شد. نخست در ۲۵ سالگی شهرت جهانی یـافت. محققان برجسته‌ای چـون برتراندراسل (۱۸۷۲–۱۹۷۰) و آلفرد نورث وایتهد (۱۸۶۱–۱۹۴۷) به‌نظرشان رسیده بودکه راهنماهایی مطلق برای‌درستی‌یا نادرستی‌گزاره‌های‌معین ریاضی‌وجود دارد. گودل با اثبات اینکه آنچه راسل و وایتهد جستجو می‌کنند وجود ندارد، جهان را تکان داد. از جمله کارهای عمدهٔ دیگر او اثبات تمامیت منطق تسویر و اثبات سازگار بودن فـرض پیوستار تعمیم‌یافته و اصل انتخاب است.

کرد که اگر فرض پیوستار تعمیم‌یافته به‌اصول موضوع رایج نظریهٔ مجموعه‌ها افزوده شود، آنگاه هر تناقضی که امکان داشته‌باشد به‌وسیلهٔ این دستگاه اصول موضوعی به‌دست آید، ممکن است به‌صورت تناقضی بیان شود که از اصول موضوع قبلی (بدون اینکه فرض پیوستار تعمیم‌یافته به‌آنها اضافه شده‌باشد) نتیجه می‌شود[1]. به‌عبارت دیگر، فرض پیوستار تعمیم‌یافته نسبت به‌اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است.

بالاخره، در ۱۹۶۳، ریاضیدان جوان پل کوهن* (۱۹۳۴—   ) از دانشگاه استانفورد کشف مهمی کرد. او نشان داد که فرض پیوستار تعمیم‌یافته به‌وسیلهٔ اصول موضوع متعارفی نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات شدنی نیست. بنابراین، وضع فرض پیوستار تعمیم‌یافته در نظریهٔ مجموعه‌ها، همانند اصل موضوع توازی اقلیدس (اصل پنجم) در هندسه است. می‌توانیم آنها را بپذیریم یا رد کنیم و در هر حالت یک تئوری سازگار ریاضی به‌دست آوریم.

---

۱. کتاب زیر را ببینید

K. Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of set Theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1940, 66 pp. Rov. ed., 1951, 74 pp.

* Paul J. Cohen

۷

اصل انتخاب و برخی از صورتهای هم‌ارز آن

اصل انتخاب و سه اصل هم‌ارز دیگر آن که کاربردهـای فراوانی دارند ــ اصل ماکسیمال هاوسدورف*، لم‌تسورن** و اصل خوشترتیبی‌تسرملو*** ــ را معرفی‌کرده‌ایم. دریك‌دور زنجیره‌ای از استنتاجها ثابت کرده‌ایم که اصل انتخاب و این سه‌اصل ریاضی مهم منطقاًهم‌ارز هستند. اصل استقرای ترامتناهی همراه با شرحی از چگونگی‌کاربرد این استقرا در برهانهای ریاضی را آورده‌ایم. بـا یك مبحث کوتاه تاریخی در بارهٔ اصل انتخاب، فصل را به‌پایان برده‌ایم.

۱. مقدمه

فرض‌کنیدکه شما وارد یك مغازهٔ میوه فروشی‌شده‌ایدکه تعدادی سبد (غیر تهی) میوه دارد. اگر ازشما بخواهندکه از هرسبد یك میوه (وفقط یکی) انتخاب‌کنید، برای‌شما کارمشکلی نیست. اما سؤال مشابه زیر، کـه در نگاه اول ممکن است بدیهی به‌نظر برسد، در حقیقت پیچیده است:

---

* Hausdorff maximality principle   ** Zorn's lemma

*** well-ordering principle of Zermelo

یك مجموعهٔ غیرتهی $\mathcal{S}$ که عناصرش مجموعه‌های غیرتهی مجزای S_α هستند داده شده است، آیا مجموعه‌ای مانند R وجود دارد که عنصرهایش تشکیل شده باشند از یك x_α از هر S_α؟

مشکل اصلی وقتی پیش می‌آید که $\mathcal{S}$ نامتناهی باشد. کوششهای ارنست تسرملو (۱۸۷۱–۱۹۵۳)، و دیگران در اوایل قرن بیستم برای پاسخ به این سؤال به نتیجه نرسید. تسرملو احساس کرد که این سؤال احتمالاً حل شدنی نیست و تنها راه رهایی از مشکل، مسلم دانستن اصل موضوعی است که از آن زمان به اصل انتخاب معروف شده است. این اصل را به‌صورت کلی‌اش برحسب تابعها، بیان می‌کنیم:

اصل انتخاب. برای هر مجموعهٔ غیرتهی $\mathcal{S}$ که عنصرهایش مجموعه‌های غیرتهی هستند، یك تابع $f:\mathcal{S}\to\bigcup_{A\in\mathcal{S}}A$ به‌نام تابع انتخاب وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $A\in\mathcal{S}$، $f(A)\in A$.

استفاده از اصل انتخاب اکنون برای اثبات بسیاری از نتایج مهم در شاخه‌های گوناگون ریاضیات ضروری است. درحقیقت، در اثبات قضیهٔ ۱۱ فصل ۵، اصل انتخاب به‌صورتی پنهانی به‌کار رفته‌است.

پس‌از آن ریاضیدانان چند اصل دیگر کشف کردند که اغلب می‌توان آنها را به‌جای اصل انتخاب به‌کار برد. این اصول، اگرچه به‌ظاهر هیچ شباهتی به اصل انتخاب ندارند، اما به‌زودی اثبات شد که با اصل انتخاب هم‌ارز هستند. برای درك بعضی از این اصول و ارتباط آنها با اصل انتخاب، به‌چند تعریف نیازمندیم:

تعریف ۱. رابطهٔ $\leqslant$ روی مجموعهٔ A، رابطهٔ ترتیبی جزئی گفته می‌شود اگر و تنها اگر رابطهٔ $\leqslant$ روی A انعکاسی و متعدی و پادمتقارن (یعنی اگر $a\leqslant b$ و $b\leqslant a$ آنگاه $a=b$) باشد. یك مجموعهٔ جزئاً مرتب، جفت $(A,\leqslant)$ است که درآن A یك مجموعه و $\leqslant$ یك رابطهٔ ترتیبی جزئی روی A است.

تعریف ۲. رابطهٔ ترتیبی کلی $\leqslant$ روی مجموعهٔ A یك رابطهٔ ترتیبی جزئی است به‌گونه‌ای که برای هردوعنصر a و b در A، یا $a\leqslant b$ یا $b\leqslant a$. یك مجموعهٔ کلاً مرتب یك جفت $(A,\leqslant)$ است که درآن A یك مجموعه و $\leqslant$ یك رابطهٔ ترتیبی کلی است.

هنگامی که از روی متن، رابطهٔ ترتیبی جزئی (کلی) $\leqslant$ روی A روشن باشد و سؤتفاهم امکان نداشته باشد، می‌توانیم به‌طور خلاصه بگوییم که A یك مجموعهٔ جزئاً (کلاً) مرتب است. رابطه‌های ترتیب کلی و مجموعه‌های کلاً مرتب، رابطه‌های ترتیبی خطی و مجموعه‌های مرتب خطی نیز نامیده می‌شوند. از تعریفها کاملاً هویداست که یك مجموعهٔ کلاً مرتب، یك مجموعهٔ جزئاً مرتب است، درحالی که یك مجموعهٔ جزئاً مرتب الزاماً یك مجموعهٔ کلاً مرتب نیست (مثال ۲، در زیر را ببینید). گیریم B زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A,\mathcal{R})$ باشد و $\leqslant_B$ اشتراك $\mathcal{R}$ با $B\times B$، یعنی $\mathcal{R}\cap(B\times B)$ باشد. آنگاه

$(B, \leqslant_B)$ یک‌مجموعهٔ جزئاً مرتب است؛ ممکن است که $\leqslant_B$ یک‌رابطهٔ کلاً مرتب‌روی B باشد، در این حالت B زیرمجموعهٔ کلاً مرتب مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A, \leqslant)$ گفته می‌شود. زیرمجموعهٔ کلاً مرتب یک مجموعهٔ جزئاً مرتب را زنجیر نیز می‌نامند.

جملهٔ «$(A, \leqslant)$ یک‌مجموعهٔ جزئاً (کلاً) مرتب است» را می‌توانیم با جملهٔ هم‌ارز زیر بیان کنیم: مجموعهٔ A با رابطهٔ $\leqslant$ جزئاً (کلاً) مرتب شده است. به‌هرحال به‌جای $b \leqslant a$ می‌توانیم بنویسیم $a \geqslant b$ و به‌جای $a \leqslant b$ و $a \neq b$ می‌نویسیم $a < b$ یا $b > a$.

مثال ۱. گیریم X یک‌مجموعهٔ غیرتهی‌است. $\mathcal{P}(X)$، مجموعهٔ توانی X، با رابطهٔ شمول $\subseteq$ روی $\mathcal{P}(X)$ جزئاً مرتب است.

مثال ۲. گیریم $\leqslant'$ رابطه‌ای‌است که روی $\mathbf{R}^2$ با $(a_1, a_2) \leqslant' (b_1, b_2)$ اگروتنها اگر $a_1 \leqslant b_1$ و $a_2 \leqslant b_2$ تعریف شده‌باشد. خواننده باید تحقیق کند که رابطهٔ $\leqslant'$ یک رابطهٔ ترتیبی جزئی روی $\mathbf{R}^2$ است. چون نه $(1, 2) \leqslant' (2, 1)$ برقرار است و نه $(2, 1) \leqslant' (1, 2)$، رابطهٔ $\leqslant'$ یک‌رابطهٔ کلاً مرتب روی $\mathbf{R}^2$ نیست.

مثال ۳. درمثال ۲، قطر $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbf{R}\}$ درصفحهٔ $\mathbf{R}^2$، یک زنجیر است.

تمرین ۱۰۷

۱. گیریم $\mathcal{P}$ یک افراز مجموعهٔ غیرتهی X است. ثابت کنید که یک مجموعهٔ $R \subseteq X$ وجود دارد به‌قسمی‌که برای هر $C \in \mathcal{P}$، $C \cap R$ از یک و فقط یک عنصر تشکیل شده است؛ مجموعهٔ R مجموعهٔ نماینده‌های $\mathcal{P}$ نامیده می‌شود.

۲. گیریم $f: A \to B$ یک سورژکسیون است، ثابت‌کنید که یک زیرمجموعهٔ A مانند C وجود دارد به‌گونه‌ای‌که C همتوان B است و از این‌رو $\operatorname{card} A \geqslant \operatorname{card} B$.

۳. گزارهٔ مثال ۱ را ثابت‌کنید.

۴. نشان دهید که

(الف) رابطهٔ همانی «$=$» روی مجموعه، یک رابطهٔ ترتیبی جزئی است.

(ب) رابطهٔ معمولی «$\leqslant$» روی مجموعهٔ اعداد حقیقی، یک رابطهٔ ترتیبی‌کلی است.

۵. گیریم F مجموعهٔ تمام توابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ است و فرض‌کنیم

$$\mathcal{R} = \{(f, g) \in F \times F \mid f(x) \leqslant g(x), \ \forall x \in \mathbf{R}\}$$

ثابت‌کنید $(F, \mathcal{R})$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است.

۶. ثابت‌کنید که مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbf{N}$ همراه با رابطهٔ «x، y را بخش می‌کند» یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است.

۷. گیریم $(\mathbf{R}^2, \leqslant')$ مجموعهٔ جزئاً مرتب مثال ۲، و m یک عدد حقیقی نامنفی است. ثابت‌کنید که زیرمجموعهٔ $(\mathbf{R}^2, \leqslant')$ که با $\{(x, mx) \mid x \in \mathbf{R}\}$ مشخص می‌شود، یک زنجیر است.

۸. گیریم $\{A_\gamma|\gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های غیرتهی است، یعنی، هر $A_\gamma \neq \varnothing$. آنگاه $\mathbf{P}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ ، حاصلضرب دکارتی تعمیم‌یافتهٔ خانوادهٔ $\{A_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ ، بنا بر تعریف، مجموعهٔ تمام توابع $f:\Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ است که در آن برای هر $\gamma\in\Gamma$ ، $f(\gamma)\in A_\gamma$. ثابت کنید که اگر $\Gamma \neq \varnothing$ ، آنگاه $\mathbf{P}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ تهی نیست.

۹. نماد مسئلهٔ ۸ را به‌کار برید و ثابت کنید که اگر Γ متناهی، $\Gamma=\{۱, ۲, \ldots, n\}$، باشد، آنگاه یك تناظر یك به‌یك بین $\mathbf{P}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ و مجموعهٔ n-گانه‌های زیر وجود دارد:
$\{(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) | i\in\Gamma$ برای هر $x_i\in A_i\}$.

۱۰. گیریم A و B مجموعه‌های غیر تهی، $\mathcal{R}$ یك‌رابطهٔ از A به B است و $\mathrm{Dom}\,\mathcal{R}=A$. ثابت‌کنید که یك تابع $f:A\to B$ وجود دارد به‌قسمی که $f\subseteq\mathcal{R}$.

۱۱. ثابت‌کنید که تابع $f:A\to B$ سورژکتیو است اگر وتنها اگر یك تابع $g:B\to A$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی که $f\circ g=I_B$، که در آن I_B تابع همانی روی B است [رجوع کنید به‌قضیهٔ ۱۶ فصل ۳].

۲. اصل ماکسیمال هاوسدورف

درجبر نوین و توپولوژی، اغلب مناسبتر است از اصل هاوسدورف که با اصل انتخاب هم‌ارز است، استفاده کنیم. برای درك این اصل، به‌چند تعریف جدید نیاز داریم.

تعریف ۳. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ جزئاً مرتب است.

(الف) عنصر $u\in A$ را کران بالای B، یك‌زیرمجموعهٔ A، می‌گویند اگروفقط اگر برای هر $b\in B$، $u\geqslant b$.

(ب) $u_۰$، کران بالای B، کوچکترین کران بالای B است اگر و تنها اگر برای هر کران بالای B مانند u، $u_۰\leqslant u$.

(ج) عنصر $e\in A$ را ماکسیمال می‌گویند اگروتنها اگر برای هر $a\in A$، از $e\leqslant a$ نتیجه شود که $e=a$.

تعریف $'۳$ را که نظیر تعریف ۳ است، جداگانه بیان می‌کنیم.

تعریف $'۳$. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ جزئاً مرتب است.

(الف) عنصر $v\in A$ کران پایین B، یك زیرمجموعهٔ A است اگر و تنها اگر برای هر $b\in B$، $v\leqslant b$.

(ب) $v_۰$ کران پایین B، بزرگترین کران پایین B است اگر وتنها اگر برای هر v، کران پایین B، $v_۰\geqslant v$.

(ج) عنصر $e'\in A$ مینیمال است اگر وتنها اگر برای هر $a\in A$ از $a\leqslant e'$ نتیجه شود $e'=a$.

مثال ۴. گیریم X یك مجموعهٔ غیرتهی و $\mathcal{B}$ یك زیرمجموعهٔ مجموعهٔ جزئاً مرتب

$(\mathcal{P}(\chi), \subseteq)$ است [مثال ۱ را ببینید]. آنگاه کوچکترین کران بالای $\mathcal{B}$، $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ و بزرگترین کران پایین $\mathcal{B}$، $\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B$ است.

قضیهٔ زیر نقش مهمی در اثبات هم‌ارزی اصل انتخاب با اصلهای دیگر ایفا می‌کند. اثبات این قضیه خسته‌کننده است و شاید هم یأس‌آور باشد؛ لذا نویسندگان کتاب پیشنهاد می‌کنند در بار اول که مبتدیان کتاب را می‌خوانند، این قضیه را بدون برهان بپذیرند.

قضیهٔ ۱. گیریم مجموعهٔ جزئاً مرتب غیرتهی $(A, \leqslant)$ چنان است که هر زیرمجموعهٔ کلاً مرتب A یك کوچکترین کران بالا در A دارد. اگر $f: A \longrightarrow A$ به‌قسمی باشد که برای هر $a \in A$، $f(a) \geqslant a$، آنگاه یك $p \in A$ وجود دارد به‌قسمی که $f(p) = p$.

برهان. گیریم a یك عنصر اختیاری A است که درطول برهان ثابت خواهد ماند. B زیرمجموعهٔ A پذیرفتنی گفته می‌شود اگر و تنها اگر دارای سه‌ویژگی زیر باشد.

(یك) $a \in B$.

(دو) $f(B) \subseteq B$.

(سه) کوچکترین کران بالای هرزیرمجموعهٔ کلاً مرتب وغیرتهی B، متعلق به B است.

گیریم $\mathcal{B}$ مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های پذیرفتنی A باشد. آنگاه چون مجموعهٔ A پذیرفتنی است، $\mathcal{B} \neq \varnothing$. اشتراك مجموعه‌های پذیرفتنی، پذیرفتنی است؛ از این‌رو مجموعهٔ جزئاً مرتب $(\mathcal{B}, \subseteq)$ یك عنصر مینیمال یکتا، $B_\circ = \bigcap_{B\in\mathcal{B}} B$، دارد. چون مجموعهٔ $\{x \in A | x \geqslant a\}$ آشکارا پذیرفتنی است، داریم $B_\circ \subseteq \{x \in A | x \geqslant a\}$. بنابراین

(چهار) برای هر $x \in B_\circ$، $x \geqslant a$.

C را مجموعهٔ $C = \{x \in B_\circ | y \in B_\circ \wedge y < x \Rightarrow f(y) \leqslant x\}$ بگیرید. ثابت می‌کنیم که

(پنج) $x \in C$ و $z \in B_\circ$ نتیجه می‌دهد یا $z \leqslant x$ یا $z \geqslant f(x)$.

$x \in C$ را ثابت اختیارکنید، و بنویسید $D = \{z \in B_\circ | z \leqslant x \text{ یا } z \geqslant f(x)\}$. آنگاه شرط (چهار) نشان می‌دهد که D در (یك) صدق می‌کند. مجموعهٔ D در (دو) نیز صدق می‌کند: زیرا اگر $z \geqslant f(x)$، آنگاه $f(z) \geqslant z \geqslant f(x)$ و اگر $z = x$، آنگاه $f(z) = f(x)$؛ و اگر $z < x$، آنگاه چون $x \in C$، داریم $f(z) \leqslant x$. مجموعهٔ D همچنین در (سه) صدق می‌کند: اگر E زیرمجموعهٔ غیرتهی و کلاً مرتب D و u کوچکترین کران بالای E باشد، آنگاه یا برای هر $y \in E$، $y \leqslant x$ و درنتیجه $u \leqslant x$، یا برای یك $y \in E$، $y \geqslant f(x)$ و درنتیجه $u \geqslant f(x)$. بنابراین D پذیرفتنی است، پس $D = B_\circ$، و به‌این ترتیب (پنج) ثابت می‌شود.

حال ثابت می‌کنیم که C پذیرفتنی است. مجموعهٔ C در (یك) صدق می‌کند، زیرا $a \in B_\circ$ ودر $B_\circ$ عنصرکوچکتر از a وجود ندارد. نشان دهیم که C در (دو) صدق می‌کند، ثابت می‌کنیم که اگر $x \in C$، $y \in B_\circ$، و $y < f(x)$ آنگاه $f(y) \leqslant f(x)$. بنابر (پنج)، داریم یا $y \geqslant f(x)$ یا $y \leqslant x$؛ بنابراین اگر $y < f(x)$ آنگاه $y \leqslant x$ وچون $x \in C$،

$y<x$ نتیجه می‌دهد $f(y)\leqslant x(\leqslant f(x))$. اگر $y=x$ آنگاه $f(y)=f(x)$.
برای اینکه ثابت کنیم C در (سه) صدق می‌کند، w را کوچکترین کران بالای مجموعهٔ غیرتهی و کلاً مرتب $G\subseteq C$ می‌گیریم. برای بررسی اینکه $w\in C$، فرض کنید $y\in B_0$ و $y<w$. بنابر (پنج) می‌دانیم که هر $x\in G$ این ویژگی را دارد که یا $y\leqslant x$ یا $y\geqslant f(x)$. نامساوی $y\geqslant f(x)\geqslant x$ برای هر $x\in G$ درست نیست، زیرا اگر چنین باشد $y\geqslant w$ نتیجه می‌شود، و این با طرز انتخاب y تناقض‌دارد. پس یك $x\in G$ وجود دارد به‌قسمی که $y\leqslant x$. اگر $y<x$ آنگاه بنابرتعریف C، $f(y)\leqslant x\leqslant w$. اگر $y=x$، آنگاه چون $y<w$، یك $z\in G$ وجود دارد به‌قسمی که $y<z$. از این‌رو، بنابر تعریف C، $f(y)\leqslant z\leqslant w$. پس $f(y)\leqslant w$ و درنتیجه $w\in C$. حال‌چون مجموعهٔ C یك زیرمجموعهٔ پذیرفتنی B_0 است، الزاماً داریم $C=B_0$. درنتیجه بنابر (پنج)، B_0 کلاً مرتب است. کوچکترین کران بالای B_0 را p می‌نامیم؛ آنگاه $p\in B_0$ و $p\leqslant f(p)\leqslant p$، پس $f(p)=p$.

حال می‌توانیم اصل‌ماکسیمال هاوسدورف‌را با استفاده از اصل‌انتخاب ثابت کنیم.

قضیهٔ ۲. (اصل ماکسیمال هاوسدورف). فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$، مجموعهٔ تمام‌زیرمجموعه‌های کلاً مرتب یك مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A,\leqslant)$ با شمول $\subseteq$، جزئاً مرتب شده‌است. آنگاه $(\mathcal{C},\subseteq)$ عنصرماکسیمال دارد.

برهان. برخلاف حکم فرض کنید که $\mathcal{C}$ عنصرماکسیمال ندارد. آنگاه به‌هر $T\in\mathcal{C}$، یك مجموعهٔ غیرتهی

$$T^*=\{S\in\mathcal{C}|S\supset T\}$$

نظیر می‌شود. بنابراصل انتخاب، یك تابع g با حوزهٔ $\{T^*|T\in\mathcal{C}\}$ وجود دارد که در $g(T^*)\in T^*$ صدق می‌کند. درنتیجه، برای هر $T\in\mathcal{C}$ یك تابع $f:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ که با $f(T)=g(T^*)\supset T$ تعریف می‌شود وجود دارد. با استفاده از مثال ۴، می‌بینیم که $(\mathcal{C},\subseteq)$ همراه با تابع f در فرض قضیهٔ ۱ صدق می‌کنند. اما برای هر $T\in\mathcal{C}$، $f(T)\supset T$، که یك تناقض است. پس قضیه ثابت شده‌است.

تمرین ۲۰۷

۱. گیریم B زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A,\leqslant)$ است. ثابت کنید که کوچکترین کران بالای (بزرگترین کران پایین) B درصورت وجود، یکتاست.
۲. مثالی بیاورید از زیرمجموعهٔ کراندار مجموعهٔ جزئاً مرتب که نه کوچکترین کران بالا داشته‌باشد نه بزرگترین کران پایین.
۳. گیریم $X=\{a,b,c\}$، فرض‌کنیم مجموعه توانی $\mathcal{P}(X)$ با رابطهٔ شمول $\subseteq$ جزئاً مرتب شده‌است. تمام کرانهای‌بالا، تمام کرانهای پایین، کوچکترین کران‌بالا وبزرگترین

کران پایین مجموعهٔ $\{\{a, b\}, \{c, a\}\}$ را بیابید.

۴. حکم مثال ۴ را ثابت کنید.

۵. درمسئلهٔ ۳، عناصر ماکسیمال و مینیمال $\mathcal{P}(X)$ را بیابید.

۶. عناصر ماکسیمال و مینیمال مجموعهٔ جزئاً مرتب $\mathcal{P}(X)$ درمثال ۴ را بیابید.

۷. مثالی از مجموعهٔ جزئاً مرتب بیاورید که بیش از یك عنصر ماکسیمال و نیز بیش از یك عنصر مینیمال داشته باشد.

۸. ثابت کنید که اگر مجموعهٔ کلاً مرتب عنصر ماکسیمال (مینیمال) داشته باشد، آنگاه تنها یك عنصر ماکسیمال (مینیمال) دارد.

۹. مثالی از مجموعهٔ کلاً مرتب بیاورید که نه عنصرماکسیمال داشته باشد نه عنصرمینیمال.

۱۰. گیریم $(\mathcal{C}, \subseteq)$ نمادی است که درقضیهٔ ۲ آمده است و $\mathcal{C}_0$ یك زیرمجموعهٔ کلاً مرتب $\mathcal{C}$ است. ثابت کنید که $\{$برای هر $S \in \mathcal{C}_0$، $T_0 = \bigcap\{T \in \mathcal{C} | T \supseteq S$ کوچکترین کران بالای $\mathcal{C}_0$ است.

۱۱. مطلب زیر را ثابت کنید. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ جزئاً مرتب غیرتهی است به‌قسمی که هرزیرمجموعهٔ کلاً مرتب A بزرگترین کران پایین‌دارد. اگر $f: A \to A$ به‌گونه‌ای باشد که برای هر $a \in A$، $f(a) \leqslant a$، آنگاه $q \in A$ وجود دارد به‌قسمی که $f(q) = q$ [راهنمایی: از قضیهٔ ۱ استفاده کنید].

۱۲. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ جزئاً مرتب و B یك زیرمجموعهٔ کلاً مرتب A است. ثابت کنید که A یك زیرمجموعهٔ کلاً مرتب ماکسیمال، مانند C، دارد به‌قسمی که $B \subseteq C$. [راهنمایی: قضیهٔ ۲ را به‌کار برید].

۱۳. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ جزئاً مرتب است. B، زیرمجموعهٔ A، پاد زنجیر گفته می‌شود اگر و تنها اگر برای هر دوعنصر متمایز x و y در B، $x \leqslant y$ و $y \leqslant x$ هیچ یك برقرار نباشد. ثابت کنید که هر پادزنجیر، زیرمجموعهٔ پادزنجیری است که نسبت به‌رابطهٔ شمول $\subseteq$، ماکسیمال است [راهنمایی: قضیهٔ ۲ را به‌کار برید].

۳. لم تسورن

شاید یکی از صورتهای هم‌ارز اصل‌موضوع انتخاب که بیش‌از دیگرصورتها به‌کارمی‌رود، لم تسورن باشد که اولین بار درسال ۱۹۱۴ عنوان شد. اصطلاح لم تسورن که معمولاً به‌کارمی‌برند کم و بیش گمراه‌کننده است، شاید مناسبتر باشد بگوییم «اصل تسورن».

درقضیهٔ ۲، در واقع ثابت کرده‌ایم که اصل ماکسیمال هاوسدورف از اصل انتخاب نتیجه می‌شود. در برهان قضیهٔ بعدی، نشان خواهیم داد که لم تسورن از اصل ماکسیمال هاوسدورف نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۳. (لم تسورن). گیریم $(A, \leqslant)$ مجموعهٔ جزئاً مرتبی‌است که درآن هرزیرمجموعهٔ کلاً مرتب کران بالادارد. آنگاه A عنصر ماکسیمال دارد.

برهان. بنابراصل ماکسیمال هاوسدورف، $(A, \leqslant)$ یك زیرمجموعهٔ کلاً مرتب B دارد که نسبت به رابطهٔ شمول $\subseteq$ ماکسیمال است. گیریم u یك کران بالای B است؛ u بنابرفرض وجود دارد. ثابت خواهیم کرد که u عنصرماکسیمال A است. اگرعنصر $x \in A$ چنان باشد که $u \leqslant x$، آنگاه $B \cup \{x\}$ یك زیرمجموعهٔ کلاً مرتب $(A, \leqslant)$ است و شامل زیرمجموعهٔ کلاً مرتب ماکسیمال B است.درنتیجه باید داشته‌باشیم $B \cup \{x\} = B$، پس $x \leqslant u$. این ثابت می‌کند که u عنصر ماکسیمال $(A, \leqslant)$ است.

قضیهٔ ۳، یك نمونه از قضیهٔ وجودی (در مقابل ساختنی) است؛ صرفاً وجود عنصر ماکسیمال را در مجموعه‌ای جزئاً مرتب بیان می‌دارد. برهان قضیهٔ ۳ هیچ‌گونه روش سازنده‌ای برای پیدا کردن عنصر ماکسیمال به‌دست نمی‌دهد. این نکته دربارهٔ قضیهٔ ۲ و تمام نتیجه‌هایی که دراین فصل خواهد آمد، صادق است.

به‌عنوان یکی از موارد استعمال لم تسورن، قضیهٔ زیر را اثبات می‌کنیم، درآخر بخش ۲ از فصل ۶ وعده داده بودیم برهان آن را بیاوریم.

قضیهٔ ۴. گیریم A و B مجموعه‌های غیرتهی هستند. آنگاه یا یك انژکسیون از A به B وجود دارد یا یك انژکسیون از B به A.

برهان. $\mathscr{F}$، مجموعهٔ تمام جفتهای (A_α, f_α) را،که درآن A_α یك زیرمجموعهٔ A است و $f_\alpha : A_\alpha \to B$ یك‌انژکسیون است، درنظرمی‌گیریم. رابطهٔ $\leqslant$ را روی $\mathscr{F}$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$(A_\alpha, f_\alpha) \leqslant (A_\beta, f_\beta) \text{ اگر و تنها اگر } f_\alpha \subseteq f_\beta \text{ و } A_\alpha \subseteq A_\beta$$

این رابطه آشکارا یك رابطهٔ ترتیب جزئی است. برای استفاده از لم تسورن، باید مطمئن باشیم‌که هرزیرمجموعهٔ کلاً مرتب $\mathscr{F}$، مانند $\mathscr{C} = \{(A_\gamma, f_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ کران بالادارد. طبیعی است‌کران بالای $\mathscr{C}$ را جفت $(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma, \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma)$ بگیریم. بنامید $A_1 = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ و $f_1 = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$ آنگاه $f_1 : A_1 \to B$ با $f_1(x) = f_\gamma(x)$ تعریف می‌شود، اگر $x \in A_\gamma$ و $(A_\gamma, f_\gamma) \in \mathscr{C}$. برای اثبات اینکه $f: A_1 \to B$ خوشتعریف است، فرض کنیم که x به زیرمجموعهٔ دیگری مانند A_δ، $\delta \in \Gamma$ متعلق است. آنگاه $(A_\gamma, f_\gamma) \leqslant (A_\delta, f_\delta)$ یا $(A_\delta, f_\delta) \leqslant (A_\gamma, f_\gamma)$، ودر هر دو حالت داریم $f_\gamma(x) = f_\delta(x)$. بنابراین $f_1 : A_1 \to B$ یك تابع خوشتعریف است. اکنون نشان می‌دهیم که $f_1 : A_1 \to B$ انژکتیو است. فرض‌کنیدکه برای یك x و یك y در A_1، $f_1(x) = f_1(y)$. آنگاه (A_γ, f_γ) و (A_δ, f_δ) در $\mathscr{C}$ وجود دارند به‌قسمی‌که $x \in A_\gamma$ و $y \in A_\delta$.همانندقبل، یا $(A_\gamma, f_\gamma) \leqslant (A_\delta, f_\delta)$ یا $(A_\delta, f_\delta) \leqslant (A_\gamma, f_\gamma)$. می‌توانیم‌فرض کنیم که نامساوی اول‌درست‌است؛ آنگاه نتیجه‌می‌شود که $f_\delta(x) = f_\delta(y)$ و بنابراین $x = y$، زیرا f_δ انژکتیو است. این‌ثابت می‌کندکه $f_1 : A_1 \to B$ انژکتیو است. پس، برای هر $\gamma \in \Gamma$، $(A_1, f_1) \geqslant (A_\gamma, f_\gamma)$ و درنتیجه $(\mathscr{F}, \leqslant)$ درفرض لم

تسورن صدق می‌کند. پس $\mathfrak{B}$ یك عنصر ماکسیمال دارد که ما آن را با $(\tilde{A}, \tilde{f})$ نشان می‌دهیم. حال دوحالت پیش می‌آید:

حالت ۱. $\tilde{A}=A$.

دراین حالت $\tilde{f}: A \to B$ انژکسیون است و قضیه ثابت شده است.

حالت ۲. $\tilde{A} \neq A$.

گیریم $x_0 \in A-\tilde{A}$. دراین حالت، نشان می‌دهیم که $\tilde{f}: \tilde{A} \to B$ بیژکتیو است. زیرا درغیراین صورت، یك عنصر $y_0 \in B-\tilde{f}(\tilde{A})$ وجود دارد. تابع $\tilde{\tilde{f}}: \tilde{A} \cup \{x_0\} \to B$ که با $\tilde{\tilde{f}}(x_0)=y_0$ و $\tilde{\tilde{f}}(x)=\tilde{f}(x)$ برای هر $x \in \tilde{A}$ تعریف می‌شود، آشکارا یك انژکسیون است. بنابراین $(\tilde{A} \cup \{x_0\}, \tilde{\tilde{f}}) > (\tilde{A}, \tilde{f})$، که ماکسیمال بودن $(\tilde{A}, \tilde{f})$ را نقض می‌کند. این ثابت می‌کند که $\tilde{f}: \tilde{A} \to B$ بیژکتیو است و درنتیجه، $\tilde{f}^{-1}$ یك انژکسیون از B روی $\tilde{A}$، زیرمجموعهٔ A است. اکنون اثبات کامل است.

یك نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۴ در زیر آمده است.

نتیجه. اگر A و B دومجموعه باشند. آنگاه یا $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ یا $\operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} A$.

بنابراین اگر m و n دوعدد اصلی متمایز باشند، یا $m<n$ یا $n<m$.

تمرین ۳۰۷

۱. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ جزئاً مرتب است که درآن هرزیرمجموعهٔ کلاً مرتب یك کران پایین دارد. نشان دهید A عنصر مینیمال دارد.

۲. ثابت کنید که از لم تسورن، اصل ماکسیمال هاوسدورف نتیجه می‌شود.

۳. برای دانشجویانی که جبرخطی خوانده‌اند: ثابت کنید که هرحلقه با عنصریکه، یك ایدال ماکسیمال سره دارد.

۴. برای دانشجویانی که جبرخطی خوانده‌اند: ثابت کنید که هرفضای برداری یك پایه دارد.

۵. نتیجهٔ قضیهٔ ۴ را ثابت کنید.

۶. یك مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A, \leqslant)$، مشبکه گفته می‌شود اگر و تنها اگر هرزیرمجموعهٔ دوعنصری $\{x, y\}$ کوچکترین کران بالا(ی یکتا)، که با $x \vee y$ نشان داده می‌شود، و نیز بزرگترین کران پایین (یکتا)، که با $x \wedge y$ نشان داده می‌شود، داشته باشد. ثابت کنید که مشبکه‌ای، که در آن هر زنجیر یك کران بالا دارد، عنصرماکسیمال یکتا دارد.

۷. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ جزئاً مرتب است که درآن هر زیرمجموعهٔ کلاً مرتب یك کران بالا دارد، و فرض کنیم $a \in A$. آنگاه A یك عنصرماکسیمال u دارد به‌قسمی که $u \geqslant a$.

۸. گیریم B یك مجموعه است. می گوییم $\mathcal{F}$، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های B دارای مشخصهٔ متناهی است، هرگاه $A \in \mathcal{F}$ اگر وتنها اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی A متعلق به $\mathcal{F}$ باشد. ثابت کنید که اگر $\mathcal{F}$ مشخصهٔ متناهی داشته باشد، آنگاه $(\mathcal{F}, \subseteq)$ عنصر ماکسیمال دارد.

۹. گیریم A یك مجموعهٔ دلخواه با بیش از یك عنصر است. ثابت‌کنید که یك بیژکسیون $f: A \to A$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $x \in A$، $f(x) \neq x$.

۴. اصل خوشترتیبی

اکنون لم تسورن را برای اثبات یك اصل حیرت‌انگیز درنظریهٔ مجموعه‌ها، یعنی اصل خوشترتیبی ارنست تسرملو (۱۸۷۱–۱۹۵۳)، به‌کار می‌بریم.

تعریف ۴. یك مجموعهٔ کاملاً مرتب $(A, \leqslant)$ خوشترتیب گفته می‌شود اگر وتنها اگر هر زیرمجموعهٔ غیرتهی A مانند B شامل عنصر مینیمال (یکتا) باشد؛ یعنی، اگر یك عنصر $b \in B$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x \in B$، $b \leqslant x$. b را کوچکترین عنصر B می‌نامند. اگر $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ خوشترتیب باشد آنگاه رابطهٔ $\leqslant$ را رابطهٔ خوشترتیبی می‌گویند.

مثال ۵. (الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی‌تحت رابطهٔ «کوچکتر یا مساوی» خوشترتیب است.
(ب) مجموعهٔ اعدادگویا تحت رابطهٔ معمولی «کوچکتر یا مساوی» خوشترتیب نیست.

مجموعهٔ A را خوشترتیب می‌گویند هرگاه یك رابطهٔ خوشترتیبی روی A وجود داشته باشد.

قضیهٔ ۵. (اصل خوشترتیبی). هرمجموعه خوشترتیب‌شدنی است.

برهان. گیریم H مجموعهٔ دلخواه مفروض است‌که باید خوشترتیب شود. A^* مجموعهٔ تمام مجموعه‌های خوشترتیب $(A_0, \leqslant_0)$ را، که درآن $A_0 \subseteq H$، درنظر بگیرید. A^* را از راه زیرجزئاً مرتب‌می کنیم:می نویسیم $(A_0, \leqslant_0) \leqslant^* (A_1, \leqslant_1)$ اگر و تنها اگر

(یك) $A_0 \subseteq A_1$

(دو) $x, y \in A_0$ و $x \leqslant_0 y$ نتیجه دهد $x \leqslant_1 y$

و

(سه) $x \in A_1 - A_0$ نتیجه دهدکه برای تمام $y \in A_0$، $y \leqslant_1 x$.

خواننده باید بررسی کندکه این رابطهٔ $\leqslant^*$ واقعاً یك رابطهٔ ترتیبی جزئی روی A است. برای به‌کاربردن لم تسورن، نشان می‌دهیم‌که هر زیرمجموعهٔ کلاً مرتب $(A^*, \leqslant^*)$ مانند $\mathcal{B}$، کران بالا دارد. طبیعی است این‌کران بالا را[1] $(\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A, \leqslant')$ بگیریم، که درآن

۱. برای ساده‌بودن علامتگذاری، ازاین به بعد نماد $A \in \mathcal{B}$ به‌معنی $(A, \leqslant) \in \mathcal{B}$ خواهد بود.

$x \leqslant' y$ اگر و تنها اگر x و y متعلق به‌یك A_0 باشند به‌قسمی که $(A_0, \leqslant_0) \in \mathcal{B}$ و $x \leqslant_0 y$. بدیهی است که اگر $(\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A, \leqslant')$ متعلق بــه A^* باشد، $(\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A, \leqslant')$ یك کران بالای $\mathcal{B}$ خواهد بود. ثابت خواهیم کرد که $(\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A, \leqslant')$ خوشترتیب است و بنابراین متعلق به A^* است. تحقیق دراینکه $\leqslant'$ یك رابطهٔ کلاً مرتب روی $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$ است ساده است و آن را بــه عهدهٔ خواننده می گذاریم. گیریم S یك زیرمجموعهٔ غیرتهی $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$ است. آنگاه $(A_0, \leqslant_0) \in \mathcal{B}$ وجود دارد بــه قسمی کــه A_0، S را قطع می کند. چون $(A_0, \leqslant_0)$ خوشترتیب است، $S \cap A_0$ شامل کوچکتریــن عنصر یکتاست کــه آن را x_0 می‌نامیم ($x_0 \in S \cap A_0$). ازاین‌نتیجه می‌شود که‌برای هر $y \in S$، مجموعهٔ $(A_1, \leqslant_1) \in \mathcal{B}$ وجود دارد به‌گونه‌ای کــه $(A_0, \leqslant_0) \leqslant^* (A_1, \leqslant_1)$ و $x_0, y \in A_1$؛ پس $x_0 \leqslant_1 y$ و از این‌رو $x_0 \leqslant' y$. پس x_0 کوچکتریــن عنصــر S تحت $\leqslant'$ است، بنابــرایــن $(\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A, \leqslant')$ خوشترتیب است.

بنابر لم تسورن، $(A^*, \leqslant^*)$ یك عنصر ماکسیمال $(A_1, \leqslant_1)$ دارد. ثابت می کنیم که $A_1 = H$ و ازاین‌رو $(A, \leqslant_1)$ خوشترتیب است. زیرا، اگر $A_1 \neq A$، آنگاه یــك x_1 در $H - A_1$ انتخاب کنید و $\leqslant_1$ را به $A_1 \cup \{x_1\}$ از راه تعریف $x \leqslant x_1$ برای هر $x \in A$ تعمیم دهید، آنگاه مجموعهٔ $(A_1 \cup \{x_1\}, \leqslant_1)$ تحت $\leqslant^*$ اکیداً از $(A_1, \leqslant_1)$ بزرگتر است و این ماکسیمال‌بودن $(A_1, \leqslant_1)$ را نقض می کند. برهان اصل خوشترتیبی اکنون کامل است.

اصل خوشترتیبی یك نمونهٔ برجستهٔ دیگر از قضیهٔ غیرسازنده است. برهــان قضیهٔ ۵ به‌هیچ‌وجه راه «خوشترتیب‌کردن» عناصر H را نشان نمی‌دهد؛ بلکه تنها حکم می کند که یــك رابطهٔ خوشترتیبی وجود دارد. درحقیقت، حتی نمی‌دانیم چگونه اعــداد حقیقی را می‌توان خوشترتیب کرد.

ما تاکنون تسلسل منطقی زیر را نشان داده‌ایم: اصل انتخاب $\overset{\text{قضیهٔ ۲}}{\Longrightarrow}$ اصل ماکسیمال هاوسدورف $\overset{\text{قضیهٔ ۳}}{\Longrightarrow}$ لم تسورن $\overset{\text{قضیهٔ ۵}}{\Longrightarrow}$ اصل خوشترتیبی.

برای تکمیل برهــان هم‌ارزی این چهار اصل، کافی است نشان دهیم کــه از اصل خوشترتیبی، اصل انتخاب نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۶. از اصل خوشترتیبی، اصل انتخاب نتیجه می‌شود.

برهان. گیریم $\mathcal{S}$ یك مجموعهٔ غیرتهی‌است که عناصرش مجموعه‌های غیرتهی هستند. بنابراصل خوشترتیبی، یك رابطهٔ کلاً مرتب $\leqslant$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $(\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A, \leqslant)$ خوشترتیب است. درنتیجه، هرمجموعهٔ $A \in \mathcal{S}$ شامل کوچکترین عنصر است. اکنون برای هر $A \in \mathcal{S}$، مقــدار، $f : \mathcal{S} \to \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$، یعنی $f(A)$ راکوچکترین عنصر A می گیریم. این تابع خوشتعریف ویك تابع انتخاب است. این اصل انتخاب را ثابت می کند*.

---

* به‌عبارت دیگر، اصل خوشترتیبی $\Rightarrow$ اصل انتخاب.ـ م.

به‌این ترتیب هم‌ارزی اصل‌انتخاب، اصل ماکسیمال هاوسدورف، لم‌تسورن، و اصل خوشترتیبی را ثابت‌کرده‌ایم. درباقیماندهٔ این‌کتاب اصل انتخاب (و سه اصل هم‌ارز دیگر آن) را خواهیم پذیرفت و از آن استفاده خواهیم‌کرد.

تمرین ۴.۷

۱. نشان دهیدکه مجموعهٔ اعداد حقیقی تحت رابطهٔ «کوچکتر یا مساوی» معمول دراعداد حقیقی، خوشترتیب نیست.

۲. بدون استفاده از قضیهٔ ۵، مستقیماً ثابت‌کنید که مجموعهٔ اعداد گویا را می‌توان خوشترتیب کرد.

۳. ثابت‌کنیدکه هر زیرمجموعهٔ یك مجموعهٔ خوشترتیب، تحت رابطهٔ القایی، خوشترتیب است.

۴. فرض‌کنید $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ جزئاً مرتب است به‌قسمی‌که هر زیرمجموعهٔ غیرتهی B شامل یك‌کران پایین است؛ یعنی، $b \in B$ وجود دارد به قسمی‌که برای هر $x \in B$، $b \leqslant x$. ثابت‌کنیدکه مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A, \leqslant)$ کلاً مرتب و درنتیجه خوشترتیب است.

۵. ثابت‌کنیدکه رابطهٔ تعریف شدهٔ $\leqslant^*$ در برهان قضیهٔ ۵، یك رابطهٔ ترتیبی جزئی روی A^* است.

۶. ثابت‌کنیدکه رابطهٔ تعریف شدهٔ $\leqslant'$ در برهان قضیهٔ ۵، یك رابطهٔ‌کلاً مرتب روی $\bigcup_{A \in \mathscr{H}} A$ است.

۷. فرض‌کنید $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ‌کلاً مرتب است. دنبالهٔ عناصر $a_1, a_2, a_3 \cdots$ در A اکیداً نزولی گفته می‌شود اگر $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$. ثابت‌کنیدکه مجموعهٔ‌کلاً مرتب، خوشترتیب است اگر وتنها اگر مجموعهٔ‌کلاً مرتب، شامل هیچ دنبالهٔ اکیداً نزولی نامتناهی نباشد.

۵. اصل استقرای ترامتناهی

برای اینکه اصل استقرای ترامتناهی ساده بیان شود وهمچنین برای مطالعهٔ اعداد ترتیبی در فصل بعدی، مفهوم قطعه را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۵. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ‌کلاً مرتب است. یك قطعه از A (یا قطعهٔ A) یك زیرمجموعهٔ S از A است به‌گونه‌ای‌که اگر $y \in S$، $x \in A$ و $x \leqslant y$، آنگاه $x \in S$. یك قطعهٔ سرهٔ A، قطعه‌ای است که زیرمجموعهٔ سرهٔ A است.

مثال ۶. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ خوشترتیب، و x یك عنصر اختیاری A است. آنگاه مجموعهٔ تهی، مجموعهٔ A، ومجموعهٔ $A_x = \{a \in A | a < x\}$ قطعه‌های A هستند.

قضیهٔ ۷. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ خوشترتیب است. آنگاه
(الف) هر اجتماع یا اشتراك قطعه‌های A وتمام قطعه‌های یك قطعهٔ A، نیز قطعه‌های A هستند.
(ب) S هر قطعهٔ A، بجز خود A، باشد، یك عنصر $x \in A$ وجود دارد به قسمی که $S = A_x$، که در آن $A_x = \{a \in A | a < x\}$.

برهان. (الف) گیریم $\mathcal{F}$ یك خانواده از قطعه‌های A است، و $y \in \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$. اگر $x \in A$ و $x \leqslant y$، آنگاه چون y به‌یك قطعهٔ $S_0 \in \mathcal{F}$ از A تعلق دارد، داریم $x \in S_0$ ولذا $x \in \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$. بنابراین، $\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$ یك قطعهٔ A است. به‌طریق مشابه، اشتراك خانوادهٔ $\mathcal{F}$ ازقطعه‌های A، یك قطعهٔ A است. (مسئلهٔ ۳ را ببینید).
گیریم S یك قطعهٔ A و T یك قطعهٔ S است. فرض‌کنیم $y \in T$، $x \in A$، و $x \leqslant y$؛ باید نشان دهیم که $x \in T$. نخست، چون y به‌قطعهٔ S تعلق دارد، داریم $x \in S$؛ آنگاه از $y \in T$، $x \in S$، $x \leqslant y$ وفرض اینکه T یك قطعهٔ S است، داریم $x \in T$. این نشان می‌دهد که T یك قطعه از A است.
(ب) گیریم S یك قطعه از A است به‌گونه‌ای که $S \neq A$. آنگاه مجموعهٔ غیرتهی $A - S$ یك کوچکترین عنصر مانند x دارد. به‌عنوان یك تمرین ساده، تحقیق اینکه $S = A_x$ به‌خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ زیر مقدمه‌ای بر اصل استقرای ترامتناهی است.

قضیهٔ ۸. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعـهٔ خوشترتیب، و $\mathcal{S}$ یك مجموعهٔ قطعه‌های A است به‌قسمی که
(۱) هر اجتماع عضوهای $\mathcal{S}$ به $\mathcal{S}$ متعلق است،
(۲) اگر $A_x \in \mathcal{S}$، آنگاه $A_x \cup \{x\} \in \mathcal{S}$،
دراین صورت $\mathcal{S}$ شامل تمام قطعه‌های A است.

برهان. فرض‌کنید که یك عنصر $x \in A$ وجود دارد به‌قسمی که قطعهٔ $A_x \notin \mathcal{S}$. چون $(A, \leqslant)$ خوشترتیب است، زیـرمجموعـهٔ غیرتهی $B = \{x \in A | A_x \notin \mathcal{S}\}$ کوچکترین عنصری مانند a دارد. چون $a \in B$، $A_a \notin \mathcal{S}$. اگر $y \in A$ و $y < a$ آنگاه $y \notin B$ و از این‌رو $A_y \in \mathcal{S}$. بنابرفرض (۱)، $\bigcup_{y < a} A_y \in \mathcal{S}$. بنابرقضیهٔ ۷، یك عنصر $b \in A$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\bigcup_{y < a} A_y = A_b$. درنتیجه $b < a$ (مسئلهٔ ۹ را ببینید). حال بااستفاده از فرض (۲) و قضیهٔ ۷، داریم

$$A_b \cup \{b\} = A_c \in \mathcal{S} \qquad \text{برای یك } c \in A$$

ازاین‌رو داریم $b < c < a$. درنتیجه

$$b \in A_c \subseteq \bigcup_{y < a} A_y = A_b$$

که $b \notin A_b$ را نقض می‌کند. بنابراین برای هر $x \in A$، $A_x \in \mathcal{S}$.
اکنون ثابت می‌کنیم که $A \in \mathcal{S}$. بنابر فرض (۱) داریم $\bigcup_{x \in A} A_x \in \mathcal{S}$. اگر $\bigcup_{x \in A} A_x = A$، آنگاه قضیه ثابت شده‌است. فرض‌کنید که $\bigcup_{x \in A} A_x \neq A$؛ آنگاه یك عنصر $d \in A$ وجود دارد به قسمی‌که $\bigcup_{x \in A} A_x = A_d$. بنابرفرض (۲)، $A_d \cup \{d\} \in \mathcal{S}$. ازاین نتیجه می‌شود که برای هر $x \in A$، $x \leqslant d$، و از این‌رو $A = A_d \cup \{d\} \in \mathcal{S}$، و اثبات‌کامل است.

تذکر. درقضیهٔ ۸، فرض (۱) نتیجه می‌دهد $\varnothing \in \mathcal{S}$. زیرا «$\varnothing \in \mathcal{S}$» را می‌توان از فرض (۱)، یعنی از «هر اجتماع عضوهای $\mathcal{S}$ متعلق به $\mathcal{S}$ است» به‌دست آورد: از «اجتماع تهی» عضوهای $\mathcal{S}$ نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید (قضیهٔ ۷ (الف)، فصل ۲ را ببینید). پس $\mathcal{S}$ غیرتهی است.

قضیهٔ ۹. (اصل استقرای ترامتناهی). گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ خوشترتیب است. برای هر $x \in A$، گیریم $p(x)$ گزاره‌ای دربارهٔ x است. اگر برای هر $x \in A$، فرض «$p(y)$ برای هر $y < x$ راست است» نتیجه دهدکه «$p(x)$ راست است»، آنگاه $p(x)$ برای هر $x \in A$ راست است.

برهان. فرض‌کنید که یك x وجود دارد به قسمی‌که $p(x)$ دروغ است. آنگاه $B = \{x \in A | \text{دروغ است } p(x)\}$ یك زیرمجموعهٔ غیرتهی A است، و ازاین‌رو کوچکترین عنصری مانند x_0 دارد. چون $x_0 \in B$، $p(x_0)$ دروغ است. اگر $y \in A$ و $y < x_0$ آنگاه $y \notin B$، و ازاین‌رو $p(y)$ راست است. پس $p(y)$ برای هر $y < x_0$ راست است. بنابراین $p(x_0)$ راست است و این با $p(x_0)$ دروغ است، تناقض دارد. درنتیجه، $p(x)$ برای هر x در A راست است.

قضیهٔ بعدی یك مثال نمونه است برای دیدن اینکه چگونه استقرای ترامتناهی در احکام ریاضی به‌کارمی‌رود. این قضیه درمبحث اعداد ترتیبی درفصل ۸ به‌کار خواهد رفت. نخست به‌تعریف زیر نیاز داریم.
گیریم $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ مجموعه‌های خوشترتیب هستند. تابع $f: A \to B$ صعودی گفته می‌شود اگر وتنها اگر از $a \leqslant a'$ در $(A, \leqslant)$ نتیجه شود $f(a) \leqslant' f(a')$ در $(B, \leqslant')$، اکیداً صعودی گفته می‌شود اگر وتنها اگر از $a < a'$ در $(A, \leqslant)$ نتیجه شود $f(a) <' f(a')$ در $(B, \leqslant')$.

قضیهٔ ۱۰. گیریم $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ مجموعه‌های خوشترتیب هستند. اگر $f: A \to B$ صعودی باشد، $f(A)$ یك قطعه از B است، و اگر $g: A \to B$ اکیداً صعودی باشد، آنگاه برای هر $x \in A$، $f(x) \leqslant' g(x)$.

برهان. برای استفاده از استقرای ترامتناهی، برای هر $x\in A$، $p(x)$ را گزارهٔ «$f(x)\leqslant' g(x)$» می‌گیریم. برای اینکه نشان دهیم فرض قضیهٔ ۹ برقرار است، برخلاف حکم، فرض می‌کنیم که یك عنصر $a\in A$ وجود دارد به‌قسمی که $p(x)$ برای هر $x<a$ راست است، اما $p(a)$ دروغ است. یعنی، برای هر $x<a$، $f(x)\leqslant' g(x)$، و $g(a)<' f(a)$. چون g اکیداً صعودی و f صعودی است، برای هر $x<a$ و هر $y\geqslant a$ داریم

$$f(x)\leqslant' g(x)<' g(a)<' f(a)\leqslant' f(y)$$

از این نتیجه می‌شود که $g(a)<' f(a)$ و $g(a)\notin f(A)$، که قطعه بودن $f(A)$ در B را نقض می‌کند. بنابراین برای هر $x\in A$، اگر برای هر $y<x$، $f(y)\leqslant' g(y)$ آنگاه $f(x)\leqslant' g(x)$. بنابراصل استقرای ترامتناهی، برای هر $x\in A$، $f(x)\leqslant' g(x)$.

تمرین ۵.۷

۱. گیریم $\mathbf{N}$ مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی است، و برای هر $k\in\mathbf{N}$، گیریم $\mathbf{N}_k=\{۱, ۲, ۳, \ldots, k\}$. تمام قطعه‌های $(\mathbf{N}, \leqslant)$ را بیابید که در آن $\leqslant$ همان رابطهٔ معمولی «کوچکتر یا مساوی» اعداد طبیعی است.

۲. گزارهٔ مثال ۶ را ثابت کنید.

۳. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ خوشترتیب است. ثابت کنید

(الف) اشتراك یك خانوادهٔ دلخواه از قطعه‌های A، یك قطعهٔ A است.

(ب) برای هر $x\in A$، $A_x\cup\{x\}$ یك قطعهٔ A است.

۴. برهان قضیهٔ ۷ (ب) را کامل کنید.

۵. یك برهان مستقیم برای قضیهٔ ۹ بیاورید [راهنمایی: از قضیهٔ ۸ استفاده کنید].

۶. گیریم $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ مجموعه‌های خوشترتیب هستند، و نیز گیریم $f: A\to B$ تابعی صعودی است به‌قسمی که $f(A)$ یك قطعهٔ B است. ثابت کنید که f هر قطعهٔ A را به یك قطعهٔ B می‌برد.

۷. ثابت کنید که در یك مجموعهٔ خوشترتیب هر زیرمجموعه که از طرف بالا کراندار است، کوچکترین کران بالای (یکتا) دارد.

۸. گیریم $(A, \leqslant)$ خوشترتیب است. ثابت کنید که برای هر $x\in A$، x کوچکترین کران بالای قطعهٔ A_x از A است.

۹. ثابت کنید که در برهان قضیهٔ ۸، $b<a$. [راهنمایی: حالتهای (یك) $b=a$ و (دو) $a<b$ را درنظر بگیرید.]

۶. نکات تاریخی

شاید دانستن تاریخچهٔ کوتاهی از اصل موضوع انتخاب مفید باشد؛ این اصل ازخیلی جهات

شبیه اصل موضوع توازی اقلیدس و فرض پیوستار است (بخش ۸ فصل ۶ را ببینید).

در اوایل دهـهٔ ۱۸۸۰، گئورگ کانتور تلویحاً استدلالهایی در برهان بعضی قضایا به‌کار برده‌بود، که اساساً هم‌ارز با اصل انتخاب بودند؛ اما او توجه‌نداشت که یك اصل موضوع قوی جدیدی به‌کار می‌برد. در ۱۹۰۴، ارنست تسرملو* (۱۸۷۱–۱۹۵۳) بعد ازمطالعاتی دقیق، اصل انتخاب را صریحاً عنوان کرد و از آن در اثبات قضیهٔ خوشترتیبی استفاده کرد (که ماهم آنـرا اصل خوشترتیبی گفته‌ایـم). چون برای خوشترتیب کردن حتی مجموعهٔ آشنای اعداد حقیقی هیچ راهی پیدا نشده‌است، علیرغم حکم قضیهٔ خوشترتیبی، تا مدت حـداقل شش سال بعد از ظهور این قضیه، مقالات انتقادی زیـادی دربارهٔ برهان تسرملو نوشته شد. اکثراً اصل انتخاب را ردکردند. با این حال اکثر منتقدین باید می‌پذیرفتند که اگر اصل موضوع انتخاب را قبول می‌کردند، نمی‌توانستند اشتباهی دربرهان تسرملو برای قضیهٔ خوشترتیبی بیابند. بنابراین، انتقاد از قضیهٔ خوشترتیبی به‌انتقاد ازاصل انتخاب منجر می‌شد. به‌نظر می‌رسیدکه فقط دو راه وجود دارد:

(الف) اصل را براین بگذاریم که تنها نتیجه‌های ساخته شدنی را بپذیریم ونتیجه‌های وجودی محض را نپذیریم، آنگاه روشها وعرصه‌های ریاضیات آنقدر محدود می‌شوندکه، خارج ازحساب، تنها زمینه‌های بسیارکوچکی را می‌توان بررسی کرد.

(ب) نتیجه‌هـای ساخته شدنی و وجودی محض، ازجمله اصل موضوع انتخاب، را بپذیریم و درنتیجه، به‌حل مسائل بیشتر وتوسعه‌دادن ریاضیات بپردازیم.

برای اینکه بتوان مشخص کرد که پیروی از کدام روش عاقلانه است، باید قبلاً به‌دو سؤال مشکل زیرتوجه شود:

(۱) آیـا اصل انتخاب از اصول موضوع موجود مستقل است، یـا به‌وسیلهٔ دیگر اصول موضوع موجود ریاضی ثابت می‌شود؟

(۲) آیا اصل انتخاب با دیگر اصول کلاسیك ریاضی سازگار است یا ممکن است افزودن اصل انتخاب بـه‌دیگر اصول موضوع کلاسیك ریاضی، موجب بـه‌وجود آمدن تناقض شود؟

همان‌طورکـه در فرض پیوستار پیش آمد، بسیاری از ریـاضیدانان برای رسیدن به‌جوابهای این دوسؤال کوشش فراوان کردند. چندین سال بعد، در ۱۹۳۸، کورت گودل (–۱۹۰۶   ) بـا اثبات اینکه افزودن اصل موضوع انتخاب به‌دیگر اصول موضوع موجود ریاضی هیچ تناقضی ایجاد نمی‌کند، به‌سؤال دوم جواب‌داد[1]. کشف گودل، به‌جامعهٔ ریاضی وبخصوص بـه استفاده‌کنندگان از اصل موضوع انتخاب، آسایش‌خاطر و اطمینان

---

* Ernst Zermelo

1. K. Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princetion University Press, Princeton, N. J., 1940, 66 pp. Rev. ed., 1951. 74 pp.

زیادی داد. اما تحقیق برای پاسخ به سؤال اول همچنان ادامه یافت. بالاخره، در ۱۹۶۳، پل کوهن کاملاً بهسؤال جواب داد. او ثابت کرد که اصل موضوع انتخاب درحقیقت از دیگر اصول موضوع موجود، مستقل است. به عبارت دیگر، اصل موضوع انتخاب را نمی‌توان به‌عنوان یك قضیه با استفاده از اصول موضوع کلاسیك ریاضی ثابت کرد.

امروزه اصل موضوع انتخاب را به‌عنوان یك اصل جدید اکثراً پذیرفته‌اند، و لزوم آن برای آنالیز حقیقی جدید، نظریهٔ اعداد اصلی و ترتیبی ترامتناهی، جبر جدید و عرصهٔ وسیعی از توپولوژی روشن شده‌است.

۸

اعداد ترتیبی وحساب ترتیبی

مفهوم اعــداد ترتیبی را معرفی کرده و شگفتیهای حساب ترتیبی را در مطالعهٔ جمع و ضرب ترتیبی ذکــر کرده‌ایم. عدد اصلی را از نو بــه‌صورت عدد ترتیبی آغازی بررسی کرده، و پارادوکس بورالی-فورتی را شرح داده‌ایم.

۱. مفهوم اعداد ترتیبی

به‌طور ساده می‌توان گفت که در محاسبات متناهی، اعداد اصلی همان اعــداد «شمارشی» ... ,۳ ,۲ ,۱ و «اعداد ترتیبی» همان اعــداد «مرتبه‌ای»: اولین، دومین، سومین، و ... هستند. تمایز بین اعداد اصلی متناهی و اعداد ترتیبی متناهی آنقدر ناچیز است که اعداد طبیعی را می‌توان درهر دومورد به‌کاربرد. اما مفهوم «عدد ترتیبی نامتناهی» حقیقتاً چیست؟ همچنانکه عدد اصلی ترامتناهی از مجموعــهٔ نامتناهی ناشی می‌شود، عدد ترتیبی نامتناهی (= ترامتناهی) ازمجموعهٔ خوشترتیب نامتناهی به‌وجود می‌آید. تعریف زیر درمجموعه‌های خوشترتیب به‌تعریف رابطهٔ همتوانی درمجموعه‌ها شبیه است.

تعریف ۱. می‌گوییم دومجموعهٔ خوشترتیب $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ همریخت ترتیبی هستند اگر یك دوسویی مانند $f: A \to B$ وجود داشته‌باشد به قسمی که برای هر $a_1, a_2 \in A$ و $a_1 \leqslant a_2$ داشته باشیم $f(a_1) \leqslant' f(a_2)$. تابع f را یك همریختی ترتیبی می‌نامیم.

ازاین تعریف نتیجه می‌شود که اگر $f: A \to B$ یك همریختی ترتیبی باشد، وارون آن، یعنی $f^{-1}: B \to A$ نیز یك همریختی ترتیبی است و به‌علاوه اگر $g: B \to C$ نیز یك همریختی ترتیبی باشد، ترکیب f و g یعنی $g \circ f: A \to C$ نیز یك همریختی ترتیبی است. اگر دومجموعهٔ $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ همریخت ترتیبی باشند، می‌نویسیم $(A, \leqslant) \approx (B, \leqslant')$ ویا به‌طور ساده $A \approx B$. «رابطهٔ» همریخت ترتیبی $\approx$، همانند رابطهٔ همتوانی $\sim$، انعکاسی، متقارن و متعدی است[1].

درحالت کلی، اعداد ترتیبی، متناهی یا ترامتناهی، را یك مفهوم اولیه می‌گیریم که قاعده‌های زیر درآن صادق‌اند:

ت-۱. به هرمجموعهٔ خوشترتیب $(A, \leqslant)$ یك عدد ترتیبی، که آن را با $\operatorname{ord}(A, \leqslant)$ نشان می‌دهیم، نسبت داده می‌شود، و اگر α یك عدد ترتیبی باشد، یك مجموعهٔ خوشترتیب $(A, \leqslant)$ وجود دارد به‌قسمی که $\operatorname{ord}(A, \leqslant) = \alpha$.

ت-۲. فرض کنید $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ دو مجموعهٔ خوشترتیب هستند. $\operatorname{ord}(A, \leqslant) = \operatorname{ord}(B, \leqslant')$ اگر وتنها اگر $(A, \leqslant) \approx (B, \leqslant')$. چون هر دو مجموعهٔ خوشترتیب متناهی که تعداد عضوهایشان مساوی باشند همریخت ترتیبی هستند، نمادهای مناسب زیر را انتخاب می‌کنیم:

ت-۳. $\operatorname{ord}(A, \leqslant) = ۰$ اگر وتنها اگر $A = \varnothing$.

ت-۴. اگر مجموعهٔ خوشترتیب $(A, \leqslant)$ به‌قسمی باشد که برای عدد طبیعی k داشته باشیم $A \sim \{۱, ۲, \ldots, k\}$، آنگاه $\operatorname{ord}(A, \leqslant) = k$.

عدد ترتیبی مجموعه اعداد طبیعی $\mathbf{N}$، با رابطهٔ کوچکتر یا مساوی معمولی، را معمولاً با حرف یونانی امگا، ω، نشان می‌دهند؛ یعنی $\omega = \operatorname{ord}\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$[2].

هرمجموعهٔ مفروض فقط یك عدد اصلی دارد، درصورتی که یك مجموعه ممکن‌است تحت خوشترتیبهای متفاوت، عددهای ترتیبی متمایز داشته باشد. مثلاً، مجموعهٔ اعداد طبیعی را می‌توان به‌صورت

$$(\mathbf{N}, \leqslant) = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$$

ویا به‌صورت

$$(\mathbf{N}, \leqslant') = \{۱, ۳, ۵, \ldots, ۲, ۴, ۶, \ldots\}$$

خوشترتیب کرد. بررسی اینکه این دومجموعهٔ خوشترتیب همریخت ترتیبی نیستند را به‌خواننده محول می‌کنیم. درنتیجه، $\operatorname{ord}(\mathbf{N}, \leqslant') \neq \omega$.

---

۱. دراینجا $\approx$ به معنای رابطه‌ای روی یك مجموعه ازمجموعه‌های خوشترتیب است (قضیهٔ ۵ فصل ۵).

۲. دراین فصل، ازاین به‌بعد قرار می‌گذاریم اعضای مجموعه را به‌ترتیبی بنویسیم که ترتیب درمجموعه را نشان دهد. بنابراین $\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ مجموعهٔ خوشترتیب $\mathbf{N}$ را با ترتیب معمولی و $\{۱, ۳, ۵, \ldots, ۲, ۴, ۶, \ldots\}$ مجموعهٔ $\mathbf{N}$ را با ترتیب دیگری نشان می‌دهد.

تمرین ۱۰۸

۱. فرض کنید A و B دومجموعهٔ متناهی همتوان هستند. همچنین فرض کنید $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ خوشترتیب هستند. ثابت کنید که $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ همریخت ترتیبی هستند.

۲. فرض کنید $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ کلاً مرتب و اجتماعی از دومجموعهٔ B و C است. همچنین فرض کنید دومجموعهٔ B و C با رابطه‌های القایی از رابطهٔ ترتیبی A، یعنی $\leqslant$، خوشترتیب هستند. ثابت کنید $(A, \leqslant)$ خوشترتیب است.

۳. روی مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbf{N}$ دو رابطهٔ خوشترتیبی به‌صورتهای زیر درنظر می‌گیریم:

$$(\mathbf{N}, \leqslant)=\{۱, ۲, ۳, \cdots\}$$

و

$$(\mathbf{N}, \leqslant')=\{۱, ۳, ۵, \cdots, ۲, ۴, ۶, \cdots\}$$

ثابت کنید $(\mathbf{N}, \leqslant)$ و $(\mathbf{N}, \leqslant')$ همریخت ترتیبی نیستند.

۴. درمسئلهٔ ۳ی بالا، نشان دهید که $(\mathbf{N}, \leqslant')$ خوشترتیب است.

۲. ترتیب اعداد ترتیبی

اصل ت-۲، از بخش قبل، به ما می‌گوید چه موقع دو عدد ترتیبی مساوی‌اند و چه موقع نامساوی. اگر دوعدد ترتیبی نامساوی باشند، می‌خواهیم بتوانیم بگوییم یکی «کوچکتر» از دیگری است. تعریف زیر همین منظور را برآورده می‌کند.

تعریف ۲. گیریم α و β دوعدد ترتیبی، ومجموعه‌های خوشترتیب $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ به‌قسمی هستندکه $\alpha=\operatorname{ord}(A, \leqslant)$ و $\operatorname{ord}(B, \leqslant')=\beta$. گوییم α کوچکتر از β یا مساوی با آن است اگر وتنها اگر $(A, \leqslant)$ با یك قطعه از $(B, \leqslant')$ همریخت ترتیبی باشد. این رابطه را با $\alpha \leqslant \beta$ ویا $\beta \geqslant \alpha$ نشان می‌دهیم. اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\alpha \neq \beta$، می‌نویسیم $\alpha < \beta$ ویا $\beta > \alpha$.

بدیهی است که تعریف ۲ به‌انتخاب مجموعه‌های خوشترتیب $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ بستگی ندارد. همچنین واضح است که رابطهٔ «$\leqslant$» انعکاسی و متعدی است. درقضیهٔ ۲ ثابت می‌کنیم که این رابطه، پادمتقارن نیز هست. پس $\leqslant$، یك «رابطهٔ» ترتیبی جزئی است. هدف نهایی ما این است که ثابت کنیم $\leqslant$ یك «رابطهٔ» کلاً مرتب است[1].

---

۱. دقیقاً بگوییم، «$\leqslant$» یك رابطه نیست زیراکه «حوزهٔ» آن یك مجموعه نیست (قضیهٔ ۱۳ را ببینید). معهذا، ما آنرا یك رابطه می‌گیریم که درهر مجموعهٔ مفروض ازاعداد ترتیبی تعریف شده‌است (قضیهٔ ۵ فصل ۵).

قضیهٔ ۱. تنها همریختی ترتیبی مجموعهٔ خوشترتیب $(A, \leqslant)$ روی یك قطعه از $(A, \leqslant)$، نگاشت همانی از A روی A است.

برهان. به‌روش برهان خلف عمل می‌کنیم. فرض کنید A_a قطعه‌ای از A است و همریختی $f: A \to A_a$ وجود دارد. آنگاه $f(a) < a$، و درنتیجه مجموعهٔ $B = \{x \in A | f(x) < x\}$ تهی نیست. کوچکترین عضو B را b می‌گیریم. آنگاه $f(b) < b$، و چون همریختی ترتیبی، اکیداً صعودی است داریم $f(f(b)) < f(b)$. این ثابت می‌کند که $f(b)$ که از b کوچکتر است، در B است، و این یك تناقض است، زیرا b کوچکترین عضو B است. از این تناقض نتیجه می‌گیریم که یك مجموعهٔ خوشترتیب نمی‌تواند با یك قطعهٔ سرهٔ خودش همریخت ترتیبی باشد. اکنون برای اینکه برهان قضیه را کامل کنیم باید ثابت کنیم که نگاشت همانی $I_A: A \to A$ تنها همریختی ترتیبی از A روی A است.

گیریم $g: A \to A$ یك همریختی ترتیبی باشد. آنگاه چون دوهمریختی ترتیبی g و I_A، همریختی همانی، اکیداً صعودی هستند، دوبار از قضیهٔ ۱۰ فصل ۷ استفاده کرده می‌گوییم: برای هر $x \in A$ داریم $I_A(x) \leqslant g(x) \leqslant I_A(x)$ وبنابراین $g = I_A$.

قضیهٔ ۲. اگر دوعدد ترتیبی α و β به‌قسمی باشند که $\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \alpha$، آنگاه $\alpha = \beta$.

برهان. گیریم دومجموعهٔ خوشترتیب $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ به‌قسمی هستند که $\alpha = \mathrm{ord}(A, \leqslant)$ و $\beta = \mathrm{ord}(B, \leqslant')$. بنابرفرض $\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \alpha$، یعنی دوهمریختی ترتیبی

$$f: A \to D \quad \text{و} \quad g: B \to C$$

وجود دارند که در آنها D قطعه‌ای از B و C قطعه‌ای از A است. درنتیجه تابع $h: A \to C$ باضابطهٔ $h(x) = g(f(x))$ به‌ازای هر $x \in A$، یك همریختی ترتیبی از A روی یك قطعه از C، مانند E، می‌باشد. اما بنابرقضیهٔ ۱ وقضیهٔ ۷ ازفصل ۷، باید داشته باشیم $E = A$. درنتیجه $C = A$ وهمریختی ترتیبی $g: B \to A$ نشان می‌دهد که $\alpha = \beta$.

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که رابطهٔ $\leqslant$ برای اعداد ترتیبی، یك رابطهٔ ترتیبی جزئی است. درقضیهٔ زیر نشان می‌دهیم که $\leqslant$، یك رابطهٔ کلاً مرتب است.

قضیهٔ ۳. برای هر دوعدد ترتیبی α و β، یا $\alpha \leqslant \beta$ یا $\beta \leqslant \alpha$.

برهان. گیریم $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ دومجموعهٔ خوشترتیب هستند به قسمی که $\alpha = \mathrm{ord}(A, \leqslant)$ و $\mathrm{ord}(B, \leqslant') = \beta$. ثابت می‌کنیم که یا A با یك قطعه از B همریخت ترتیبی است یا B با یك قطعه از A همریخت ترتیبی است. یك عضو $a \in A$ را

پذیرفتنی گوییم هر گاه قطعهٔ A_a از A بـا یك قطعه B_b از B $(b\in B)$ همریخت ترتیبی باشد. گیریم M مجموعهٔ تمام عضوهای پذیرفتنی A است. از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که برای هرعضو پذیرفتنی a، یـك عضو یکتای $b\in B$ وجود دارد به‌قسمی که $A_a\approx B_b$ (مسئله ۸ را ببینید). درنتیجه یـك نگاشت خوشتعریف $f:M\to B$ که بـا $f(a)=b$ ، اگر $A_a\approx B_b$ تعریف می‌شود، وجود دارد. دوباره ازقضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که تابع f، یك‌به‌یك است. با خواننده است بررسی کندکه $f:M\to B$ اکیداً صعودی است و $f(M)=N$ قطعه‌ای از B است.

حال فرض‌کنیم کـه نه A با یك قطعه از B همریخت ترتیبی است و نه B باقطعه‌ای از A. پس مجموعه‌های $A-M$ و $B-N$ تهی نیستند؛ گیریم p و q به‌ترتیب کوچکترین عضوهـای $A-M$ و $B-N$ هستند. آنگاه باید داشته‌بـاشیم $A_p=M\approx N=B_q$. بنابراین p پذیرفتنی است. با این تناقض برهان قضیهٔ ۳ کامل است.

قضیهٔ زیر نتیجهٔ سادهٔ دیگری از قضیهٔ ۱ است.

قضیهٔ ۴. گیریـم $(A,\leqslant)$ و $(B,\leqslant')$ دومجمـوعـهٔ خوشترتیب هستند. آنگـاه $\operatorname{ord}(A,\leqslant)\prec\operatorname{ord}(B,\leqslant')$ اگر و تنها اگر A بـا یك قطعهٔ سرهٔ B همریخت ترتیبی باشد.

برهان. به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

اکنون نتیجه‌هایی را کـه دراین بخش بـه‌دست آوردیم، در قضیهٔ سه حالتی زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیهٔ ۵. گیریم α و β دوعدد ترتیبی هستند. آنگاه تنها یکی از رابطه‌های ذیل برقرار است:

(الف) $\alpha<\beta$

(ب) $\alpha=\beta$

(ج) $\alpha>\beta$.

تمرین ۲۰۸

۱. نشان دهید $\operatorname{ord}\{1,3,5,\cdots,2,4,6,\cdots\}>\operatorname{ord}\{1,2,3,\cdots\}$ (مسئلهٔ ۳ تمرین ۱۰۸ را ببینید).

۲. حکم زیر را، که دربرهان قضیهٔ ۳ عنوان شده‌است، ثابت‌کنید: برای هرعضو پذیرفتنی a، یك عضو یکتای $b\in B$ وجود دارد به‌قسمی که $A_a\approx B_b$.

۳. نشان دهیدکه در برهان قضیهٔ ۳، M، مجموعهٔ عضوهای پذیرفتنی، یك قطعهٔ A است.

۴. ثابت کنید که تابع $f:M\to B$ که با $f(a)=b$، اگر $A_a\approx B_b$ تعریف شده و در برهان قضیهٔ ۳ عنوان شده‌است، یك به یك و اکیداً صعودی است و نیز ثابت کنید که $f(M)$ یك قطعهٔ B است.

۵. قضیهٔ ۴ را ثابت کنید.

۶. گیریم k یك عدد طبیعی باشد. ثابت کنید

(الف) $\operatorname{ord}\{k,k+1,k+2,\ldots\}=\omega$

(ب) $\operatorname{ord}\{k,k+1,k+2,\ldots,0,1,2,3,\ldots,k-1\}>\omega$.

۷. کوچکترین عدد ترتیبی نامتناهی چیست؟

۸. با توجه به برهان قضیهٔ ۳ نشان دهید که برای هرعضو پذیرفتنی a، یك عضو یکتای $b\in B$ وجود دارد به‌قسمی که $A_a\approx B_b$.

۳. جمع اعداد ترتیبی

برای هر دومجموعهٔ خوشترتیب مجزای $(A,\leqslant)$ و $(B,\leqslant')$ رابطهٔ کلاً مرتب $\leqslant^*$ را روی $A\cup B$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۱) اگر a و b هردو در A (یا در B) باشند، می‌نویسیم $a\leqslant^* b$ اگر وتنها اگر $a\leqslant b$ (یا $a\leqslant' b$).

(۲) اگر $a\in A$ و $b\in B$، قرار می‌گذاریم که $a\leqslant^* b$.

به‌سادگی دیده می‌شود که $(A\cup B,\leqslant^*)$ یك مجموعهٔ خوشترتیب است[1] (مسئلهٔ ۲ تمرین ۱۰۸ را ببینید). طبیعی است برای «مجموع» $\operatorname{ord}(A,\leqslant)+\operatorname{ord}(B,\leqslant')$، $\operatorname{ord}(A\cup B,\leqslant^*)$ را انتخاب کنیم. درحالتی‌که A و B مجزا نباشند، به‌یك عمل کوچك جنبی احتیاج است: حاصلضربهای دکارتی $A\times\{0\}$، $B\times\{1\}$ را تشکیل دهید و در $A\times\{0\}$ رابطهٔ خوشترتیبی $\leqslant_0$ را با $(a,0)\leqslant_0(b,0)$ اگر وتنها اگر در $(A,\leqslant)$، $a\leqslant b$ تعریف کنید. همچنین، $\leqslant'_1$ روی $B\times\{1\}$ را با $(c,1)\leqslant'_1(d,1)$ اگر و تنها اگر $c\leqslant' d$ تعریف کنید. بدیهی است که $(A,\leqslant)\approx(A\times\{0\},\leqslant_0)$، $(B,\leqslant')\approx(B\times\{1\},\leqslant'_1)$، و $A\times\{0\}$ و $B\times\{1\}$ مجزا هستند. بنابراین اگر A و B مجزا نباشند، می‌توانیم مجموعه‌های مجزای $(A\times\{0\},\leqslant_0)$ و $(B\times\{1\},\leqslant'_1)$ را به‌جای $(A,\leqslant)$ و $(B,\leqslant')$ به‌کار بریم.

تعریف ۳. گیریم α و β اعداد ترتیبی هستند. مجموع ترتیبی α و β، که با $\alpha+\beta$ نشان داده می‌شود، عدد ترتیبی $\operatorname{ord}(A\cup B,\leqslant^*)$ است، که درآن $(A,\leqslant)$ و $(B,\leqslant')$

---

۱. باید تذکر داد که در $(A\cup B,\leqslant^*)$ هرعنصر $a\in A$ از هر عنصر $b\in B$ کوچکتر است، و در $(B\cup A,\leqslant^*)$ هرعنصر $b\in B$ از هر عنصر $a\in A$ کوچکتر است. بنابراین، $(A\cup B,\leqslant^*)$ و $(B\cup A),\leqslant^*)$ باید متمایز به‌حساب آیند.

مجموعه‌های خوشترتیب مجزا، و به‌قسمی هستند که $\text{ord}(A, \leqslant)=\alpha$ و $\text{ord}(B, \leqslant')=\beta$.

درمسئلهٔ ۱ از خواننده خواسته شده نشان دهد که تعریف مجموع ترتیبی، $\alpha+\beta$، از انتخاب مجموعه‌های خوشترتیب A و B مستقل است.

اگر α و β دوعدد ترتیبی متناهی باشند، مجموع ترتیبی $\alpha+\beta$ با مجموع معمولی دوعدد صحیح نامنفی سازگار است. اما، برای اعداد ترتیبی ترامتناهی، ممکن است ویژگیهای مجموع ترتیبی با حالت متناهی خیلی متفاوت باشد: مثلاً، $\alpha+\beta$ ممکن است با $\beta+\alpha$ برابر نباشد (مثال ۲ زیر را ببینید).

مثال ۱. مجموع ترتیبی $۴+۵$ دوعدد ترتیبی متناهی ۴ و ۵ را پیدا کنید.

حل: چون $۵=\text{ord}\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $۴=\text{ord}\{۵, ۶, ۷, ۸\}$، داریم $۴+۵=\text{ord}\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \cdots, ۸\}=۹$.

مثال ۲. گیریم k یك عدد ترتیبی متناهی ناصفر است. نشان دهید که $k+\omega=\omega$ و $\omega+k\neq\omega$. از این‌رو، مجموع ترتیبی درحالت کلی جابه‌جایی نیست.

برهان. چون $k=\text{ord}\{۰, ۱, \cdots, k-۱\}$ و $\omega=\text{ord}\{k, k+۱, \cdots\}$، داریم

$$k+\omega=\text{ord}\{۰, ۱, ۲, \cdots, k-۱, k+۱, \cdots\}=\omega$$

و

$$\omega+k=\text{ord}\{k, k+۱, \cdots, ۰, ۱, ۲, \cdots, k-۱\}>\omega$$

از این‌رو، $\omega+k\neq\omega$ (مسئلهٔ ۶ (ب)، تمرین ۲.۸ را ببینید).

قضیهٔ ۶. گیریم α، β، و γ اعداد ترتیبی هستند. آنگاه

(الف) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (قانون شرکتپذیری)

(ب) $\beta<\gamma$ نتیجه می‌دهد که $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$

(ج) $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$ نتیجه می‌دهد $\beta=\gamma$ (حذف چپ).

برهان. (الف) را خودتان ثابت کنید.

(ب) فرض کنید $(A, \leqslant)$، $(B, \leqslant')$ و $(C, \leqslant'')$ مجموعه‌های خوشترتیب هستند به قسمی که $\text{ord}(A, \leqslant)=\alpha$، $\text{ord}(B, \leqslant')=\beta$ و $\text{ord}(C, \leqslant'')=\gamma$، $A\cap B=\varnothing$ و $A\cap C=\varnothing$. چون $\beta<\gamma$، بنابرقضیهٔ ۴، B با یك قطعهٔ سره C_z از C همریخت ترتیبی است؛ فرض کنید $g: B\rightarrow C_z$ این همریختی ترتیبی است، فرض کنید اجتماعهای مجزای $A\cup B$ و $A\cup C$ با رابطهٔ خوشترتیب $\leqslant^*$ که در اول این بخش

تعریف شد، مرتب شده‌است. آنگاه، تحت این رابطه‌های خوشترتیبی، تابع

$$f: A \cup B \to A \cup C$$

که با

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{اگر } x \in A \\ g(x) & \text{اگر } x \in B \end{cases}$$

تعریف شده‌است، یك همریختی ترتیبی از $A \cup B$ روی قطعهٔ سرهٔ $A \cup C_z$ از $A \cup C$ است. پس، بنا بر قضیهٔ ۴، $\alpha+\beta < \alpha+\gamma$.

(ج) فرض کنید برخلاف حکم اعداد ترتیبی α، β و γ وجود دارند به قسمی که $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$ و $\beta \neq \gamma$. بنا بر قضیهٔ ۵، می‌توانیم فرض کنیم که $\beta < \gamma$ (برای حالت $\gamma < \beta$ به‌طریق مشابه عمل می‌کنیم). درنتیجه، بنا بر قسمت (ب)، داریم $\alpha+\beta < \alpha+\gamma$ که یك تناقض است.

ارزش دارد متذکر شویم که اگرچه مجموع ترتیبی حذفی چپ است، حذفی راست نیست. یعنی از $\beta+\alpha=\gamma+\alpha$ الزاماً $\beta=\gamma$ نتیجه نمی‌شود (مسئلهٔ ۴ را ببینید). همچنین، درمقایسه با قضیهٔ ۶ (ب)، از $\beta < \gamma$، $\beta+\alpha < \gamma+\alpha$ نتیجه نمی‌شود (مسئله‌های ۵ و ۶ را ببینید).

تمرین ۳.۸

۱. گیریم $(A_1, \leqslant_1)$، $(A_2, \leqslant_2)$، $(B_1, \leqslant_1')$، و $(B_2, \leqslant_2')$ مجموعه‌های خوشترتیب هستند به‌قسمی که $A_1 \approx A_2$، $B_1 \approx B_2$، $A_1 \cap B_1 = \varnothing$، و $A_2 \cap B_2 = \varnothing$. ثابت کنید $(A_1 \cup B_1, \leqslant_1^*) \approx (A_2 \cup B_2, \leqslant_2^*)$.

۲. نشان دهید که برای هرعدد ترتیبی α، $\alpha+0=\alpha=0+\alpha$.

۳. ثابت کنید که مجموع ترتیبی شرکتپذیر است: برای هر سه عدد ترتیبی α، β، و γ
$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

۴. با ارائهٔ یك مثال نقیض نشان دهید که مجموع ترتیبی حذفی راست نیست: اعداد ترتیبی α، β و γ وجود دارند به‌قسمی که $\beta+\alpha=\gamma+\alpha$ اما $\beta \neq \gamma$.

۵. قضیهٔ تغییریافتهٔ ۶ (ب) زیر را ثابت کنید: اگر α، β، و γ اعداد ترتیبی باشند به‌قسمی که $\beta < \gamma$، آنگاه $\beta+\alpha \leqslant \gamma+\alpha$ (مسئلهٔ ۶ در زیر را ببینید).

۶. نشان دهید که درمسئله ۵ از $\beta < \gamma$ الزاماً $\beta+\alpha < \gamma+\alpha$ نتیجه نمی‌شود (قضیهٔ ۶ (ب) را ببینید).

۷. ثابت کنید که $\alpha < \beta$ اگر وتنها اگر $\alpha+1 \leqslant \beta$.

۸. وارون قضیهٔ ۶ (ب) را ثابت کنید: اگر $\alpha+\beta < \alpha+\gamma$ آنگاه $\beta < \gamma$.

۹. گیریم اعداد ترتیبی α و γ به‌قسمی هستند که $\alpha \leqslant \gamma$. ثابت کنید که یك βی یکتا وجود

دارد به‌قسمی که $\alpha+\beta=\gamma$. [این β را می‌توان با $(-\alpha)+\gamma$ نمایش داد].

۱۰. ثابت کنید که برای هرعدد ترتیبی، $\alpha+1>\alpha$.

۱۱. آیا عددی ترتیبی وجود دارد که ازهر عدد ترتیبی دیگر بزرگتر باشد؟

۴. ضرب اعداد ترتیبی

درحساب اعداد اصلی، حاصلضرب دوعدد ترتیبی $\operatorname{card} A$ و $\operatorname{card} B$، $\operatorname{card}(A\times B)$ تعریف شده‌است. برای تعریف «حاصلضرب» اعداد ترتیبی $\operatorname{ord}(A,\leqslant)$ و $\operatorname{ord}(B,\leqslant')$، نخست باید تصمیم بگیریم که چه رابطهٔ خوشترتیبی روی حاصلضرب دکارتی $A\times B$ تعریف کنیم. طبیعی است که رابطهٔ «الفبایی» را که در زیر تعریف می‌کنیم، بر دیگر رابطه‌های ترتیبی ترجیح دهیم.

تعریف ۴. گیریم $(A,\leqslant)$ و $(B,\leqslant')$ مجموعه‌های خوشترتیب هستند. آنگاه روی $A\times B$ رابطهٔ الفبایی $\leqslant^*$ به‌این صورت تعریف می‌شود: (الف) اگر $a<x$ آنگاه برای هر b و y در B، $(a,b)\leqslant^*(x,y)$. اگر $a=x$ و $b\leqslant' y$ آنگاه $(a,b)\leqslant^*(x,y)$.

قضیهٔ ۷. گیریم $(A,\leqslant)$ و $(B,\leqslant')$ مجموعه‌های خوشترتیب هستند. آنگاه رابطهٔ الفبایی $\leqslant^*$ روی $A\times B$ یك رابطهٔ خوشترتیب است.

برهان. آشکار است که $\leqslant^*$ یك رابطهٔ کلاً مرتب روی $A\times B$ است. برای اینکه نشان دهیم که این رابطهٔ کلاً مرتب، خوشترتیب است، S را یك زیرمجموعهٔ غیرتهی دلخواهی از $A\times B$ فرض می‌کنیم. ثابت خواهیم کرد که S کوچکترین عنصر دارد. نخست توجه می‌کنیم که مجموعهٔ

$$p_A(S)=\{x\in A|(x,y)\in S,\ y\in B \text{ برای یك}\}$$

یك زیرمجموعهٔ غیرتهی از مجموعهٔ خوشترتیب A است و بنابراین یك کوچکترین عنصر، مانند a دارد. حال مجموعهٔ

$$\{y\in B|(a,y)\in S\}$$

را در نظر بگیرید که یك زیرمجموعهٔ غیرتهی ازمجموعهٔ خوشترتیب B است و ازاین‌رو یك کوچکترین عنصر مانند b دارد. حال کاملاً واضح است که عنصر (a,b) در S، کوچکترین عنصر S است. بنابراین، $(A\times B,\leqslant^*)$ یك مجموعهٔ خوشترتیب است.

قضیهٔ ۸. گیریم $(A_1,\leqslant_1)$، $(A_2,\leqslant_2)$، $(B_1\leqslant'_1)$، و $(B_2\leqslant'_2)$ مجموعه‌های خوشترتیب‌هستند به‌قسمی که $(A_1,\leqslant_1)\approx(A_2,\leqslant_2)$ و $(B_2,\leqslant'_2)\approx(B_1,\leqslant'_1)$. آنگاه

$$(A_1 \times B_1, \leqslant_1^*) \approx (A_2 \times B_2, \leqslant_2^*)$$

برهان. گیریم $f: A_1 \to A_2$ و $g: B_1 \to B_2$ همریختیهای ترتیبی‌هستند. به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم که نشان دهد تابع

$$f \times g: A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$$

که با $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ برای هر $(x, y) \in A_1 \times B_1$ تعریف شده است، یك همریختی ترتیبی است.

با کمك قضیه‌های ۷ و ۸ می‌توانیم حاصلضرب دوعدد ترتیبی را تعریف کنیم.

تعریف ۵. برای هردو عدد ترتیبی α و β، حاصلضرب ترتیبی $\beta\alpha$ را با

$$\beta\alpha = \operatorname{ord}(A \times B, \leqslant^*)$$

تعریف می‌کنیم، $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ مجموعه‌های خوشترتیبی هستند به‌قسمی که $\alpha = \operatorname{ord}(A, \leqslant)$، $\beta = \operatorname{ord}(B, \leqslant')$، و $\leqslant^*$ ترتیب الفبایی $A \times B$ است.

توجه کنید که مطابق با تعریف ۵، $\operatorname{ord}(A \times B, \leqslant^*)$، $\beta\alpha$ است نه $\alpha\beta$. حاصلضرب ترتیبی جابه‌جایی نیست.

مثال ۳. حاصلضربهای ترتیبی ۲ω و $\omega۲$ را باهم مقایسه کنید.

حل: گیریم $(A, \leqslant) = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$ و $(B, \leqslant') = \{۰, ۱\}$. بنابراین $\operatorname{ord}(A, \leqslant) = \omega$ و $\operatorname{ord}(B, \leqslant') = ۲$. گیریم $A \times B$ با ترتیب الفبایی مرتب شده‌است، دراین‌صورت $۲\omega = \operatorname{ord}(A \times B, \leqslant^*)$. ازطرف‌دیگرتابع $f: A \times B \to A$ که با

$$f(j, k) = \begin{cases} ۲j - ۱ & \text{اگر } k = ۰ \\ ۲j & \text{اگر } k = ۱ \end{cases}$$

تعریف شده‌است، یك همریختی ترتیبی است، پس $۲\omega = \omega$.

اکنون، گیریم $\leqslant'^*$ ترتیب الفبایی روی $B \times A$ است، در این صورت $\omega۲ = \operatorname{ord}(B \times A, \leqslant'^*)$. بررسی $\operatorname{ord}(B \times A, \leqslant'^*) = \omega + \omega$ را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. بنابراین $\omega۲ \neq ۲\omega$.

قضیهٔ ۹. گیریم α، β، و γ اعداد ترتیبی هستند. آنگاه

(الف) $(\gamma\beta)\alpha=\gamma(\beta\alpha)$ (قانون شرکت‌پذیری)

(ب) $\gamma(\alpha+\beta)=\gamma\alpha+\gamma\beta$ (قانون پخش‌پذیری چپ)

برهان. با خواننده است.

قضیهٔ ۱۰. گیریم α، β، و γ اعداد ترتیبی هستند به‌قسمی‌که $\gamma > 0$. آنگاه

(الف) $\alpha < \beta$ نتیجه می‌دهد $\gamma\alpha < \gamma\beta$.

(ب) $\gamma\alpha=\gamma\beta$ نتیجه می‌دهد $\alpha=\beta$ (حذف چپ).

برهان. (الف) گیریم $(A, \leqslant)$، $(B, \leqslant')$، و $(C, \leqslant'')$ مجموعه‌های خوشترتیب هستند به‌قسمی‌که $\operatorname{ord}(A, \leqslant)=\alpha$، $\operatorname{ord}(B, \leqslant')=\beta$، و $\operatorname{ord}(C, \leqslant'')=\gamma$. اگر $\alpha < \beta$، آنگاه یك عنصر $p\in B$ وجود دارد به‌قسمی‌که $A\approx B_p$. گیریم q کوچکترین عنصر C است و $A\times C$ و $B\times C$ با رابطهٔ الفبایی مرتب شده‌اند. نتیجه می‌شود که $A\times C$ با $B_p\times C$ که با رابطهٔ ترتیبی القایی از $B\times C$ مرتب شده، همریخت است، و همچنین نتیجه می‌شود که $B_p\times C$ قطعهٔ

$$(B\times C)_{(p,q)}=\{(x, y)\in B\times C|(x, y)<'^{*}(p, q)\}$$

از $B\times C$ است. این ثابت می‌کند که $\gamma\alpha < \gamma\beta$.

(ب) برخلاف حکم فرض کنید که اعداد ترتیبی α، β، و $\gamma > 0$ وجود دارند به‌قسمی‌که $\gamma\alpha=\gamma\beta$ و $\alpha\neq\beta$. فرض می‌کنیم که $\alpha < \beta$ (حالت $\beta < \alpha$ به‌طریق مشابه عمل می‌شود). آنگاه، بنابر قسمت (الف) این قضیه، داریم $\gamma\alpha < \gamma\beta$، که با $\gamma\alpha=\gamma\beta$ تناقض دارد.

باید توجه شود که اگرچه ضرب ترتیبی ازچپ پخش‌پذیر و از چپ حذفی است، نه از راست پخش‌پذیر است و نه از راست حذفی (مسئله‌های ۴ و ۹ را ببینید).

تمرین ۴.۸

۱. برهان قضیهٔ ۸ را کامل کنید.

۲. نشان دهید که

(الف) برای هرعدد ترتیبی α، $1\alpha=\alpha=\alpha 1$ و $0\alpha=0=\alpha 0$

(ب) $\alpha\beta=0$، اگر و تنها اگر $\alpha=0$ یا $\beta=0$.

۳. درستی حکمهای زیر را تحقیق کنید.

(الف) $\omega 2=\omega+\omega$

(ب) برای هرعدد ترتیبی متناهی $k\neq 0$، $k\omega=\omega$.

۴. با یك مثال نقیض نشان دهید که ضرب ترتیبی پخشپذیر راست نیست، یعنی

$$(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$$

الزاماً درست نیست.

۵. ثابت کنید که ضرب ترتیبی پخشپذیر چپ است، یعنی، برای تمام اعداد ترتیبی α، β، و γ داریم $\gamma(\alpha+\beta)=\gamma\alpha+\gamma\beta$.

۶. ثابت کنید کـه ضرب ترتیبی شرکتپذیر است: برای تمام اعداد ترتیبی α، β، و γ $(\gamma\beta)\alpha=\gamma(\beta\alpha)$.

۷. قضیهٔ زیرین، نظیر قضیهٔ ۱۰ (الف)، را ثابت کنید: اگر α، β و γ بهقسمی باشند که $\alpha<\beta$ و $\gamma>0$، آنگاه $\alpha\gamma\leqslant\beta\gamma$. (مسئلهٔ ۸، در زیر را ببینید).

۸. درمسئلهٔ ۷ بالا نشان دهید که از $\alpha<\beta$ و $\gamma>0$ الزاماً $\alpha\gamma<\beta\gamma$ نتیجه نمی‌شود (قضیهٔ ۱۰ (الف) را ببینید).

۹. با یك مثال نقیض نشان دهید کـه ضرب ترتیبی حذفی راست نیست: اعداد ترتیبی $\alpha, \beta, \gamma>0$ وجود دارند بهقسمی که $\alpha\gamma=\beta\gamma$، اما $\alpha\neq\beta$.

۱۰. وارون قضیهٔ ۱۰ (الف) را که در زیر می‌آیـد ثابت کنید: اگر α، β و γ اعداد ترتیبی باشند بهقسمی که $\gamma\alpha<\gamma\beta$ و $\gamma>0$ آنگاه $\alpha<\beta$.

۵. نتیجه

ممکن است طبیعی به‌نظر رسد که بعد ازضرب، توان اعداد ترتیبی را تعریف کنیم. اما، ما آن را برای کتابهای سطح بالاتـر می‌گذاریم و در عوض، از تو ترتیب اعداد ترتیبی را بررسی کرده، و سپس یکبار دیگر اعداد اصلی را، اما این بـار از دیدگاه نظریـهٔ اعداد ترتیبی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

قضیهٔ ۱۱. گیریم α یك عدد ترتیبی اختیاری است. آنگاه مجموعهٔ تمام اعداد ترتیبی β بهقسمی که $\beta<\alpha$، یك مجموعهٔ خوشترتیب است که عدد ترتیبی آن α است.

برهان. گیریم $(A, \leqslant)$ مجموعهٔ خوشترتیبی باشد کـه عدد ترتیبی آن α است. برای هرعدد ترتیبی β، با شرط $\beta<\alpha$ و هرمجموعهٔ خوشترتیب $(B, \leqslant')$ بـا شرط $\mathrm{ord}(B, \leqslant')=\beta$، β با یك قطعهٔ سرهٔ A_b، $b\in A$، از A همریخت ترتیبی است. از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود کـه عنصر $b\in A$ با عدد ترتیبی β مشخص می‌شود و یکتاست. در نتیجه تابع خوشتعریف زیر

$$f:\{\beta \mid \text{است } \beta<\alpha \text{ یك عدد ترتیبی } \beta\}\to A$$

که با $f(\beta)=b$ اگر $\beta=\mathrm{ord}(B, \leqslant')$ و $B\approx A_b$، تعریف می‌شود، وجود دارد.

خواننده می‌تواند به‌آسانی نشان دهدکه تابع f یك همریختی ترتیبی است. بنابراین، مجموعهٔ $\{\beta|\beta < \alpha\}$ خوشترتیب است و

$$\text{ord}\{\beta|\beta < \alpha| = \alpha$$

با توجه به قضیهٔ ۱۱، می‌توان عدد ترتیبی α را با مجموعهٔ $\{\beta|\beta < \alpha\}$ یکی درنظر گرفت و به‌این ترتیب هرعدد ترتیبی را یك مجموعهٔ خوشترتیب (از اعداد ترتیبی) دانست. مثلاً

$0 \equiv \varnothing$	$\omega+2 \equiv \{0, 1, 2, \cdots, \omega, \omega+1\}$
$1 \equiv \{0\}$	.
$2 \equiv \{0, 1\}$	.
$3 \equiv \{0, 1, 2\}$	.
.	$\omega 2 \equiv \{0, 1, 2, \cdots, \omega, \omega+1, \cdots\}$
.	$\omega 2+1 \equiv \{0, 1, 2, \cdots, \omega, \omega+1, \cdots, \omega 2\}$
.	.
$\omega \equiv \{0, 1, 2, \cdots\}$	.
$\omega+1 \equiv \{0, 1, 2, \cdots, \omega\}$	.

قضیهٔ ۱۲. هرمجموعه ازاعداد ترتیبی خوشترتیب است.

برهان. برخلاف حکم فرض کنید که یك مجموعهٔ A از اعداد ترتیبی وجود دارد که خوشترتیب نیست. بنابراین یك زیرمجموعهٔ B مانند A وجود دارد که‌کوچکترین عنصر ندارد. درنتیجه، مجموعهٔ B شامل یك دنبالهٔ نامتناهی اکیداً نزولی ازاعداد ترتیبی $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots$ است. این دنباله در $\{\beta|\beta < \alpha_1\}$ واقع است، و بنابراین، مجموعهٔ $\{\beta|\beta < \alpha_0\}$ خوشترتیب نیست، و این قضیهٔ ۱۱ را نقض می‌کند. با این‌تناقض اثبات قضیه‌کامل است.

عدد ترتیبی را به‌صورت مجموعه درنظر بگیریم، مثلاً فرض‌کنیم $\mathscr{N}$ مجموعهٔ تمام اعداد ترتیبی αی همتوان مجموعهٔ $\mathbf{N}$ است (توجه کنید که هر α یك مجموعه و $\mathbf{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی است). این مجموعه اعداد زیر را شامل است:

$$\omega, \omega+1 \cdots, \omega 2, \omega 2+1, \cdots, \omega 3, \omega 4, \cdots, \omega^2, \omega^3, \cdots, \omega^\omega, \cdots, \omega^{(\omega^\omega)}, \cdots, \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}, \cdots$$

بنابرقضیهٔ ۱۲، مجموعهٔ $\mathscr{N}$ خوشترتیب است، و بنابراین کوچکترین عدد ترتیبی یکتای

همتوان $\mathbf{N}$ وجود دارد. این عدد را عدد ترتیبی آغازی مجموعهٔ $\mathbf{N}$ می‌نامند (به‌آسانی دیده می‌شود که ω عدد ترتیبی آغازی $\mathbf{N}$ است). به‌طور کلی، بنابراصل خوشترتیبی و قضیهٔ ۱۲، هرمجموعهٔ X یك عدد ترتیبی آغازی (یکتا) دارد. عددهای ترتیبی آغازی در اصل موضوعهای الف-۱ تا الف-۴ اعداد اصلی صدق می‌کنند (بخش ۱ فصل ۶ را ببینید). این راه دیگری برای تعریف اعداد اصلی به‌وجود می‌آورد. در واقع بعضی از نویسندگان نخست اعداد ترتیبی رامطرح می‌کنند وسپس عدد اصلی مجموعه‌را عدد ترتیبی آغازی آن مجموعه تعریف می‌کنند. ازنظرمنطقی بهتر است اعداد اصلی را به‌صورت اعداد ترتیبی آغازی تعریف‌کنیم، اما از نظر آموزشی و عملی، ترجیح دادیم اعداد اصلی را پیش از اعداد ترتیبی مطرح کنیم.

درقضیهٔ ۱۲، دقت‌کردیم که ازعبارت «مجموعهٔ اعداد ترتیبی» اجتناب‌کنیم. همانند پارادوکس راسل، فرض وجود این مجموعه به‌تناقض می‌انجامد، این تناقض به‌پارادوکس بورالی-فورتی* مشهور است.

قضیهٔ ۱۳. مجموعهٔ تمام اعداد ترتیبی وجود ندارد.

برهان. برخلاف حکم، فرض کنیم که S، مجموعهٔ تمام اعداد ترتیبی وجود دارد. بنابرقضیهٔ ۱۲، S خوشترتیب است. عدد ترتیبی S، که آن را σ می‌نامیم، باید یك‌عضو S باشد. ازقضیه‌های ۱۱ و ۴ نتیجه می‌شود که:

$$\sigma=\operatorname{ord}\{\beta\in S|\beta<\sigma\}=\operatorname{ord}S_\sigma<\operatorname{ord}S=\sigma$$

که یك تناقض است.

برهان دیگر. گیریم S و σ مانند بالا تعریف شده‌اند. آنگاه σ بزرگترین عدد ترتیبی است‌که با رابطهٔ $\sigma<\sigma+1$ تناقض دارد (مسئله ۱۰، تمرین ۳.۸ را ببینید).

تمرین ۵.۸

۱. ثابت کنید که تابع $f:\{\beta|\beta<\alpha\}\to A$، که در برهان قضیهٔ ۱۱ آمده است (و به قسمی است که $f(\beta)=b$، هرگاه برای یك مجموعهٔ خوشترتیب $(B,\leqslant')$، $\beta=\operatorname{ord}(B,\leqslant')$ و $B\approx A_b$ یك همریختی ترتیبی است.

۲. ثابت‌کنیدکه ω، عدد ترتیبی آغازی $\mathbf{N}$ است.

۳. نشان دهید که هرمجموعه یك‌عدد ترتیبی آغازی یکتا دارد.

۴. گیریم X و Y مجموعه هستند. ثابت‌کنید $X\sim Y$ اگر و تنها اگرعدد ترتیبی آغازی X و Y یکی باشند.

۵. گیریم X و Y مجموعه هستند. ثابت کنید $\operatorname{card}X<\operatorname{card}Y$ اگر و تنها اگر عدد ترتیبی آغازی X کوچکتر از عدد ترتیبی آغازی Y باشد.

* Burali-Forti paradox

ضمیمه

اصول موضوع پئانو برای اعداد طبیعی

برای ساختن دستگاه اعداد صحیح، دستگاه اعداد گویا، دستگاه کلاسهای همنهشتی به پیمانهٔ یك عدد صحیح، و غیره از دستگاه اعداد طبیعی ... ,۳ ,۲ ,۱ شروع می‌کنیم. واقعاً اعداد طبیعی چه هستند؟ جوزپه پئانو* (۱۸۵۸–۱۹۳۲) با پنج اصل موضوع، که اصول موضوع پئانو برای اعداد طبیعی نامیده می‌شوند، به‌این سؤال پاسخ داد.[۱]

اصول موضوع پئانو برای اعداد طبیعی. مجموعه‌ای مانند $\mathbf{N}$ که در اصلهای موضوع زیر صدق کند وجود دارد؛ عنصرهای $\mathbf{N}$ را اعداد طبیعی می‌نامند.

۱. یك عنصر ویژه در $\mathbf{N}$ وجود دارد که با ۱ نمایش داده می‌شود.

۲. برای‌هرعنصر $n\in\mathbf{N}$، یك‌عنصریکتای n^+، به‌نام تالی n، در $\mathbf{N}$ وجود دارد.

۳. برای هر $n\in\mathbf{N}$، $n^+\neq 1$.

۴. اگر $n, m\in\mathbf{N}$ و $n^+=m^+$، آنگاه $n=m$.

۵. اگر $\mathbf{P}$ زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{N}$ باشد به‌قسمی‌که $1\in\mathbf{P}$، و از $n\in\mathbf{P}$ نتیجه شود $n^+\in\mathbf{P}$، آنگاه $\mathbf{P}=\mathbf{N}$.

مناسبتر است‌که به‌جای n^+، تالی n، بنویسیم $n+1$، ومی‌نویسیم $1+1=2$، $2+1=3$، $3+1=4$، ...

اصل موضوع ۵، اساس استقرای ریاضی است. جمع اعداد طبیعی به‌صورت استقرایی با

---

* Guiseppi Peano

۱. نگاه‌کنید به:

Peano, *Arithmetices Principia*, Bocca, Turin, 1889.

$$۱+y=y^+ \qquad (۱)$$

$$x^++y=(x+y)^+ \qquad (۲)$$

تعریف می‌شود. با به‌کاربردن (۱)، (۲) و استقرای‌ریاضی، ویژگیهای اساسی جمع اعداد طبیعی‌که در زیر می‌آیند، ثابت می‌شوند:

(۳) $x+(y+z)=(x+y)+z$ (قانون شرکتپذیری)

(۴) $x+y=y+x$ (قانون جابه‌جایی)

(۵) $x+z=y+z$ نتیجه می‌دهد $x=y$ (قانون حذف)

فقط (۳) را ثابت خواهیم کرد و (۴) و (۵) را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

برهان (۳). گیریم y و z دوعضو دلخواه $\mathbf{N}$ هستندکه در طول این برهان ثابت می‌مانند. برای اثبات (۳) با استقرای ریاضی، نخست نشان می‌دهیم که

$$۱+(y+z)=(۱+y)+z$$

برهان این قسمت مرحله به‌مرحله در زیر آمده است:

$۱+(y+z)=(y+z)^+$ بنابر (۱)

$=y^++z$ بنابر (۲)

$=(۱+y)+z$ بنابر (۱)

پس، قانون شرکتپذیری (۳) بـرای $x=۱$ معتبر است و نخستین شرط استقرای ریاضی ثابت شد. هدف بعدی ما آنست نشان دهیم‌که ازفرض

$$k+(y+z)=(k+y)+z \quad \text{(فرض استقرا)}$$

رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$k^++(y+z)=(k^++y)+z.$$

داریم

$k^++(y+z)=[k+(y+z)]^+$ بنابر (۲)

$=[(k+y)+z]^+$ بنابر فرض استقرا

$=(k+y)^++z$ بنابر (۲)

$=(k^++y)+z$ بنابر (۲)

که مطلوب ماست. برهان (۳) اکنون با استقرای ریاضی کامل است.

ضرب اعداد طبیعی به‌صورت استقرایی با:

$$1y=y \tag{۶}$$

$$x^+y=xy+y \tag{۷}$$

تعریف می‌شود. ویژگیهای اساسی ضرب که در زیر می‌آیند از (۶) و (۷) با روش استقرای ریاضی نتیجه می‌شوند:

(۸) $x(yz)=(xy)z$ (قانون شرکتپذیری)

(۹) $xy=yx$ (قانون جابه‌جایی)

(۱۰) $xz=yz$ نتیجه می‌دهد $x=y$ (قانون حذف)

(۱۱) $x(y+z)=xy+xz$ (قانون پخشپذیری)

ویژگیهای (۸)، (۹) و (۱۰) در ضرب به‌ترتیب به‌ویژگیهای (۳)، (۴)، و (۵) در جمع شباهت دارند. برهانهای (۸)، (۹) و (۱۰) همانند برهانهای (۳)، (۴) و (۵) هستند و لذا آوردن این برهانها هم به خواننده واگذار می‌شود. قانون پخشپذیری را ثابت می‌کنیم.

برهان (۱۱). فرض می‌کنیم y و z دوعضو دلخواه $\mathbf{N}$ و درطول این برهان ثابت هستند. با استقرای‌ریاضی روی x، (۱۱) را ثابت می‌کنیم. درحالت $x=1$، بنابر(۶)، بدیهی است که

$$1(y+z)=1y+1z$$

پس، نخستین قسمت استقرای ریاضی ثابت شد. برای کامل‌کردن اثبات، فرض می‌کنیم که

$$k(y+z)=ky+kz$$

برای یك $k\in\mathbf{N}$ راست است. آنگاه

$$\begin{aligned}
k^+(y+z)&=k(y+z)+(y+z) && \text{بنابر (۷)}\\
&=(ky+kz)+(y+z) && \text{بنابر فرض استقرا}\\
&=ky+[kz+(y+z)] && \text{بنابر (۳)}\\
&=ky+[(kz+y)+z] && \text{بنابر (۳)}\\
&=ky+[(y+kz)+z] && \text{بنابر (۴)}
\end{aligned}$$

$=ky+[y+(kz+z)]$ بنا بر (۳)

$=(ky+y)+(kz+z)$ بنا بر (۳)

$=k^+y+k^+z$ بنا بر (۷)

پس، بنا بر استقرای ریاضی، (۱۱) راست است.

مفهوم ترتیب در $\mathbf{N}$ را می‌توان به‌صورت زیر معرفی کرد:

(۱۲) $x>y$ اگر و تنها اگر $z\in\mathbf{N}$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $x=y+z$

ازاین تعریف ترتیب، نتیجه می‌شود که

(۱۳) $x>y$ و $y>z$ نتیجه می‌دهد $x>z$ (قانون تعدی)

و

(۱۴) برای هر x ,y در $\mathbf{N}$، یکی و فقط یکی از حکمهای زیر درست است:

$x>y$، $x=y$، $y>x$ (قانون سه‌گانگی)

در حقیقت، تمام ویژگیهای شناخته شدهٔ اعداد طبیعی از اصول موضوع پئانو مشتق می‌شوند. این‌ضمیمه را با قضیهٔ زیر که نشان می‌دهد دستگاه اعداد طبیعی یکتاست، به‌پایان می‌رسانیم.

قضیه. گیریم N و N' دومجموعه هستندکه دراصول‌موضوع ۱ تا ۵ پئانو صدق می‌کنند. آنگاه یك تناظر یك به یك (به نـام همریختی) $f:N\to N'$ وجـود دارد به‌قسمی کـه $f(1)=1'$ و $f(n+1)=f(n)+1'$، دراینجا $1'$ عنصر ویژهٔ N' است که در ۱ — ۵ صدق می‌کند.

پاسخ مسائل برگزیده

تمرین ۱.۱

۱. هست　۲. هست　۳. نیست　۴. هست　۵. نیست　۶. نیست　۷. نیست
۸. نیست　۹. هست　۱۰. هست　۲۰. ۸، ۱۶، 2^n.

۲۱.

p	q	r	
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

تمرین ۲.۱

۱۳. بله　۱۴. بله　۱۵. (۴) و (۵)، (۷) و (۸)، (۹) و (۱۰)، (۱۱) و (۱۲)
۱۹. بله　۲۰. بله　۲۱. $\sim p \wedge \sim q$

تمرین ۳.۱

۸. نه این تابع مشتق دارد نه من احمق هستم.

۱۰. (الف) $\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \equiv \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \sim p_3 \vee \cdots \vee \sim p_n$

(ب) $\sim(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \cdots \vee p_n) \equiv \sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \sim p_3 \wedge \cdots \wedge \sim p_n$

۱۴. بله ۱۸. $p \wedge q \wedge r$ ۱۹. $\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

تمرین ۴.۱

۳. ازجدول ارزش:

	p	$\wedge$	$\sim q$	$\rightarrow$	c	$\leftrightarrow$	p	$\rightarrow$	q
	T	F	F	T	F	T	T	T	T
	T	T	T	F	F	T	T	F	F
	F	F	F	T	F	T	F	T	T
	F	F	T	T	F	T	F	T	F
مرحله	۱	۳	۲	۴	۱	۵	۱	۲	۱

نتیجه می‌گیریم که $p \wedge \sim q \rightarrow c$ و $p \rightarrow q$ هم‌ارز هستند.

تمرین ۵.۱

۱.

$p \wedge (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim(p \wedge \sim q)$	تعریف $\rightarrow$
$\equiv p \wedge (\sim p \vee q)$	دمورگن، نفی مضاعف
$\equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)$	پخشپذیری
$\equiv c \vee (p \wedge q)$	$p \wedge \sim p \equiv c$
$\equiv p \wedge q$	جابه‌جایی، قضیهٔ ۷ (ب)
$\Rightarrow q$	اختصار

۳.

$(p \wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow \sim[(p \wedge \sim q) \wedge \sim c]$	تعریف $\rightarrow$
$\Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \vee c$	دمورگن، نفی مضاعف
$\Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$	قضیهٔ ۷ (ب)
$\Leftrightarrow (p \rightarrow q)$	تعریف $\rightarrow$

۴. $(p \vee q \vee r) \wedge \sim r \wedge \sim q \Leftrightarrow [(p \vee q \vee r) \wedge \sim r] \wedge \sim q$ شرکتپذیری

$\Rightarrow (p \vee q) \wedge \sim q$ مثال ۶

$\Rightarrow p$ مثال ۶

۵. $c \Leftrightarrow p \wedge \sim p$ تعریف

$\Rightarrow p$ اختصار

۷. $(p \vee q \to q) \Leftrightarrow \sim [(p \vee q) \wedge \sim q]$ تعریف $\to$

$\Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee q$ دمورگن، نفی مضاعف

$\Leftrightarrow q \vee (\sim p \wedge \sim q)$ دمورگن، جابه‌جایی

$\Leftrightarrow (q \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q)$ پخشپذیری

$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge t$ جابه‌جایی، $q \vee \sim q \equiv t$

$\Leftrightarrow \sim p \vee q$ قضیهٔ ۷ (الف)

$\Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$ دمورگن، نفی مضاعف

$\Leftrightarrow (p \to q)$ تعریف $\to$

۹. $(p \to r) \wedge (q \to r) \Leftrightarrow (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)$ مسئلهٔ ۸

$\Leftrightarrow (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q)$ جابه‌جایی

$\Leftrightarrow r \vee (\sim p \wedge \sim q)$ پخشپذیری

$\Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee r$ دمورگن، جابه‌جایی

$\Leftrightarrow (p \vee q \to r)$ مسئلهٔ ۸

۱۱. $(p \to q) \wedge (p \to \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ مسئلهٔ ۸

$\Leftrightarrow \sim p \vee (q \wedge \sim q)$ پخشپذیری

$\Leftrightarrow \sim p \vee c$ $\quad q \wedge \sim q \equiv c$

$\Leftrightarrow \sim p$ قضیهٔ ۷ (ب)

۱۲. $(p \to q) \vee (p \to r) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$ مسئلهٔ ۸

$\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim p) \vee (q \vee r)$ شرکتپذیری، جابه‌جایی

$\Longleftrightarrow \sim p \vee (q \vee r)$ خودتوانی

$\Longleftrightarrow (p \to q \vee r)$ مسئلهٔ ۸

۱۶. $[p \to (q \to r)] \wedge (p \to q)$

$\Longleftrightarrow [\sim p \vee (q \to r)] \wedge (\sim p \vee q)$ تعریف ۴، دمورگن

$\Longleftrightarrow \sim p \vee [(q \to r) \wedge q]$ پخشپذیری

$\Rightarrow \sim p \vee r$ قیاس‌استثنایی، مسئلهٔ۵، تمرین ۱.۴

۲۰. $(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\sim q \vee \sim s)$

$\Longleftrightarrow (p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (q \to \sim s)$ $\sim q \vee \sim s \equiv q \to \sim s$

$\Longleftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to \sim s)] \wedge (r \to s)$ جابه‌جایی، شرکتپذیری

$\Rightarrow (p \to \sim s) \wedge (\sim s \to \sim r)$ تعدی، عکس نقیض

$\Rightarrow p \to \sim r$ تعدی

$\Longleftrightarrow \sim p \vee \sim r$ تعریف ۴، دمورگن

تمرین ۱.۶

۶. با گذاشتن $\sim p(x)$ به‌جای $q(x)$ در $\sim[(\forall x)(q(x))] \equiv (\exists x)(\sim q(x))$ داریم

$$\sim[(\forall x)(\sim p(x))] \equiv (\exists x)(p(x))$$

با نفی هر دوطرف هم‌ارزی بالا وتعویض طرف چپ و راست، نتیجه می‌گیریم

$$\sim[(\exists x)(p(x))] \equiv (\forall x)(\sim p(x))$$

تمرین ۱.۷

۵. (الف) برهان مستقیم:

۱. $A \vee (B \wedge C)$

۲. $B \to D$

۳. $C \to E$

۴. $D \wedge E \to F$

۵. $\sim A / \therefore F$

۶. $B \wedge C$ — ۱، ۵، رفع مؤلفه

۷. $B \wedge C \rightarrow D \wedge E$ — ۲، ۳، قیاس ذوالوجهین موجب

۸. $D \wedge E$ — ۷، ۶، قیاس استثنایی

۹. F — ۴، ۸، قیاس استثنایی

(ب) برهان غیرمستقیم:

۶. $\sim F$ — برهان خلف

۷. $\sim(D \wedge E)$ — ۴، ۶، قیاس دفع

۸. $B \wedge C$ — ۱، ۵، رفع مؤلفه

۹. $B \wedge C \rightarrow D \wedge E$ — ۲، ۳، قیاس ذوالوجهین موجب

۱۰. $D \wedge E$ — ۹، ۸، قیاس استثنایی

۱۱. $(D \wedge E) \wedge \sim(D \wedge E)$ — ۱۰، ۷، عطف

۶. (الف) برهان مستقیم:

۱. $B \vee (C \rightarrow E)$

۲. $B \rightarrow D$

۳. $\sim D \rightarrow (E \rightarrow A)$

۴. $\sim D / \therefore C \rightarrow A$

۵. $\sim B$ — ۲، ۴، قیاس دفع

۶. $C \rightarrow E$ — ۱، ۵، رفع مؤلفه

۷. $E \rightarrow A$ — ۳، ۴، قیاس استثنایی

۸. $C \rightarrow A$ — ۶، ۷، تعدی

(ب) برهان غیرمستقیم:

۵. $\sim(C \rightarrow A)$ — برهان خلف

۶. $C \wedge \sim A$ — ۵، تعریف ۴، نفی مضاعف

۷. $\sim A$ — ۶، اختصار

۸. $E \to A$ — ۳، ۴، قیاس استثنایی

۹. $\sim E$ — ۷، ۸، قیاس دفع

۱۰. $\sim B$ — ۲، ۴، قیاس دفع

۱۱. $C \to E$ — ۱، ۱۰، رفع مؤلفه

۱۲. C — ۶، اختصار

۱۳. E — ۱۱، ۱۲، قیاس استثنایی

۱۴. $E \wedge \sim E$ — ۱۳، ۹، عطف

۱۰. (الف) برهان مستقیم:

۱. $A \wedge B \to C$

۲. $(A \to C) \to D$

۳. $\sim B \vee E \;/\therefore B \to D \wedge E$

۴. $B \to (A \to C)$ — ۱، جابه‌جایی، تفکیک دومقدم

۵. $B \to D$ — ۴، ۲، تعدی

۶. $B \to E$ — ۳، تعریف ۴، دمورگن

۷. $B \wedge B \to D \wedge E$ — ۵، ۶، قیاس ذوالوجهین موجب

۸. $B \to D \wedge E$ — ۷، قانون خودتوانی

۱۱.

۱. $P \wedge C \to R$

۲. $R \to G$

۳. $H \to \sim I$

۴. H

۵. $\sim G \vee I \;/\therefore \sim (P \wedge C)$

۶. $\sim I$ — ۳، ۴، قیاس استثنایی

۷. $\sim G$ — ۵، ۶، رفع مؤلفه

۸. $\sim R$ — ۲، ۷، قیاس دفع

۹. $\sim(P \wedge C)$ — ۱، ۸، قیاس دفع

.۱۳

۱. $W \vee H \rightarrow L \wedge S$

۲. $\sim S / \therefore \sim H$

۳. $\sim S \vee \sim L$ — ۲، جمع

۴. $\sim(L \wedge S)$ — ۳، جابه‌جایی، دمورگن

۵. $\sim(W \vee H)$ — ۱، ۴، قیاس دفع

۶. $\sim W \wedge \sim H$ — ۵، دمورگن

۷. $\sim H$ — ۶، اختصار

.۱۴

۱. $E \wedge S \rightarrow G$

۲. $G \rightarrow H$

۳. $\sim H / \therefore \sim E \vee \sim S$

۴. $\sim G$ — ۲، ۳، قیاس دفع

۵. $\sim(E \wedge S)$ — ۱، ۴، قیاس دفع

۶. $\sim E \vee \sim S$ — ۵، دمورگن

.۱۵

۱. $P \rightarrow \sim B$

۲. $F \rightarrow T$

۳. $O \rightarrow \sim S$

۴. $\sim B \rightarrow F$

۵. $G \rightarrow P$

۶. $\sim S \rightarrow \sim T / \therefore O \rightarrow \sim G$

۷. $O \to \sim T$	۳، ۶، تعدی
۸. $G \to \sim B$	۵، ۱، تعدی
۹. $G \to F$	۸، ۴، تعدی
۱۰. $G \to T$	۹، ۲، تعدی
۱۱. $\sim T \to \sim G$	۱۰، عکس نقیض
۱۲. $O \to \sim G$	۷، ۱۱، تعدی

تمرین ۱.۸

۱. این قضیه را با استقرای ریاضی روی n ثابت می‌کنیم. قضیه به‌سادگی برای $n=1$ دیده می‌شود. فرض استقرا آنست که k عدد صحیحی است که برای تمام r های $0 \leqslant r \leqslant k$،

$$C(k,r)=\frac{k!}{r!(k-r)!}$$

حال $C(k+1,r)$ را درنظر بگیرید. بنابر تعریف ۷ و فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned}
C(k+1,r) &= C(k,r)+C(k,r-1)\\
&=\frac{k!}{r!(k-r)!}+\frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!}\\
&=\frac{k!(k-r+1)}{r!(k-r)!(k-r+1)}+\frac{k!r}{r(r-1)!(k-r+1)!}\\
&=\frac{k!(k+1)}{r!(k-r+1)!}\\
&=\frac{(k+1)!}{r!(k+1-r)!}
\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد قضیه برای $k+1$ درست است اگر برای k درست باشد. اکنون برهان بنابر اصل استقرای ریاضی کامل است.

۲. قضیهٔ ۸ می‌تواند برای این‌مسئله به‌کار رود. اگر استقرای‌ریاضی به‌کار می‌رود، نخست لم زیر را با استقرای ریاضی ثابت کنید.

لم. اگر n عدد صحیح نامنفی و r یا کمتر از صفر یا بزرگتر از n باشد، آنگاه $C(n, r)=0$.

تمرین ۲۰۱

۲. $D\subseteq A\subseteq B\subseteq C$

۵. فرض کنید $A\subseteq\varnothing$، آنگاه برای هرعنصر x، $(x\in A)\to(x\in\varnothing)$ یك گزارهٔ راست است. چون $x\in\varnothing$ دروغ است، برای اینکه گـزاره شرطی $(x\in A)\to(x\in\varnothing)$ راست باشد، باید $x\in A$ برای تمام عنصرهای x دروغ باشد. پس، باید داشته باشیم $A=\varnothing$.

۶. (الف) درستی عبارت زیر را بررسی می‌کنیم:

برای هرعنصر x	$1.\ (x\in A)\to(x\in B)$	(فرض $A\subset B$)
برای بعضی ازعنصرهای y	$2.\ (y\in B)\wedge(y\notin A)$	
برای هرعنصر x	$3.\ (x\in B)\to(x\in C)$	(فرض $B\subseteq C$)
	$/\therefore A\subset C$	(نتیجه)
برای هرعنصر x	$4.\ (x\in A)\to(x\in C)$	۱، ۳، تعدی
	$5.\ y\in B$	۲، اختصار
	$6.\ y\notin A$	۲، اختصار
	$7.\ y\in C$	۳، ۵، قیاس استثنایی
برای بعضی عناصر y	$8.\ (y\in C)\wedge(y\notin A)$	۶، ۷، ترکیب عطفی
	$9.\ A\subset C$	۴، ۸، تعریف $\subset$

۸. (الف) دروغ (ب) دروغ (ج) دروغ
(د) دروغ (ه) دروغ (و) راست

۹. (الف) دروغ (ب) دروغ (ج) راست (د) راست (ه) دروغ

۱۰. (الف) دروغ (ب) راست (ج) دروغ (د) راست

۱۱. باید این را با استقرای ریاضی روی n ثابت کنیم. چون

$$C(1, r)=\begin{cases} 1 & r=0, 1 \quad \text{اگر} \\ 0 & r\neq 0, 1 \end{cases}$$

پس مطلب برای $n=1$ درست است. فرض کنید که یک مجموعه با k عنصر داده شده، آنگاه برای هر عدد صحیح r، دقیقاً $C(k, r)$ زیرمجموعه با r عنصر وجود دارد (فرض استقرا). حال مجموعهٔ دلخواه $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}\}$ را با $k+1$ عنصر در نظر بگیرید. زیرمجموعه‌های r عنصری A، از زیرمجموعه‌های r عنصری $A-\{a_{k+1}\}=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ و زیرمجموعه‌های $r-1$ عنصری $A-\{a_{k+1}\}$ که به آنها a_{k+1} افزوده شود تشکیل شده‌اند. بنابراین، بنابر استقرای ریاضی و تعریف ۷ از فصل اول، دقیقاً $C(k, r)+C(k, r-1)=C(k+1, r)$ زیرمجموعهٔ A با r عنصر وجود دارد. ازاین‌رو، اثبات بنابر اصل استقرای ریاضی کامل است.

تمرین ۲۰۲

۵. $\varnothing$، $\{x\}$، $\{\{y, z\}\}$، $\{x, \{y, z\}\}$

۶. خیر، $\mathcal{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$ یک عنصر دارد.

۷. دوعنصر.

۱۲. در نظر داشته باشید که یک مجموعه $X\in\mathcal{P}(A:B)$ اگر و تنها اگر یک مجموعه $Y\in\mathcal{P}(A-B)$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $X=B\cup Y$.

(الف) بنابراین، تعداد عنصرهای $\mathcal{P}(A:B)$ همانند تعداد عنصرهای مجموعه توانی $\mathcal{P}(A-B)$ است، یعنی 2^{n-m}.

(ب) اگر $B=\varnothing$، آنگاه $\mathcal{P}(A:B)=\mathcal{P}(A)$، که $2^{n-0}=2^n$ عنصر دارد.

تمرین ۳۰۲

۱. بدیهی است که $A\cup B\supseteq B$. برای کامل کردن برهان، باقی می‌ماند که نشان داده شود $A\cup B\subseteq B$:

$$\begin{aligned} x\in A\cup B &\equiv (x\in A)\vee(x\in B) && \text{تعریف } \cup \\ &\Rightarrow (x\in B)\vee(x\in B) && A\subseteq B \\ &\equiv x\in B && \text{خودتوانی} \end{aligned}$$

ازاین‌رو $A\cup B\subseteq B$ و درنتیجه $A\cup B=B$.

۶. (الف)

$1.\ (x\in A)\to(x\in C)$ (فرض $A\subseteq C$)

$2.\ (x\in B)\to(x\in C)\ /\ \therefore A\cup B\subseteq C$ (فرض $B\subseteq C$/ نتیجه)

$3.\ (x\in A)\vee(x\in B)\to(x\in C)\vee(x\in C)$ ۱، ۲، قیاس ذوالوجهین‌موجب

$4.\ (x\in A)\vee(x\in B)\to(x\in C)$ ۳، خودتوانی

$5.\ (x\in A\cup B)\to(x\in C)$ ۴، تعریف $\cup$

$6.\ A\cup B\subseteq C$ ۵، تعریف $\subseteq$

۷. (۱)

$$C\subseteq(A\cap B)\cup C$$

$$=A\cap(B\cup C)\quad \text{(فرض)}$$

$$\subseteq A$$

(۲) گیریم $C\subseteq A$. آنگاه

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)\quad \text{پخشپذیری، جابه‌جایی}$$

$$=A\cap(B\cup C)\quad \text{مسئلهٔ ۱}$$

۱۱. چون $A\subseteq C$، پس بنابر مسئلهٔ ۱۰ داریم $A\cup B\subseteq C\cup B$. چون $B\subseteq D$، دوباره بنابر مسئلهٔ ۱۰، $C\cup B=B\cup C\subseteq D\cup C=C\cup D$. ازاین‌رو، $A\cup B\subseteq C\cup D$.

تمرین ۴-۲

۱.

$$A-(B\cap A)=A\cap(B\cap A)'\quad \text{مثال ۵}$$

$$=A\cap(B'\cup A')\quad \text{قضیهٔ دمورگن}$$

$$=(A\cap B')\cup(A\cap A')\quad \text{پخشپذیری}$$

$$=(A\cap B')\cup\varnothing\quad \text{قضیهٔ ۵ (ج)}$$

$$=A-B\quad \text{مثال ۵، قضیهٔ ۴ (الف)}$$

۳. گیریم $B\subseteq A'$. برای هر عنصر x، اگر $x\in B$ آنگاه $x\in A'$. یعنی $x\notin A$ اگر $x\in B$. پس برای هر x، $x\notin A\cap B$. بنابراین $A\cap B=\varnothing$.

به‌وارون، اگر $A\cap B=\varnothing$ آنگاه $x\in B$ ، $x\notin A'$ را نتیجه می‌دهد. یعنی، $(x\in B)\rightarrow(x\in A')$ راست است. پس $B\subseteq A'$.

۶. (۱) اگر $(A-B)\cup B=A$، آنگاه $B\subseteq(A-B)\cup B=A$.
(۲) اگر $B\subseteq A$، آنگاه

$(A-B)\cup B=(A\cap B')\cup B$	مثال ۵
$=B\cup(A\cap B')$	جابه‌جایی
$=(B\cup A)\cap(B\cup B')$	پخشپذیری
$=A\cap(B\cup B')$	(فرض $B\subseteq A$)، مسئلهٔ ۱
	تمرین ۳.۲
$=A\cap U$	قضیهٔ ۵ (ج)
$=A$	$A\subseteq U$

۸. (الف)

$(A-C)\cup(B-C)=(A\cap C')\cup(B\cap C')$	مثال ۵
$=(C'\cap A)\cup(C'\cap B)$	جابه‌جایی
$=C'\cap(A\cup B)$	پخشپذیری
$=(A\cup B)-C$	جابه‌جایی، مثال ۵

۲۰.

$C-B=(A\cup B)-B$	فرض $C=A\cup B$
$=(A\cup B)\cap B'$	مثال ۵
$=(A\cap B')\cup(B\cap B')$	جابه‌جایی، پخشپذیری
$=(A-B)\cup\varnothing$	مثال ۵، قضیهٔ ۵ (ج)
$=A$	فرض $A\cap B=\varnothing$

۲۱.

$(A\cup B)-(A\cap B)$	
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)'$	مثال ۵
$=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$	قضیهٔ دمورگن
$=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']$	پخشپذیری

$$=[(A\cap A')\cup(B\cap A')]\cup[(A\cap B')\cup(B\cap B')]$$ جابه‌جایی، پخش‌پذیری

$$=[\varnothing\cup(B\cap A')]\cup[(A\cap B')\cup\varnothing]$$ قضیهٔ ۵ (ج)

$$=(B-A)\cup(A-B)$$ مثال ۵

$$=(A-B)\cup(B-A)$$ جابه‌جایی

۲۲. بنابر مثال ۵، داریم

$$B\oplus C=(B-C)\cup(C-B)=(B\cap C')\cup(C\cap B')$$

فقط قسمت (ج) را باید ثابت کنیم، اثبات بقیه ساده است. بنابر تعریف $\oplus$ و قوانین دمورگن، داریم

$$\begin{aligned}
A\oplus(B\oplus C)&=A\oplus[(B\cap C')\cup(C\cap B')]\\
&=\{A\cap[(B\cap C')\cup(C\cap B')]'\}\cup\{A'\cap[(B\cap C')\cup(C\cap B')]\}\\
&=[A\cap(B\cap C')'\cap(C\cap B')']\cup[A'\cap B\cap C']\cup[A'\cap B'\cap C]\\
&=[A\cap(B'\cup C)\cap(B\cup C')]\cup[A'\cap B\cap C']\cup[A'\cap B'\cap C]\\
&=[A\cap B'\cap C']\cup[A\cap B\cap C]\cup[A'\cap B\cap C']\cup[A'\cap B'\cap C]\\
&=[A\cap B'\cap C']\cup[A'\cap B\cap C']\cup[A\cap B\cap C]\cup[A'\cap B'\cap C]\\
&=\{[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\cap C'\}\cup\{[(A\cap B)\cup(A'\cap B')]\cap C\}\\
&=[(A\oplus B)\cap C']\cup[(A'\cup B)\cap(A\cup B')\cap C]\\
&=[(A\oplus B)\cap C']\cup\{[(A\cap B')\cup(A'\cap B')]'\cap C\}\\
&=[(A\oplus B)\cap C']\cup[(A\oplus B)'\cap C]\\
&=(A\oplus B)\oplus C
\end{aligned}$$

تمرین ۶.۲

۲. (الف) $\{0\}$ (ب) $[0,1]$ (ج) $[0, 1/99]$

۳. (الف) $(-1, 1)$ (ب) $\{0\}$

۴. (الف) $\{x\in\mathbf{R}\mid x>1]$ (ب) $\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant 0\}$

(ج) $\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 1\}$ (د) $\mathbf{R}$

۸. (الف)

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B_j\right) \quad \text{قضیهٔ ۹}$$

$$= \bigcup_{j=1}^{n}\left[B_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right] \quad \text{جابه‌جایی}$$

$$= \bigcup_{j=1}^{n}\left[\bigcup_{i=1}^{n}(B_j \cap A_i)\right] \quad \text{قضیهٔ ۹}$$

تمرین ۱۰۳

۲. $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ یا $A=B$

۹.
$$(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$$

$$\equiv [(x, y) \in A \times C] \wedge [(x, y) \in B \times D] \quad \text{تعریف } \cap$$

$$\equiv [(x \in A) \wedge (y \in C)] \wedge [(x \in B) \wedge (y \in D)] \quad \text{تعریف } \times$$

$$\equiv [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(y \in C) \wedge (y \in D)] \quad \text{شرکت‌پذیری، جابه‌جایی}$$

$$\equiv (x \in A \cap B) \wedge (y \in C \cap D) \quad \text{تعریف } \cap$$

$$\equiv (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \quad \text{تعریف } \times$$

ازاین‌رو، $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

۲۱. (۱) اگر $a=c$ و $b=d$، آنگاه $\{a\}=\{c\}$ و $\{a, b\}=\{c, d\}$. درنتیجه $\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\}$، یا $(a, b)=(c, d)$.
(۲) فرض کنید $\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\}$. اگر $a=b$، آنگاه جفت مرتب (a, b) همان مجموعهٔ تك‌عضوی $\{\{a\}\}$ است. چون $(a, b)=(c, d)$، داریم $\{\{c\}, \{c, d\}\}=\{\{a\}\}$، درنتیجه $\{c\}=\{c, d\}=\{a\}$ وازاین‌رو $a=b=c=d$.
اگر $a \neq b$ آنگاه هردو جفت (a, b) و (c, d) شامل فقط يك مجموعهٔ تك‌عضوی، به‌ترتیب $\{a\}$ و $\{c\}$ هستند. ازاین‌رو $a=c$. همچنین مجموعه‌های (a, b) و (c, d) فقط شامل يك «مجموعهٔ دوعضوی»، به‌ترتیب $\{a, b\}$ و $\{c, d\}$ هستند، بنابراین $\{a, b\}=\{c, d\}$. پس $b \in \{c, d\}$ واز این‌رو $b=d$ زیرا اگر $b=c$، آنگاه چون $a=c$، پس باید داشته باشیم $a=b$، که تناقض است.

تمرین ۲.۳

۳. (الف) برای بعضی $x \in A$ $\quad y \in \mathrm{Im}(\mathcal{R}) \equiv (x, y) \in \mathcal{R}$ $\quad$ تعریف نگاره

برای بعضی $x \in A$ $\quad \equiv (y, x) \in \mathcal{R}^{-1}$ $\quad$ تعریف $\mathcal{R}^{-1}$

$\equiv y \in \mathrm{Dom}(\mathcal{R}^{-1})$ $\quad$ تعریف حوزه

۸. 2^{n^2} $\quad$ ۹. 2^{m^n} $\quad$ ۱۵. راهنمایی: مسئلهٔ ۷ (ب) را به‌کار برید.

تمرین ۳.۳

۴. برای بعضی $A \in \mathcal{P}$ $\quad (x, y) \in X/\mathcal{P} \equiv x \in A$ و $y \in A$ $\quad$ تعریف $X/\mathcal{P}$

برای بعضی $A \in \mathcal{P}$ $\quad \equiv (x, y) \in A \times A$ $\quad$ تعریف $\times$

$\equiv (x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A \times A$ $\quad$ تعریف $\cup$

۱۱. $(x, y) \in X/(X/\mathcal{E})$

برای بعضی $A \in X/\mathcal{E}$ $\quad \equiv (x, y) \in A \times A$ $\quad$ مسئلهٔ ۴

برای بعضی $c \in X$ $\quad \equiv (x, y) \in (c/\mathcal{E}) \times (c/\mathcal{E})$ $\quad$ تعریف $X/\mathcal{E}$

$\equiv (x, y) \in \mathcal{E}$ $\quad$ قضیهٔ ۳ (ب)

تمرین ۴.۳

۶. (الف) $[5, +\infty)$ $\quad$ (ب) $[-1, 1]$ $\quad$ (ج) $\mathbf{R}$

۱۱. 2^3، n^m.

۱۲. 2، n.

۱۴. گیریم $A = \mathrm{Dom}(g)$ و B زیرمجموعه‌ای از Y که شامل $\mathrm{Im}(g)$ است، باشد. نشان دهید $g : A \to B$ تابع است.

۱۵. گیریم $(x, y) \in f$. چون f انعکاسی است، $(x, x) \in f$، بنابراین باید داشته‌باشیم $y = x$ زیرا f تابع است. یعنی برای تمام $x \in X$، $f(x) = x$، یا $f : X \to X$ تابع همانی $I_X : X \to X$ است.

۱۶. برای تمام xهای در $[0, 1]$، $f(x) = 1 - x$.

۱۷. گیریم x عنصری از X باشد. چون $(x, f(x)) \in f \subseteq g$، پس، $(x, f(x)) \in g$.
یعنی، $g(x) = f(x), \forall x \in X$. بنابر قضیهٔ ۷، $f = g$.

تمرین ۵.۳

۴. (الف)
$$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \qquad \text{تعریف ۹ (الف)}$$
$$\Rightarrow x \in f^{-1}(f(A)) \qquad \text{تعریف ۹ (ب)}$$

بنابراین $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

(ب) به قسمی که $y = f(x)$، $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B)$. چون
$x \in f^{-1}(B)$، داریم $y = f(x) \in B$. بنابراین $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

۸. برای بعضی $(x, y) \in \mathcal{R}$
$$x \in p_X(\mathcal{R}) \Longleftrightarrow x = p_X(x, y)$$
$$\Longleftrightarrow x \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{R})$$

بنابراین $p_X(\mathcal{R}) = \mathrm{Dom}\,(\mathcal{R})$. به‌طریق مشابه، $p_Y(\mathcal{R}) = \mathrm{Im}\,(\mathcal{R})$.

۹. (الف)
$$y \in f(A \cap f^{-1}(B))$$

$\equiv [y = f(x)$ برای بعضی $x \in A \cap f^{-1}(B)]$ — تعریف ۹ (الف)

$\equiv [y = f(x)$ برای بعضی $x \in A$ و $x \in f^{-1}(B)]$ — تعریف $\cap$

$\equiv y \in f(A)$ و $y \in B$ — تعریف ۹

$\equiv y \in f(A) \cap B$ — تعریف $\cap$

ازاین‌رو $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

(ب) با جایگذاری X به‌جای A درقسمت (الف)، داریم
$$f(X \cap f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$$

چون $X \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$. تساوی آخر چنین بازنویسی می‌شود
$$f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$$

تمرین ۶.۳

۷. X-تصویر $p_X : X \times Y \to X$ انژکتیو است، هرگاه Y مجموعهٔ تک‌عضوی باشد.

۱۱. $m!$.

۱۲. (الف) عبارت $f^{-1}(f(A)) \supset A$ همیشه درست است. [به مسئلهٔ ۴ (الف)، تمرین ۵.۳ نگاه کنید]. بنابراین، اکنون کافی است نشان داده شود $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$: برای هر $x \in f^{-1}(f(A))$، داریم $f(x) \in f(A)$. در نتیجه، برای بعضی $x' \in A$، $f(x) = f(x')$. چون f انژکتیو است، باید داشته باشیم $x = x'$؛ پس $x \in A$ و در نتیجه $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

۱۶. برای اینکه نشان دهیم f متقارن است، نشان می‌دهیم که از $y = f(x)$، $x = f(y)$ نتیجه می‌شود. گیریم $y = f(x)$. آنگاه

$$x = f(f(x)) = f(y)$$

۱۸. به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۳، برای $\Gamma = \{۱, ۲\}$، $A_۱ = A$ و $A_۲ = B$، داریم $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

برای اثبات وارون آن، فرض کنیم برای تمام زیرمجموعه‌های A و B از X داشته باشیم $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. برای عنصرهای دلخواه a, b از X و $a \neq b$، قرار می‌دهیم $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$، آنگاه $A \cap B = \varnothing$ و بنابراین

$$\{f(a)\} \cap \{f(b)\} = f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing$$

پس $f(a) \neq f(b)$ و بنابراین f یک به‌یک است.

۱۹. فرض کنیم برای تمام زیرمجموعه‌های X، مانند A و B. $f(A - B) = f(A) - f(B)$. آنگاه برای هر دو عنصر a و b از X و $a \neq b$، قرار می‌دهیم $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$، پس $A - B \neq \varnothing$، و از این‌رو

$$\{f(a)\} - \{f(b)\} = f(A) - f(B) = f(A - B) \neq \varnothing$$

بنابراین $f(a) \neq f(b)$ و درنتیجه f یک به‌یک است.

۲۰. بله.

تمرین ۷.۳

۶. برای اینکه نشان دهیم f انژکتیو است، گیریم برای هر x و x' در X، $f(x) = f(x')$. آنگاه با به‌کار بردن $g \circ f = I_X$، داریم

$$x = g \circ f(x) = g \circ f(x') = x'$$

بنابراین، f انژکتیو است. برای اینکه نشان دهیم f سورژکتیو است، $f \circ h = I_Y$ را به‌کار می‌بریم:

$$f(X)\supseteq f(h(Y))=I_Y(Y)=Y \qquad h(Y)\subseteq X \text{ زیرا}$$

بنابراین، $f(X)=Y$ و f سورژکتیو است. پس، f بیژکتیو است. حال مشاهده کنیدکه با به‌کاربردن مسائل ۴ و ۵، داریم

$$g=g\circ I_Y=g\circ(f\circ f^{-1})=(g\circ f)\circ f^{-1}=I_X\circ f^{-1}=f^{-1}$$

و

$$h=I_X\circ h=(f^{-1}\circ f)\circ h=f^{-1}\circ(f\circ h)=f^{-1}\circ I_Y=f^{-1}$$

۱۲. (۱) $g\circ f: X\to Z$ انژکتیو است: گیریم برای بعضی x و x' در X، $g\circ f(x)=g\circ f(x')$، چون g انژکتیو است، و $g(f(x))=g(f(x'))$، داریم $f(x)=f(x')$. حال انژکتیو بودن f نتیجه می‌دهدکه $x=x'$. این ثابت می‌کند که $g\circ f$ انژکتیو است.

(۲) برای اینکه نشان دهیم $g\circ f$ پوشا است، مشاهده می‌کنیم که

$$g\circ f(X)=g(f(X))$$

$$=g(Y) \qquad \text{پوشا است } f$$

$$=Z \qquad \text{پوشا است } g$$

بنابراین $g\circ f$ پوشاست.

(۳) اکنون $g\circ f: X\to Z$ یك دوسویی است. زیرا

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=g\circ(f\circ f^{-1})\circ g^{-1} \qquad \text{قضیهٔ ۱۵}$$

$$=(g\circ I_Y)\circ g^{-1} \qquad \text{مسئلهٔ ۵، قضیهٔ ۱۵}$$

$$=g\circ g^{-1} \qquad \text{مسئلهٔ ۴}$$

$$=I_Z \qquad \text{مسئلهٔ ۵}$$

و

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f \qquad \text{قضیهٔ ۱۵}$$

$$=f^{-1}\circ(I_Y\circ f) \qquad \text{مسئلهٔ ۵، قضیهٔ ۱۵}$$

$$=f^{-1}\circ f \qquad \text{مسئلهٔ ۴}$$

$$=I_X \qquad \text{مسئلهٔ ۵}$$

پس بنابر نتایج مسئلهٔ ۶، داریم

$$f^{-1}\circ g^{-1}=(g\circ f)^{-1}$$

تمرین ۱۰۴

۴. اگر جبر بولی دقیقاً سه عضو ۰، ۱، و a داشت، آنگاه سه‌امکان زیر برای a' وجود داشت:

(یك) $a'=0$ آنگاه $a=(a')'=0'=1$

(دو) $a'=1$ آنگاه بنابرقضیهٔ ۴، $a=(a')'=1'=0$

(سه) $a'=a$ آنگاه $a=a\cdot a=a\cdot a'=0$

که هر سه حالت به‌تناقض می‌انجامد.

۵. اگر $a'=a$، آنگاه

$$1=a+a'=a+a=a=a\cdot a=a\cdot a'=0$$

که تعریف ۱ (د) را نقض می‌کند.

۹. (الف)

$$a+(a\cdot b)=(a\cdot 1)+(a\cdot b)$$
$$=a\cdot(1+b)$$
$$=a\cdot 1 \qquad \text{بنابر قضیهٔ ۵}$$
$$=a$$

۱۲. اگر $a+b=0$، آنگاه بنابر مسئلهٔ ۹ (ب)

$$a=a\cdot(a+b)=a\cdot 0=0 \qquad \text{بنابر قضیهٔ ۵}$$

به‌روش مشابه، $b=0$

۱۵. (الف)⇐(ب): $a'+b=a'+(a+b)=(a'+a)+b=1+b=1$
بنابر قضیهٔ ۵

(ب) ⇐(ج):
$$a=a\cdot 1=a\cdot(a'+b)=(a\cdot a')+(a\cdot b)$$
$$=0+(a\cdot b)=a\cdot b$$

(ج) ⇐(د):
$$a\cdot b'=(a\cdot b)\cdot b'=a\cdot(b\cdot b')=a\cdot 0=0$$

(د) ⇐(الف):
$$b=b+0=b+(a\cdot b')=(b+a)\cdot(b+b')$$
$$=(b+a)\cdot 1=b+a=a+b$$

تمرین ۲.۴

۷. $$x'yz+x'yz'+xy'z+xy'z'=x'y(z+z')+xy'(z+z')$$
$$=x'y\cdot 1+xy'\cdot 1$$
$$=x'y+xy'$$

۱۱. $$xy+zw+x+(x+z'+w')'=(x+xy)+zw+x'zw$$
بنا بر قانونهای دمورگن

$$=x+zw(1+x')$$ بنا بر قانون جذب

$$=x+zw$$ بنا بر قضیهٔ ۵

۱۶. $$f(x,\ y,\ z)=xx'+yy'+zz'$$

تمرین ۳.۴

۳. $$(x\leftrightarrow y)\leftrightarrow z=(x\leftrightarrow y)z+(x\leftrightarrow y)'z'$$
$$=(xy+x'y')z+(xy+x'y')'z'$$
$$=(xy+x'y')z+(x'+y')(x+y)z'$$
$$=xyz+x'y'z+x'yz'+xy'z'$$

$$x\leftrightarrow(y\leftrightarrow z)=x(y\leftrightarrow z)+x'(y\leftrightarrow z)'$$
$$=x(yz+y'z')+x'(yz+y'z')'$$
$$=x(yz+y'z')+x'(y'+z')(y+z)$$
$$=xyz+xy'z'+x'y'z+x'yz'$$

از این‌رو $$(x\leftrightarrow y)\leftrightarrow z=x\leftrightarrow(y\leftrightarrow z)$$

۴. $$x\oplus(y\oplus z)=x\oplus(yz'+y'z)$$
$$=x(yz'+y'z)'+x'(yz'+y'z)$$
$$=x(yz')'(y'z)'+x'yz'+x'y'z$$
$$=x(y'+z)(y+z')+x'yz'+x'y'z$$
$$=xy'z'+xyz+x'yz'+x'y'z$$
$$=(xy'+x'y)z'+(xy+x'y')z$$

$$=(x\oplus y)z'+(x'+y)(x+y')z$$
$$=(x\oplus y)z'+(xy'+x'y)'z$$
$$=(x\oplus y)z'+(x\oplus y)'z=(x\oplus y)\oplus z$$

تمرین ۴.۴

۳. این درجریان برهان مسئلهٔ ۴، تمرین ۳.۴ اثبات شده‌است.

۴. $C=xyz+xyz'+xy'z+x'yz$

$=xyz+xyz+xyz+xyz'+xy'z+x'yz$ بنا بر قضیهٔ ۳

$=(xyz+xyz')+(xyz+xy'z)+(xyz+x'yz)$

$=xy(z+z')+xz(y+y')+yz(x+x')$

$=xy\cdot 1+xz\cdot 1+1\cdot yz$

$=xy+xz+yz$

$C=xyz+xyz'+xy'z+x'yz$

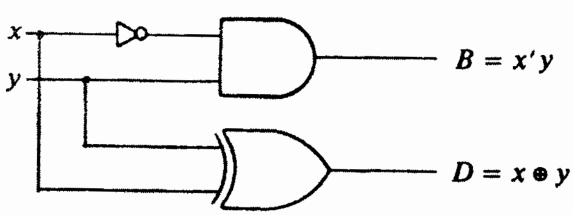
$=xy(z+z')+(xy'+x'y)z$

$=xy+(xy'+x'y)z$

۵. (الف) $B=x'y$ و $D=(x'+y')(x+y)$

(ب) $B=x'y$ و $D=x'y+xy'=x\oplus y$

۶. (ب)



۷. (الف) $B=x'y'z+x'yz'+x'yz+xyz$

و

$D=x'y'z+x'yz'+xy'z'+xyz$

توجه کنید که تابع D با تابع S مسئلهٔ ۳ یکی است.

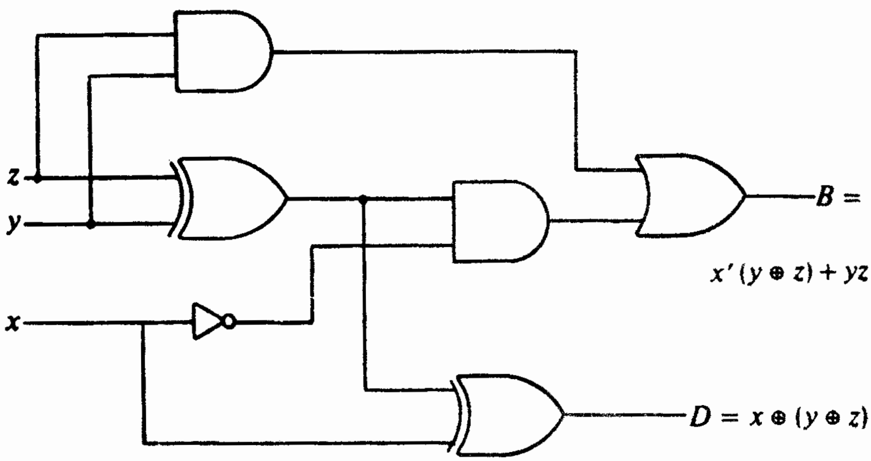
(ب) $B=x'(y'z+yz')+(x'+x)yz$

$=x'(y\oplus z)+yz$

$D=$ مسئلهٔ ۳ S

$=(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$ بنا بر مسئلهٔ ۴، تمرین ۳.۴

۹.



تمرین ۵.۱

۲. برخلاف حکم، فرض کنید Y نامتناهی باشد. چون $g^{-1}:Y\to X$ یك تناظر یك به یك است، پس بنا بر قضیهٔ ۲، مجموعهٔ X باید نامتناهی باشد، که یك تناقض است. بنابراین، Y متناهی است.

۴. گیریم $f:A\to A$ یك انژکسیون باشد به‌قسمی‌که $f(A)\neq A$. آنگاه تابع $g:A\times A\to A\times A$ که با $g(x,\ y)=(f(x),\ f(y))$ تعریف شده است، یك به‌یك است، و $g(A\times A)\neq A\times A$. ازاین‌رو، $A\times A$ نامتناهی است.

۱۵. اگر $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$ نامتناهی باشد، آنگاه بنابرمسئلهٔ ۱۱، $A-B$ یا $B-A$ نامتناهی است. فرض‌کنیم $A-B$ نامتناهی باشد، آنگاه مجموعهٔ A، که‌یك فوق‌مجموعهٔ مجموعهٔ نامتناهی $A-B$ است، نامتناهی می‌شود. عکس این مطلب درست نیست، زیرا اگر $A=B$ یك مجموعهٔ نامتناهی باشد آنگاه $A\oplus B=A\oplus A=\varnothing$ متناهی است.

تمرین ۲.۵

۴. گیریم $f: X-Y \sim Y-X$. آنگاه تابع $g: X \to Y$ را که با

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{اگر } x\in X-Y \\ x & \text{اگر } x\in X\cap Y \end{cases}$$

تعریف می‌شود، در نظر بگیرید. چون

$$Y-X=Y-(X\cap Y) \quad \text{و} \quad X-Y=X-(X\cap Y)$$

پس تابع $g: X \to Y$ دوسویی است. ازاین‌رو $X \sim Y$.

۵. گیریم برای هر $\gamma\in\Gamma$، $f_\gamma: X_\gamma \sim Y_\gamma$. تابع $f: \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$ را با

$$f(x)=f_\gamma(x) \qquad \text{اگر } x\in X_\gamma$$

تعریف کنید. آنگاه چون $\{X_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ و $\{Y_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ خانواده‌های مجموعه‌های مجزا هستند، f یك تابع دوسویی خوشتعریف است.

۹. تابع $f: \mathcal{P}(A) \to ۲^A$ که هر زیرمجموعهٔ B از A را به تابع مشخصهٔ B، $\chi_B: A \to \{۰, ۱\}$، می‌برد آشکارا یك دوسویی است.

۱۰. (۱) نخست ثابت می‌کنیم که h یك به‌یك است: گیریم x و $y\in Y$ به‌قسمی باشند که $h(x)=h(y)$، یعنی

$$\{۱, ۲, \cdots, g(x)\}\cap g(Y)=\{۱, ۲, \cdots, g(y)\}\cap g(Y) \qquad (*)$$

نشان خواهیم داد که $g(x)=g(y)$ و درنتیجه $x=y$. زیرا اگر چنین نباشد بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $g(x)<g(y)$، آنگاه تعداد عناصر مجموعهٔ سمت چپ $(*)$ حداقل یکی از تعداد عناصر مجموعهٔ سمت راست $(*)$ کمتر است؛ زیرا اگر $g(x)<g(y)$، مجموعهٔ سمت چپ یك زیرمجموعهٔ سمت راست است، وعنصر $g(y)$، درمجموعهٔ سمت راست است امادرمجموعهٔ سمت چپ نیست. این تناقض نشان می‌دهدکه $g(x)=g(y)$ و از این‌رو $x=y$.
(۲) حال نشان می‌دهیم که h پوشا است: زیرا اگر چنین نباشد، آنگاه یك $n_۰\in \mathbf{N}$ وجود دارد به‌قسمی که $n_۰\notin h(Y)$. بدون از دست‌دادن کلیت، گیریم $n_۰$ کوچکترین عدد طبیعی با این خاصیت باشد. آنگاه یك $y_۰\in Y$ وجود دارد به قسمی که $h(y_۰)=n_۰-۱$ (به‌راحتی می‌توان نشان داد که $n_۰\neq ۱$) گیریم

$$y_۱=\min\{g(z)|g(z)>g(y_۰), z\in Y\}$$

نتیجه می‌شود که

$$(**)\qquad \text{تعداد عناصر } h(y_1)=\{1, 2, \dots, g(y_1)\}\cap g(Y)$$
$$=(n_0-1)+1=n_0$$

زیرا

$$\{1, 2, \dots, g(y_1)\}\cap g(Y)=[\{1, 2, \dots, g(y_0)\}\cap g(Y)]\cup\{g(y_1)\}$$

نتیجهٔ (**) فرض قبلی $n_0\notin h(Y)$ را نقض می‌کند. بنابراین h پوشا است.

تمرین ۳.۵

۴. گیریم $f:A\sim \mathbf{N}$ و $g:B\sim\mathbf{N}$. آنگاه تابع $h:A\times B\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ که با $h(x, y)=(f(x), g(y))$ تعریف می‌شود، یك دوسویی است. از این‌رو، $A\times B\sim\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. درنتیجه، بنابرقضیه ۱۰، $A\times B$ شمارای نامتناهی است.

۵. هرعدد گویا را به‌صورت یکتای p/q، که درآن $p\in\mathbf{Z}$، $q\in\mathbf{N}$، و بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك p و q یك است، نشان‌خواهیم داد. آنگاه تابع $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Z}\times\mathbf{N}$ که با $f(p/q)=(p, q)$ تعریف می‌شود، یك انژکسیون است. بدیهی است که $\mathbf{Z}\times\{1\}\subseteq f(\mathbf{Q})\subseteq\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. پس بنابرقضیهٔ ۸، $f(\mathbf{Q})$ شمارای نامتناهی و در نتیجه $\mathbf{Q}$ شمارای نامتناهی است.

۶. گیریم $\mathcal{C}$ مجموعهٔ‌تمام دایره‌هایی درصفحهٔ دکارتی باشدکه شعاع و هردومختص‌مرکز آنها گویا باشند. تابع $f:\mathcal{C}\to\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ را، که با $f(c)=(x, y, z)$ تعریف می‌شود و (x, y) مرکز دایرهٔ $c\in\mathcal{C}$ و z شعاع آن است، درنظر بگیرید. واضح‌است‌که f یك‌انژکسیون‌است. بنابرمثال ۵، $\mathbf{Q}\sim\mathbf{N}$ ودرنتیجه بنابرقضیهٔ ۱۰، $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\sim\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}\sim\mathbf{N}\times\mathbf{N}\sim\mathbf{N}$. حال $f(\mathcal{C})$ یك زیر مجموعهٔ نامتناهی ازمجموعهٔ شمارای نامتناهی $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ است، پس بنابرقضیهٔ ۸، $f(\mathcal{C})$ شمارای نامتناهی است. ازاین‌رو، $\mathcal{C}$ شمارای نامتناهی است.

۷. گیریم $A_1=B_1$ و برای هر $k\in\mathbf{N}$، $A_{k+1}=B_{k+1}-\bigcup_{j=1}^{k}A_j$. آنگاه $\{A_k|k\in\mathbf{N}\}$ یك خانوادهٔ شمارای نامتناهی از مجموعه‌های شمارای مجزا است. به‌علاوه، $\bigcup_{k\in\mathbf{N}}A_k=\bigcup_{k\in\mathbf{N}}B_k$ و $A_1=B_1$ شمارای نامتناهی است. با استفاده ازنتیجهٔ قضیهٔ ۱۰، $\bigcup_{k\in\mathbf{N}}A_k$ شمارای‌نامتناهی، وبنابراین $\bigcup_{k\in\mathbf{N}}B_k$ نیز شمارای نامتناهی است.

۱۰. برای هر $k\in\mathbf{N}$، گیریم A_k مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایهای

$$a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_k$$

با ضرایب صحیح و $a_0 \neq 0$ باشد. آنگاه هر A_k شمارای نامتناهی است، و بنابر نتیجهٔ قضیهٔ ۱۰ $\bigcup_{k\in \mathbf{N}} A_k$ شمارای نامتناهی است.

۱۲. گیریم A یك مجموعهٔ شمارای نامتناهی، و برای هر $k \in \mathbf{N}$، A_k مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های متناهی A، با دقیقاً k عنصر، باشد. آنگاه برای هر $k \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} A_k &\sim \mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\cdots\times\mathbf{N} \qquad (k \text{ بار}) \\ &\sim \mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\cdots\times\mathbf{N} \qquad (k-1 \text{ بار}) \\ &\sim \mathbf{N} \end{aligned}$$

بنابر نتیجهٔ قضیهٔ ۱۰، مجموعهٔ $\bigcup_{k\in \mathbf{N}} A_k$، که شامل تمام زیرمجموعه‌های متناهی و غیرتهی A است، شمارای نامتناهی است.

تمرین ۵.۴

۲. به‌برهان خلف، فرض کنیدکه مجموعهٔ تمام اعداد ناگو یا بین ۰ و ۱ شمارای نامتناهی است. چون مجموعهٔ تمام اعداد گویای بین ۰ و ۱ شمارای نامتناهی است، اجتماع این دومجموعه، که مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ را تشکیل می‌دهد، باید شمارای نامتناهی باشد. این قضیهٔ ۱۲ را نقض می‌کند. بنابراین، مجموعهٔ تمام اعداد ناگویا بین ۰ و ۱ ناشماراست.

۶. $S^1 \sim [0, 2\pi) \sim \mathbf{R}$.

۱۱. $A \oplus B = (A-B)\cup(B-A)$ ناشماراست، پس بنابر مسئلهٔ ۱۰، $A-B$ یا $B-A$ ناشماراست. فرض کنید $A-B$ ناشمارا باشد، پس A به‌عنوان یك فوق مجموعهٔ آن ناشماراست. عکس این مطلب درست نیست.

تمرین ۶.۱

۲. $0 = \operatorname{card}\varnothing,\ \operatorname{card}\mathbf{N},\ \operatorname{card}\mathbf{R}$.

۵. بله.

تمرین ۶.۲

۲. گیریم a یك عدد اصلی ترامتناهی و A مجموعه‌ای باشدکه $\operatorname{card} A = a$. آنگاه A یك مجموعهٔ نامتناهی است، که با توجه به‌قضیهٔ ۱۱ فصل ۵، شامل یك زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی A است. یعنی $\mathbf{N}\sim B\subseteq A$، که نشان می‌دهد $\operatorname{card}\mathbf{N}\leqslant a$.

۷. مجموعه‌های B و C را درنظر بگیرید. چون $C \subseteq B \sim B$ و $B \subseteq A \sim C$، پس بنابر قضیهٔ شرودر-برنشتاین $B \sim C$. از $C \sim A$ و $B \sim C$ نتیجه می‌شود که $B \sim A$.

تمرین ۳.۶

۲. گیریم $f: A \sim B$. تابع $f: A \to B$، تابع $f^*: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ را، که با $f^*(X) = f(X)$ برای تمام $X \in \mathcal{P}(A)$ تعریف شود، برقرارمی‌کند. چون f دوسویی است، پس f^* نیز هست. بنابراین، $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

۳. به‌برهان خلف فرض کنید که یك مجموعهٔ شمارای نامتناهی A وجود دارد که مجموعهٔ توانی آن، $\mathcal{P}(A)$ شمارای نامتناهی است. آنگاه $\operatorname{card} A = \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$، که با قضیهٔ کانتور (قضیهٔ ۲) متناقض است.

۵. اگر یك مجموعهٔ $\mathcal{U}$ شامل تمام مجموعه‌ها وجود می‌داشت، آنگاه باید نابرابری $\operatorname{card} \mathcal{U} > A$ برای هرمجموعهٔ A درست باشد. اما مطابق با قضیهٔ کانتور، $\operatorname{card} \mathcal{U} < \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathcal{U})$، که با نابرابری قبلی در تناقض است. بنابراین مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها وجود ندارد.

تمرین ۴.۶

۵. چون $(\text{۱}, \text{۲}) \sim (\circ, \text{۱}) \sim \mathbf{R}$ و $\mathbf{R} \subseteq (\text{۱}, \text{۲}) \cup (\circ, \text{۱}) \subseteq (\circ, \text{۱})$، پس بنابرقضیهٔ شرودر-برنشتاین داریم $\mathbf{R} \sim (\text{۱}, \text{۲}) \cup (\circ, \text{۱})$، که نشان می‌دهد $c + c = c$.

۸. مثال نقیض: $\text{۳} + \operatorname{card} \mathbf{N} = \text{۲} + \operatorname{card} \mathbf{N}$، اما $\text{۳} \neq \text{۲}$.

تمرین ۵.۶

۳. مثال نقیض: گیریم $x = \text{۱}$، $y = z = \aleph_\circ$. آنگاه $x < y$، اما $xz = yz = \aleph_\circ$ (مثال ۵ (ج)).

۹. مثال نقیض: $\text{۱} \cdot \operatorname{card} \mathbf{N} = \text{۲} \cdot \operatorname{card} \mathbf{N}$، اما $\text{۱} \neq \text{۲}$.

تمرین ۶.۶

۵. برای هر $n \geqslant \text{۲}$، بنابرقضایای ۸ و ۱۰ وعبارت $\aleph_\circ \aleph_\circ = \aleph_\circ$، داریم

$$c = \text{۲}^{\aleph_\circ} \leqslant n^{\aleph_\circ} \leqslant \aleph_\circ^{\aleph_\circ} \leqslant (\text{۲}^{\aleph_\circ})^{\aleph_\circ} = \text{۲}^{\aleph_\circ \aleph_\circ} = \text{۲}^{\aleph_\circ} = c$$

پس $n^{\aleph_\circ} = c = \aleph_\circ^{\aleph_\circ}$.

۸. بنابرمثال ۶ داریم $c\leqslant \aleph_0 c\leqslant cc=c$. ازاین‌رو $\aleph_0 c=c$.

تمرین ۷.۶

۲. گیریم $\mathbf{H}$ نمایانگر فضای هیلبرت کلاسیك باشد. آنگاه بنابرقضایای ۸ و ۱۰ داریم

$$c\leqslant \operatorname{card}\mathbf{H}\leqslant c^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\aleph_0}=2^{\aleph_0}=c$$

ازاین‌رو $\operatorname{card}\mathbf{H}=c=\operatorname{card}\mathbf{R}$.

۳. مجموعه نقاط مشبکه‌ای $\mathbf{R}^{\aleph_0}$ بنابرمسئلهٔ ۵ تمرین ۶.۶ دارای عدد اصلی $c=\aleph_0^{\aleph_0}$ است، و $\operatorname{card}\mathbf{R}^{\aleph_0}=c^{\aleph_0}=c$ درمسئله ۲ بالا نشان داده شده‌است.

۴. عدد اصلی مجموعهٔ تمام توابع با یك متغیر حقیقی که فقط مقادیر ۰ و ۱ را اختیار می‌کنند، 2^c است، وعدد اصلی مجموعهٔ تمام توابع حقیقی با n متغیر حقیقی، c^{c^n} است، اما چون $c^n=c$ و $\aleph_0 c=c$، داریم

$$c^{c^n}=c^c=(2^{\aleph_0})^c=2^{\aleph_0 c}=2^c$$

۵. ازنتیجهٔ مسئلهٔ ۴ بالا، داریم $2^c=\mathfrak{f}$ اکنون ملاحظه می‌کنید که

$$\mathfrak{f}\leqslant\mathfrak{f}^n\leqslant\mathfrak{f}^{\aleph_0}\leqslant\mathfrak{f}^c=(2^c)^c=2^{cc}=2^c=\mathfrak{f}$$

تمرین ۱.۷

۲. می‌توانیم فرض کنیم که $B\neq\varnothing$ (زیرا اگر $B=\varnothing$ آنگاه $C=\varnothing$). مجموعهٔ

$$\{f^{-1}(y)\mid y\in B\}$$

یك افراز A تشکیل می‌دهد. بنابراصل انتخاب، مجموعهٔ $\{f^{-1}(y)|y\in B\}$ یك مجموعهٔ C ازنمایشگرها دارد به‌قسمی که $C\cap f^{-1}(y)$ برای هر $y\in B$ یك مجموعهٔ تك‌عضوی است. بنابراین تحدید f به C، $f|C:C\to B$، بیژکتیو است. ازاین‌رو $\operatorname{card}A\geqslant\operatorname{card}C=\operatorname{card}B$.

۸. گیریم $g:\{A_\gamma|\gamma\in\Gamma\}\to\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ بنابراصل انتخاب، یك تابع انتخاب باشد. آنگاه یك تابع $f:\Gamma\to\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ به‌صورت $f(\gamma)=g(A_\gamma)\in A_\gamma$ برای تمام $\gamma\in\Gamma$ وجود دارد. ازاین‌رو اگر $\Gamma\neq\varnothing$ آنگاه $\mathbf{P}_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\neq\varnothing$.

تمرین ۲.۷

۱۲. گیریم $\mathscr{C}$ مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های کلاً[*] مرتب A باشد که شامل B هستند. $\mathscr{C}$

می‌تواند با رابطهٔ مشمولیت، $\subseteq$، مرتب شود. آنگاه برهانی همانند برهان قضیهٔ ۲ در اینجا نتیجه می‌دهد که $\mathscr{C}$ یك عضو ماکسیمال C، $B \subseteq C$ دارد.

تمرین ۳.۷

۲. گیریم $(A, \leqslant)$ یك مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد، ومجموعهٔ $\mathscr{C}$، ازتمام زیرمجموعه‌های کلاً مرتب $(A, \leqslant)$ به‌وسیلهٔ $\subseteq$ مرتب شده باشد. برای به‌کاربردن لم‌تسورن دربارهٔ $(\mathscr{C}, \subseteq)$، گیریم $\mathscr{D}$ یك زنجیر در $(\mathscr{C}, \subseteq)$ باشد، و $K = \bigcup_{C \in \mathscr{D}} C$. نشان خواهیم دادکه $K \in \mathscr{C}$ و ازاین‌رو شامل یك‌کران بالا، برای $\mathscr{D}$ خواهد بود. در واقع، اگر $x, y \in K$، آنگاه برای بعضی $D \in \mathscr{D}$ و $E \in \mathscr{D}$، $x \in D$ و $y \in E$. اما $\mathscr{D}$ یك زنجیر در $(\mathscr{C}, \subseteq)$ است؛ بنابراین یا $D \subseteq E$ یا $E \subseteq D$. فرض کنید که $E \subseteq D$؛ آنگاه $x, y \in D$. اما D کلاً مرتب است، پس یا $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$. ازاین‌رو K زیرمجموعهٔ کلاً مرتب $(A, \leqslant)$ است، پس $K \in \mathscr{C}$. حال بنابر لم تسورن $(\mathscr{C}, \subseteq)$ یك عنصر ماکسیمال دارد.

۳. گیریم R یك حلقه با عنصر یکهٔ ۱ باشد، وگیریم $\mathscr{A}$ مجموعهٔ تمام ایدال‌های سرهٔ R، با $\subseteq$ جزئاً مرتب شده باشد. گیریم $\mathscr{D}$ یك‌زنجیر در $(\mathscr{A}, \subseteq)$ باشد. آنگاه $\bigcup_{I \in \mathscr{D}} I$ یك ایده‌آل سرهٔ R است زیرا $1 \notin \bigcup_{I \in \mathscr{D}} I$، پس $\bigcup_{I \in \mathscr{D}} I \in \mathscr{A}$ یك‌کران بالای $\mathscr{D}$ است. بنابر لم تسورن، $(\mathscr{A}, \subseteq)$ یك عضو ماکسیمال دارد.

۴. گیریم V یك فضای برداری باشد،و $\mathscr{A}$، مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های مستقل‌خطی بردارها در V، با $\subseteq$ جزئاً مرتب شده‌باشد. گیریم $\mathscr{D}$ یك زنجیر در $(\mathscr{A}, \subseteq)$ باشد؛ آنگاه $K = \bigcup_{C \in \mathscr{D}} C$ آشکارا مستقل خطی است و ازاین‌رو $K \in \mathscr{A}$ یك‌کران بالای $\mathscr{D}$ است. بنابر لم تسورن، $(\mathscr{A}, \subseteq)$ یك عنصرماکسیمال دارد (که یك‌پایهٔ V را تشکیل می‌دهد).

۸. گیریم $\mathscr{F}$ با $\subseteq$ جزئاً مرتب شده‌باشد، و گیریم $\mathscr{D}$ یك زنجیر در $(\mathscr{F}, \subseteq)$ باشد. نشان خواهیم داد که $\mathscr{D}$ یك‌کران بالا دارد. کاندید طبیعی برای این‌کران بالا $K = \bigcup_{C \in \mathscr{D}} C$ است. گیریم $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یك زیرمجموعهٔ متناهی K باشد. $x_i \in C_i$، برای بعضی $C_i \in \mathscr{D}$، $i = 1, \ldots, n$. امـا چـون $\mathscr{D}$ یك زنجیر است، $C \in \mathscr{D}$ وجود دارد به‌قسمی‌که برای تمام $i = 1, 2, \ldots, n$، $C_i \subseteq C$. ازاین‌رو، $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq C$ و درنتیجه $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathscr{F}$. بنابراین $K \in \mathscr{F}$ و ازاین‌رو یك‌کران بالای $\mathscr{D}$ است. بنابر لم تسورن، $(\mathscr{F}, \subseteq)$ یك عنصر ماکسیمال دارد.

تمرین ۴.۷

۲. چون مجموعهٔ $\mathbf{Q}$ شمارای نامتناهی است، یك بیژکسیون $f : \mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$ وجود دارد. رابطهٔ $\leqslant$ را روی $\mathbf{Q}$ به صورت، $p \leqslant q$ اگر وتنها اگر در $\mathbf{N}$، $f(p) \leqslant f(q)$، برای هر

p و q در $\mathbf{Q}$ تحت ترتیب طبیعی اعداد طبیعی تعریف می‌کنیم. چون $(\mathbf{N}, \leqslant)$ خوشترتیب است، پس $(\mathbf{Q}, \leqslant)$ نیز هست.

۷. اگر $(A, \leqslant)$ خوشترتیب باشد، نمی‌تواند شامل دنبالهٔ اکیداً نزولی باشد، زیرا این یک زیرمجموعهٔ بدون کوچکترین عنصر است. به‌وارون، فرض کنید که مجموعهٔ کلاً مرتب $(A, \leqslant)$ خوشترتیب نیست. آنگاه زیرمجموعهٔ B از A وجود دارد که کوچکترین عنصر ندارد. $a_1 \in B$ را انتخاب کنید. چون a_1 کوچکترین عنصر B نیست، می‌توانیم $a_2 \in B$ را چنان انتخاب کنیم که $a_1 > a_2$. به‌طریقی مشابه $a_3 \in B$ را می‌توانیم چنان انتخاب کنیم که $a_2 > a_3$. با ادامهٔ این وضع، یک دنبالهٔ اکیداً نزولی نامتناهی $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ داریم.

تمرین ۲۰۸

۷. ω.

تمرین ۳۰۸

۴. گیریم $\alpha=\omega$، $\beta=0$، و $\gamma=1$. آنگاه $\gamma+\alpha=\omega=\beta+\alpha$، اما $\beta\neq\gamma$.

۶. همان مثال مسئلهٔ ۴ بالا را به‌کار برید: $\gamma=1$، $\beta=0$، اما $\beta+\alpha=\gamma+\alpha$.

تمرین ۴۰۸

۴. گیریم $\alpha=\omega$، $\beta=\gamma=1$. آنگاه $(\beta+\gamma)\alpha=2\omega=\omega$، اما

$$\beta\alpha+\gamma\alpha=\omega+\omega=\omega2$$

بنابراین $(\beta+\gamma)\alpha\neq\beta\alpha+\gamma\alpha$.

۸. گیریم $\alpha=1$، $\beta=2$، و $\gamma=\omega$. آنگاه $\alpha<\beta$ و $\gamma>0$، اما

$$\alpha\gamma=1\omega=\omega=2\omega=\beta\gamma.$$

تمرین ۵۰۸

۳. گیریم X یک مجموعه باشد. بنابر اصل خوشترتیبی، مجموعهٔ X می‌تواند خوشترتیب باشد. گیریم $S=\{\operatorname{ord}(X, \leqslant) \mid \leqslant$ یک رابطهٔ خوشترتیب روی X است$\}$. بنابر قضیهٔ ۱۲، S خوشترتیب است. از این رو یک کوچکترین عنصر منحصر به‌فرد، عدد ترتیبی آغازی X، دارد.

فهرست نمادها

$\sim$	نه . . .
$\wedge$	و
$\vee$	یا
$\rightarrow$	اگر . . . آنگاه
$\leftrightarrow$	اگر و تنها اگر، اگر و فقط اگر
$\equiv (\Leftrightarrow)$	هم‌ارز است با
$\Rightarrow$	نتیجه می‌دهد
$\forall$	برای همه، برای هر
$\exists$	وجود دارد، برای بعضی
$\therefore$	نتیجه
$a \in A$	a عنصر A است
$a \notin A$	a عنصر A نیست
$\{x, y, \cdots, z\}$	مجموعهٔ متشکل از عناصر x ، y ، $\cdots$ ، z
$\{x \mid p(x)\}$	مجموعهٔ تمام x هایی که $p(x)$ راست است.
$\mathbf{N}$	مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی
$\mathbf{Z}$	مجموعهٔ تمام اعداد صحیح
$\mathbf{Q}$	مجموعهٔ تمام اعداد گویا
$\mathbf{R}$	مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی
$\mathbf{R}_+$	مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی مثبت
$A \subseteq B$	A زیرمجموعهٔ B است.

$A \not\subseteq B$	A زیرمجموعهٔ B نیست.
$A \subset B$	A زیرمجموعهٔ سرهٔ B است.
$A \supseteq B$	A ابرمجموعهٔ B است.
$\varnothing$	مجموعهٔ تهی
$A \cap B$	اشتراك مجموعه‌های A و B
$A \cup B$	اجتماع مجموعه‌های A و B
$\mathcal{P}(A)$	مجموعهٔ توانی A (مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های A)
$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$	اشتراك مجموعه‌های C_γ، که درآن $\gamma \in \Gamma$
$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$	اجتماع مجموعه‌های C_γ، که درآن $\gamma \in \Gamma$
$\bigcap_{k=۱}^{n} C_k$	اشتراك مجموعه‌های $C_۱$، $C_۲$، . . .، C_n
$\bigcup_{k=۱}^{n} C_k$	اجتماع مجموعه‌های $C_۱$، $C_۲$، . . .، C_n
$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$	اشتراك مجموعه‌های A متعلق به‌خانوادهٔ $\mathcal{F}$
$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$	اجتماع مجموعه‌های A متعلق به‌خانوادهٔ $\mathcal{F}$
(a, b)	جفت مرتب عناصر a و b
$A \times B$	حاصلضرب دکارتی A و B
$\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$	حوزهٔ رابطهٔ $\mathcal{R}$
$\mathrm{Im}(\mathcal{R})$	نگارهٔ $\mathcal{R}$
$\mathcal{R}^{-۱}$	وارون رابطهٔ $\mathcal{R}$
Δ_X	رابطهٔ همانی روی X
$\mathcal{E}$	رابطهٔ هم‌ارزی
$x/\mathcal{E}$	ردهٔ هم‌ارزی که با x و $\mathcal{E}$ مشخص می‌شود
$X/\mathcal{E}$	مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $x/\mathcal{E}$ که درآن $x \in X$
$\mathcal{P}$	افراز مجموعه
$X/\mathcal{P}$	رابطهٔ هم‌ارزی القایی روی X با افراز $\mathcal{P}$
$f : X \to Y$	تابع f از X به Y
$I_X : X \to X$	تابع همانی روی X
$\chi_A : X \to \{۱, ۲\}$	تابع مشخصهٔ A، $A \subseteq X$
$f : X \sim Y$	تابع $f : X \to Y$ یك تناظر یك به‌یك است.
۲^A	مجموعهٔ تمام توابع از A به $\{۱, ۲\}$
B^A	مجموعهٔ تمام توابع از A به B

$A \sim B$	A همتوان B است.
$\operatorname{card} A$	عدد اصلی مجموعهٔ A
$\aleph_0$	عدد اصلی مجموعهٔ اعداد طبیعی
c	عدد اصلی مجموعهٔ اعداد حقیقی
$\mathfrak{f}$	عدد اصلی مجموعهٔ تمام توابع از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$
A_x	قطعهٔ $\{a \in A \mid a < x\}$ ازمجموعهٔ خوشترتیب $(A, \leqslant)$
$(A, \leqslant) \approx (B, \leqslant')$	مجموعه‌های خوشترتیب $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant')$ همریخت ترتیبی هستند
$\operatorname{ord}(A, \leqslant)$	عدد ترتیبی $(A, \leqslant)$
ω	عدد ترتیبی $(\mathbf{N}, \leqslant)$

مراجع برگزیده

برای کسانی که می‌خواهند مطالعهٔ بیشتری در نظریهٔ مجموعه‌ها داشته باشند، کتابهای زیر را توصیه می‌کنیم:

۱. کتابهای تاریخی و فلسفی

Benaceraf, Paul, and Hilary Putnam, eds. *Philosophy of Mathematics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1964.

Van Heijenoort, Jean, ed. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967,

Wilder. Raymond L. *Introduction to the Foundations of Mathematics*. 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.

۲. کتابهای مربوط به‌منطق

Copi, Irving M. *Symbolic Logic*. 3rd ed. The Macmillan Company, 1976.

Kleene, Stephen C. *Mathematical Logic*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.

۳. کتابهای مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها

Fraenkel, Abraham A. *Set Theory and Logic*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading. Mass., 1966.

Halmos, Paul R. *Naive Set Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1960.

Hayden, Seymour, and John F. Kennison. *Zermelo-Fraenkel Set Theory*.

Charles E. Merrill Publishing Company, Columbus, Ohio, 1968.
Monk, J. Donald. *Introduction to Set Theory*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1969.
Pinter, Charles C. *Set Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1971.
Suppes, Patrick. *Axiomatic Set Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1960.

۴. کتابهای مربوط به‌جبر بول وکاربردهای آن

Boole, G. *An Introduction of the Law of Thought*. Dover Publications, Inc., New York, 1954,
Mano, M. Morris. *Digital Logic and Computer Design*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1979.

واژه‌نامهٔ انگلیسی ـ فارسی

absorption laws	قوانین جذب
admissible subset	زیرمجموعهٔ پذیرفتنی
aleph-null	الف ـ صفر
antichain	پاد زنجیر
antisymmetric relation	رابطهٔ پادمتقارن
associative laws	قوانین شرکتپذیری
axiom	اصل موضوع
— of cardinality	اصل موضوع اعداد اصلی
— of choice	اصل موضوع انتخاب
— of power sets	اصل موضوع مجموعه‌های توانی
— of specification	اصل موضوع تصریح
biconditional connective	رابط دوشرطی
biconditional statement	گزارهٔ دوشرطی
binary variable	متغیر دوتایی
cardinal sum	مجموع اصلی
cardinal number	عدد اصلی
cardinal product	حاصلضرب اصلی
cartesian product	حاصلضرب دکارتی
characteristic function	تابع مشخصه
choice function	تابع انتخاب
complementation	متممگیری

conditional connective	رابط شرطی
conditional statement	گزارهٔ شرطی
congruence relation	رابطهٔ همنهشتی
conjunction	عاطف، ترکیب عطفی
connective	رابط
constructive dilemmas	قیاس ذوالوجهین موجب
contrapositive law	قانون عکس نقیض
countable set	مجموعهٔ شمارا
counter example	مثال نقیض
deductive method	روش قیاسی
deductive reasoning	استدلال قیاسی
denumerable set	مجموعهٔ شمارای نامتناهی
destructive dilemmas	قیاس ذوالوجهین منفی
diagonal relation	رابطهٔ قطری
disjunction	ترکیب فصلی
disjunctive syllogism	قانون دفع مؤلفه
distributive laws	قوانین پخشپذیری
domain of discourse	حوزهٔ سخن
double negation	نفی مضاعف
equipotence	همتوانی
equivalence relation	رابطهٔ هم‌ارزی
equivalence class	ردهٔ هم‌ارزی
exclusive disjunction	یای مانع جمع
existential quantifier	سور وجودی
exportation law	قانون تفکیک دومقدم
finite cardinal number	عدد اصلی متناهی
finite character	مشخصهٔ متناهی
formal proof of validity	برهان درستی
full-adder	تمام-فزونگر
full-subtractor	تمام-تفاضلگر
gate	دریچه

generalized continuum hypothesis	فرض پیوستار تعمیم‌یافته
half_adder	نیم-فزونگر
half_subtractor	نیم-تفاضلگر
Hausdorff maximality principle	اصل ماکسیمال هاوسدورف
identity function	تابع همانی
image	نگاره
implementation	پیاده‌سازی
implication	استلزام
inclusion function	تابع شمول
inclusive disjunction	یای شمول
induction hypothesis	فرض استقرا
inverse function	تابع وارون
inverse image	نگارۀ وارون
inverter	وارونگر
lattice point	نقطۀ مشبکه‌ای
law	قانون
laws of idempotence	قانونهای خودتوانی
lexicographic ordering	ترتیب الفبایی
linearly ordered set	مجموعۀ مرتب خطی
linear order	ترتیب خطی
literal	لفظ
logically equivalent	هم‌ارز منطقی
logic circuit	مدار منطقی
logic gate	دریچۀ منطقی
mathematical induction	استقرای ریاضی
modus ponens	قیاس استثنایی
modus tollens	قیاس دفع
negation	نقیض، نفی
nondenumerable set	مجموعۀ ناشمارا

order isomorphism	همریختی ترتیبی
ordinal number	عدد ترتیبی
ordinal sum	مجموع ترتیبی
partial order relation	رابطهٔ ترتیب جزئی
partition	افراز
partially ordered set	مجموعهٔ جزئاً مرتب
preimage	پیشنگاره
premises	مقدمات
propositional predicate	گزاره‌نما
quantification rules	قواعد تسویر
quantified statement	گزارهٔ مسور
quantifier	سور
– negation	نقیض سور
rules of inference	قاعده‌های استنتاج
set	مجموعه
– builder notation	نماد مجموعه‌ساز
simplification laws	قوانین اختصار
simplified truth table	جدول ارزش اختصاری
specification of sets	تصریح مجموعه‌ها
strictly decreasing function	تابع اکیداً نزولی
strictly increasing function	تابع اکیداً صعودی
successor	تالی
superset	ابرمجموعه
symmetric difference	تفاضل متقارن
tautology	راستگو
total order relation	رابطهٔ کلاً مرتب
totally ordered set	مجموعهٔ کلاً مرتب
transcendental number	عدد متعالی
transfinite cardinal number	عدد اصلی ترامتناهی
transfinite induction	استقرای ترامتناهی

universal quantifier	سور عمومی
universal set	مجموعه جهانی
universe of discourse	عالم سخن
well-ordered set	مجموعهٔ خوشترتیب
well-ordering principle	اصل خوشترتیبی

واژه‌نامهٔ فارسی-انگلیسی

ابر مجموعه	superset
استدلال قیاسی	deductive reasoning
استقرای ترامتناهی	transfinite induction
استقرای ریاضی	mathematical induction
استلزام	implication
اصل خوشترتیبی	well-ordering principle
اصل ماکسیمال هاوسدورف	Hausdorff maximality principle
اصل موضوع	axiom
ـ اعداد اصلی	axiom of cardinality
ـ انتخاب	axiom of choice
ـ تصریح	axiom of specification
ـ مجموعه‌های توانی	axiom of power sets
افراز	partition
الف ـ صفر	aleph-null
برهان درستی	formal proof of validity
پاد زنجیر	antichain
پیاده‌سازی	implementation
پیشنگاره	preimage
تابع	function
ـ اکیداً صعودی	strictly increasing function
ـ اکیداً نزولی	strictly decreasing function

choice function	ـ انتخاب
inclusion function	ـ شمول
characteristic function	ـ مشخصه
inverse function	ـ وارون
identity function	ـ همانی
successor	تالی
lexicographic ordering	ترتیب الفبایی
linear order	ترتیب خطی
	ترکیب عطفی ← عاطف
disjunction	ترکیب فصلی
specification of sets	تصریح مجموعه‌ها
symmetric difference	تفاضل متقارن
full-subtractor	تمام-تفاضلگر
full-adder	تمام-فزونگر
truth table	جدول ارزش
simplified truth table	ـ اختصاری
cardinal product	حاصلضرب اصلی
cartesian product	حاصلضرب دکارتی
domain of discourse	حوزهٔ سخن
gate	دریچه
logic gate	دریچهٔ منطقی
connective	رابط
biconditional connective	ـ دوشرطی
conditional connective	ـ شرطی
relation	رابطه
antisymmetric relation	ـ پاد متقارن
partial order relation	ـ ترتیب جزئی
diagonal relation	ـ قطری
total order relation	ـ کلاً مرتب
equivalence relation	ـ هم‌ارزی
congruence relation	ـ همنهشتی

tautology	راستگو
equivalence class	ردهٔ هم‌ارزی
deductive method	روش قیاسی
admissible subset	زیرمجموعهٔ پذیرفتنی
quantifier	سور
universal quantifier	ـ عمومی
existential quantifier	ـ وجودی
conjunction	عاطف
	مت : ترکیب عطفی
universe of discourse	عالم سخن
cardinal number	عدد اصلی
transfinite cardinal number	ـ ترامتناهی
finite cardinal number	ـ متناهی
ordinal number	عدد ترتیبی
transcendental number	عدد متعالی
hypothesis	فرض
induction hypothesis	ـ استقرا
generalized continuum hypothesis	ـ پیوستار تعمیم‌یافته
rules of inference	قاعده‌های استنتاج
law	قانون
transitive law	ـ متعدی
exportation law	ـ تفکیک دو مقدم
disjunctive syllogism	ـ دفع مؤلفه
contrapositive law	ـ عکس نقیض
laws of idempotence	ـ های خود توانی
quantification rules	قواعد تسویر
simplification laws	قوانین اختصار
distributive laws	قوانین پخشپذیری
absorption laws	قوانین جذب

قوانین شرکت‌پذیری	associative laws
قیاس استثنایی	modus ponens
قیاس دفع	modus tollens
قیاس ذوالوجهین منفی	destructive dilemmas
قیاس ذوالوجهین موجب	constructive dilemmas
گزارهٔ دوشرطی	biconditional statement
گزارهٔ شرطی	conditional statement
گزارهٔ مسور	quantified statement
گزاره‌نما	propositional predicate
لفظ	literal
متغیر دوتایی	binary variable
متممگیری	complementation
مثال نقیض	counter example
مجموع اصلی	cardinal sum
مجموع ترتیبی	ordinal sum
مجموعه	set
ـ جزئاً مرتب	partially ordered set
ـ جهانی	universal set
ـ خوشترتیب	well-ordered set
ـ شمارا	countable set
ـ شمارای نامتناهی	denumerable set
ـ کلاً مرتب	totally ordered set
ـ مرتب خطی	linearly ordered set
ـ ناشمارا	nondenumerable set
مدار منطقی	logic circuit
مشخصهٔ متناهی	finite character
مقدمات	premises
نفی ← نقیض	
نفی مضاعف	double negation
نقطهٔ مشبکه‌ای	lattice point
نقیض	negation

مت : نفی	
نقیض سور	quantifier negation
نگاره	image
نگارهٔ وارون	inverse image
نماد مجموعه‌ساز	set builder notation
نیم-تفاضلگر	half-subtractor
نیم-فزونگر	half-adder
وارونگر	inverter
هم‌ارز منطقی	logically equivalent
همتوانی	equipotence
همریختی ترتیبی	order isomorphism
یای شمول	inclusive disjuncttion
یای مانع جمع	exclusive disjunction

فهرست راهنما

MATH75.IR

مرکز نشر دانشگاهی
www.iup.ir

ISBN: 978-964-01-0462-0