

دنباله: دنباله تابعی است که حوزه تعریف (دامنه) آن مجموعه اعداد طبیعی و بردار آن اعداد حقیقی است
یعنی: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ یا $n \rightarrow f(n)$ که $f(n)$ را با a_n نشان می‌دهند و آن را جمله عمومی دنباله می‌گویند.

نمادگذاری: دنباله $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ را به شکل $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یا مختصراً a_n نمایش می‌دهند.

برای مثال: $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ، $a_n = \frac{n}{n+1}$ ، $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$ هر سه دنباله را تعریف می‌کنند
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $a_1 \quad a_2 \quad a_3$
 $\downarrow$
جمله عمومی

(2) $\left\{ \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ، $a_n = \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n}$ ، $\left\{ -\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \dots, \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n}, \dots \right\}$

حد دنباله

تعریف: حد دنباله $\{a_n\}$ برابر با L است می‌نویسیم

$a_n \rightarrow L$ وقتی $n \rightarrow +\infty$

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$

منظور از حد دنباله یعنی حد جمله عمومی آن هرگاه n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

اگر حد فوق متناهی باشند آن‌گاه گویند دنباله همگرا نیست در غیر این صورت اگر حد وجود داشته باشد برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، دنباله را عدد $+\infty$ یا $-\infty$ می‌گویند.

قضیه [3]: اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و وقتی n عددی طبیعی است $f(n) = a_n$ آن‌گاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

توجه: منظور از قضیه فوق این است که در جمله عمومی دنباله به جای x برابر هم x و جمله عمومی را تابعی از x در نظر می‌گیریم و مانند حد توابع با آن برخورد می‌کنیم. طه توانس حدگیری توابع در مورد دنباله‌ها نیز برقرار است. قاعده هسپیتال، و تمام رفع ابهام‌های قبلاً توضیح دادیم در صورت نیاز می‌توان در اینجا نیز به کار برد.

قضیه 6 اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

مثال 2 وضعیت همگرایی و نامرئی دنباله کی زیر را تعیین کنید.

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\infty}{\infty}$

(مطلوبه: ∞ در نامرئی ∞ است)

توجه کنید که حالت $\frac{\infty}{\infty}$ رخ دارد است، نمی توان به طور مستقیم از قاعده هسپیتال استفاده کرد، زیرا از آن باید برای تابع f با متغیر حقیقی استفاده کردند دنباله ها پس $f(x) = \frac{x+1}{x+1}$ و $f(n) = a_n$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} \stackrel{Hop}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)' }{(x+1)'} = \frac{1}{1} = 1 \leftarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n} = 1 = 1$ (اگر صورت و مخرج هم ∞ باشند)
 خیلی ساده تر هم می توانستیم حد فوق را به دست آوریم.
 (نکته درضو 8 دیده شد)

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$

$f(n) = a_n$; $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

حل:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{Hop}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0 \rightarrow$

دنباله همگرا است
 چون حاصل حد عدد است

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$

$\{ \overset{n=1}{-1}, \overset{n=2}{1}, \overset{n=3}{-1}, \overset{n=4}{1}, \dots \}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

زوج
 فرد

حل: جملات دنباله را می نویسیم
 جمله n امین را -1 نویسان می کند
 a_n به هیچ عددی میل نمی کند.

حد دارای دو مقدار 1 و -1 است پس حد وجود ندارد. (حد در صورت وجود منحصر به فرد است)
 دنباله واگراست.

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$

$|(-1)^n| = 1$

حل: بنابر قضیه 6 $\leftarrow$

راه حل اول

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

دنباله همگرا است. حاصل حد عدد است.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 & n \text{ زوج} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$

راه حل دوم

$(-1)^n = 1$: زوج
 $(-1)^n = -1$: فرد

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

در هر دو حالت n فرد یا زوج باشد حاصل حد منفرست می‌شود

نکته: دنباله $\{r^n\}$ برای $-1 < r < 1$ همگراست و برای بقیه مقادیر r واگراست

$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = \begin{cases} 0 & -1 < r < 1 \\ 1 & r = 1 \\ +\infty & r > 1 \end{cases}$

دنباله‌ای می‌شود و در آنجا

تعریف (صوری، نزولی) دنباله $\{a_n\}$ را صعودی می‌نامند هرگاه برای هر n

$a_{n+1} - a_n \geq 0$ یا $a_{n+1} \geq a_n$ یا $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

و نزولی می‌نامند هرگاه

$a_{n+1} - a_n \leq 0$ یا $a_{n+1} \leq a_n$ یا $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

توجه 1: اگر دنباله به صورت فاکتوریل باشد برای صعودی (نزولی) از $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ (یا $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$) استفاده می‌کنیم

توجه 2: برای تعیین صعودی و نزولی بودن دنباله $\{a_n\}$ می‌توان به صورت زیر عمل کرد

$f(n) = a_n \Rightarrow \begin{cases} f'(x) \leq 0 \rightarrow f \text{ نزولی است} \\ f'(x) \geq 0 \rightarrow f \text{ صعودی است} \end{cases}$

(حفظ کنید) دنباله‌ای که صعودی یا نزولی باشد را می‌توانیم

تعریف: دنباله $\{a_n\}$ را از بالا بدهند هرگاه عددی مانند M وجود داشته باشد که

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M$

$\forall n \geq 1$

$\forall n \geq 1 \quad a_n \geq m$

از پایین و از بالا بدهند

اگر $\{a_n\}$ از بالا راسخ در اندازه باشد، دنباله را از اندازه نوشتیم

قضیه (دنباله یکنوا) : هر دنباله که از بالا راسخ و یکنوا باشد، همگراست.
 ترجمه : قضیه فوق به معنای محدود شدن و همگرا شدن در حد یک نقطه است.
 مثال 3 : وضعیت یکنوایی دنباله های زیر را تعیین کنید.

1) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

نوع : برای تعیین صعودی و نزولی اولویت را

در $f'(x)$ قدری دهیم . $f(n) = a_n$

نوع راسته باشد وقتی از $f'(x)$ برای تشخیص صعودی

و نزولی استفاده می کنیم، وضعیت صعودی و نزولی f

را فقط در x بررسی می کنیم (چون $n \geq 1$)

جدول تعیین علامت

	-1	1	
$f'(x)$	مثبت $x^2 -$	منفی $+ x^2$	مثبت $x^2 -$
f	↓	↑	↓

عنوان (در نقطه x در آنجا)
 در نظر است

نقطه بحرانی ← ریشه صورت $= 0$

$1-x^2=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

مخرج که همواره مثبت است پس فقط

کافی است وضعیت f' را برای صورت بررسی کنیم.

دنباله $\{a_n\}$ نزولی است $\Rightarrow f'(x) \leq 0 \rightarrow x \geq 1$

مثال 4: رضیت گمرای و کارایی دنباله کی زیر را تعیین کنید

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

حل: حد تابع را به روش مستقیم نمی توان به راحتی محاسبه کرد
از قضیه بکنوای (مردنباله) بکنوای (مردنوار، گمرایت) کمک می گیریم. در دو مرحله انجام می دهیم.
1- بکنوای (تعیین صعودی یا نزولی بودن)
2- کرانداری

1- بکنوای (چون دنباله فاکتوریل دارد از $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ استفاده می کنیم)

$$a_{n+1} \leftarrow n \text{ به جای } n \leftarrow n+1 \text{ برای } a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1) \cdot n!} = \frac{2}{n+1} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \quad (n \geq 2 \leftarrow n+1 \geq 2)$$

تقسیم به ضرب تبدیل می شود

عبارت در مخرج را به مخرج می کشیم

نتیجه نریزتر از 1 است.

n	1	2	3	4	5	...
a_n	$\frac{2^1}{1!}$	$\frac{2^2}{2!}$	$\frac{2^3}{3!}$	$\frac{2^4}{4!}$	$\frac{2^5}{5!}$	...

2- کرانداری: با مقدار دادن به n و جایگذاری در a_n

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

$$2^n = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ بار}} \times 2$$

از جدول فوق ملاحظه می کنید بیشترین مقدار این دنباله عدد 2 است

$$0 < a_n < 2$$

و چون جملات a_n مثبت اند پس

پس a_n کراندار است. طبق قضیه چون a_n کراندار و بکنوایت بنابرین گمرایت

نکته: از بکنوای: اگر دنباله a_n نزولی باشد بیشترین مقدار a_n در نقطه شروع دنباله (معمولاً $n=1$) اتفاق می افتد.

سری

هرگاه $\{a_n\}$ یک دنباله باشد مجموع جملات دنباله به صورت $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ را سری نامناهی (سری) می نامند و با $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمایش می دهند که a_n را جمله عمومی سری می نامند.

توجه:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

مجموع جزئی s_n را مجموع جزئی می نامند.

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرا گوئیم هرگاه دنباله $\{s_n\}$ همگرا باشد. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ آنگاه s مجموع سری می نامند و می نویسیم $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ در غیر این صورت سری را واگرای نامند.

به بیانی ساده تر: اگر مجموع بی نهایت جمله فوق در حد به سمت عدد مشخص نزدیک شود سری همگرا باشد در غیر این صورت سری واگرا است.

اگرچه آزمونهای وجود دارد که از طریق آنها می توان تشخیص داد که یک سری همگرا یا واگرا است، اما بهترین اتفاق می افتد بتوانیم مقدار همگرایی یک سری همگرا را بیابیم. در زیر به دوسری اشاره می کنیم که در صورت همگرایی می توان مقدار همگرایی سری (مجموع سری یعنی s) را یافت.

۱- سری های هندسی

سری هندسی سری است که از مجموع جملات یک تصاعد هندسی به دست می آید.

سری به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ یا $(\sum_{n=0}^{\infty} ar^n)$ را در آن a و r اعداد ثابتی هستند. سری هندسی می نامیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

۲: قدر نسبت سری

۱: جمله اول سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad \text{اگر } |r| < 1 \quad \text{سری همگراست و مجموع آن برابر است با}$$

۲: اگر $|r| > 1$ سری واگراست.

مثال ۱: سری $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} 3^{1-n}$ همگراست یا واگرا؟

حل: معنی کنیم سری را به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ بنویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} 3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1}) 3^{-(n-1)}$$

الزامی نیست به حتماً. توان 2^{n-1} باشد.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \cdot 3^{-(n-1)}$$

توان 4 و 3 را بی نهایت
هر دو توان n-1 داشته باشند

$$4^n = 4^{n-1} \times 4$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot 4^{n-1} \cdot 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}$$

$$\left| r \right| = \left| \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow \text{سری واگراست}$$

توان منفی است
به خارج می آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \quad \text{برای مثال}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow \text{سری همگراست.}$$

$$\text{مجموع سری} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

a: با n=0 شروع می شود
به سمت بی نهایت

$$a = \frac{1}{(\sqrt{2})^0} = \frac{1}{1} = 1$$

توجه: a جمله اول است. اگر در این مثال n=1 شروع می شد با قرار دادن n=1 در جمله عمومی سری $a = \frac{1}{(\sqrt{2})}$ به دست می آمد.

2- سری ارقامی (تلسکوپی)

$$\sum_{n=1}^N (a_n - a_{n-1}) = a_N - a_0$$

این سری له توان به شکلی نوشت که در آن

$$\sum_{n=1}^N (a_n - a_{n-1}) = a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \dots + a_N - a_{N-1} = a_N - a_0$$

جملات دو به دو یکدیگر را خنثی می کنند.

مثال 6: در مورد رصفت گنجای سری های زیر بحث کنید. در صورت گنجایشی مجموع ایشان را بیابید.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

حل: وجود عبارات n و n+1 $\Rightarrow$ سری تلسکوپی

برای رسیدن به سری مورد نظر از تجزیه کسرها

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

مخرج مشترک
گذاشته است

$$\frac{A(n+1) + B(n)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

هر دو کسر را مساوی هم
قرار می دهیم

$$\Rightarrow A(n+1) + Bn = 1$$

رسم عبارات $n, n+1$

$$\left. \begin{array}{l} n=0 \\ n=-1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n=0 \Rightarrow A(0+1) + B(0) = 1 \rightarrow A=1 \\ n=-1 \Rightarrow A(-1+1) + B(1) = 1 \rightarrow B=-1 \end{array} \quad \boxed{\star}$$

مجموع جزئی سری را می‌بینیم یعنی $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$

$\star$ از $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

سری تلسکوپی

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$$

چون $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ عدد حقیقی است پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ همگراست و مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

چند قضیه در مورد همگرایی یا واگرایی سری‌ها

قضیه: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

توجه: عکس قضیه فوق برقرار نیست. از عکس نقیض قضیه فوق می‌آریم که در ادامه بیان می‌کنیم

اگر حد صفر باشد نمی‌توان نتیجه گرفت که سری همگراست

در ادامه، آزمون‌های دیگر در تعیین همگرایی و واگرایی سری معرفی می‌کنیم

۱- آزمون n ام: اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ و چون a_n به ۰ میل نمی‌کند، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگر است.

مثال ۷: نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ واگر است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^m + b_{n-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

حل: (یادآوری) نکته: اگر صورت وخرج کسر به هم خنجرایی باشند

$n=m$

$n > m$

$n < m$

* توجه: زمانی که جمله عمومی تابع توان باشد (یا به صورت وخرج خنجرایی باشد)، اگر درجه صورت وخرج برابر باشد صورت بیشتر از درجه مخرج باشد آن بزرگ واگرایی مفید است.

قضیه: اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سری‌های همگرایی داشته باشند، $\sum (a_n + b_n)$ و $\sum ca_n$ عبارت است

$\sum (a_n - b_n)$ نیز همگرایی دارند و

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (i)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (ii)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (iii)$$

مثال ۶ مجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$ را بیابید

حل: $\frac{1}{2^n}$ سری هندسی و $\sum \frac{3}{n(n+1)}$ سری تفسیری است.

مجموع هر دو سری را جداگانه محاسبه می‌کنیم و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. ابتدا هر دو سری را بر قسّم فوق قسمت (iii) عمل می‌کنیم.

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

سری همگراست $|r| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$ و $a = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ درجه عددی

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

r : عددی است به توان برده است
قدر نسبت سری

برای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}$ (حل مثال ۶ را ببینید) $\leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 3 \times 1 = 3$

$\textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ مثال ۶

$$\textcircled{2}, \textcircled{1}: \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 + 1 = 4$$

نکته: عبارتهای جمله نقشی در همگرایی یا واگرایی سری ندارد

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

سری همگرایی ندارد
بعداً با آزمون مقایسه توضیح خواهیم داد

تمرین حل شده تمرین 2.12 ص 907 و ص 908

مشخص کنید سری مورد نظر همگراست یا واگرا. اگر همگراست مجموعش را بداند.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

حل:

سری فوق را به صورت زیر بنویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{(1)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n}_{(2)}$$

هر دو سری هندسی هستند.

سری (1) با قدر نسبت $|r| = \frac{1}{2} < 1$ همگراست و سری (2) با قدر نسبت $|r| = \frac{3}{2} > 1$ واگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$ واگراست (مجموع یک سری همگرا با سری واگرا ← واگراست)

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)}_{a_n}$

حل:

سری به فرم هندسی و ابعادی نیست ← از آزمون واگرای استفاده می‌کنیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right) = \ln\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$$

سری واگراست.
 نتیجه صفحه 8

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

→ به عمده دانستجو
مسابه مثال 8

$e \approx 2.7$ (عدد ثابت)

تمرینات به عمده دانستجو ص 908

38, 37, 24, 30, 28