پیوستگی

تعریف: تابع دو متغیره f را در (a,b) پیوسته می‌نامند، به شرطی که

1. $f(a,b)$ وجود داشته باشد (عدد باشد)
2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود داشته باشد (عدد باشد)
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

توجه ۱: اگر یکی از شرایط فوق برقرار نباشد آنگاه تابع f در نقطه (a,b) پیوسته نیست.

توجه 2. تمام قوانین پیوستگی برای توابع چند متغیره همانند توابع یک متغیره در ریاضی ۱ برقرار است

قوانین پیوستگی:
1. توابع چندجمله‌ای همه‌جا پیوسته‌اند
2. توابع گویا، مثلثاتی، رادیکال با فرجه زوج، $\ln$ روی دامنه‌شان پیوسته‌اند
3. ~~[illegible]~~ جمع و ضرب و تفریق دو تابع پیوسته، پیوسته است
4. در حالت تقسیم دو تابع، به شرطی که مخرج صفر نشود پیوسته است

مثال) در مورد پیوستگی توابع زیر بحث کنید:

1) $f(x,y) = \dfrac{2xy+1}{x^2+y^2}$

حل: $f(x,y)$ تابع گویا است که روی دامنه $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ پیوسته است

یا f روی دامنه D که $D = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ است پیوسته است.

2) $f(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$

حل: f یک چندجمله‌ای برحسب x و y است. پس همه‌جا پیوسته است.

توجه: برای توابع چندضابطه‌ای، پیوستگی را در نقاطی که ضابطه تابع تغییر می‌کند، جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال: پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید.

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

حل/

1) $f(0,0) = 0$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: C_1 مسیر $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\} \Rightarrow \lim_{(x,y)\underset{C_1}{\to}(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \dfrac{-y^2}{y^2} = -1 = L_1$

C_2 مسیر $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\} \rightarrow \lim_{(x,y)\underset{C_2}{\to}(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 = L_2$ $\Rightarrow$

حد وجود ندارد پس تابع پیوسته نیست در $(0,0)$، همه جا به جز در $(0,0)$ پیوسته است.

$$2)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

توجه: $\boxed{\text{استفاده از مختصات قطبی برای محاسبه حد}}$

نکته ۱) برای محاسبه $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ با تغییر متغیرهای $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ و اینکه $r^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta$ ... از $(x,y)\to(0,0)$ داریم $r\to 0$. لذا در این حالت محاسبه حد شبیه حالت یک متغیره است.

نکته ۲) برای توابع سه متغیره از تغییر متغیر
$$\begin{cases}x=r\cos\alpha\\ y=r\cos\beta\\ z=r\cos\gamma\end{cases}$$
استفاده می‌کنیم. $x^2+y^2+z^2=r^2$

$$x^2+y^2+z^2=r^2\cos^2\alpha+r^2\cos^2\beta+r^2\cos^2\gamma=r^2\underbrace{(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}_{\text{مجموع زوایای هادی }=1}=r^2$$

برای حل مثال فوق از نکته فوق استفاده می‌کنیم

$$f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{3r^2\cos^2\theta\, r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\frac{3r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}=3r\cos^2\theta\sin\theta$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{r\to 0}(r\cos^2\theta\sin\theta)=0}_{\text{حد تابع}}=\underbrace{f(0,0)}_{\text{مقدار تابع}}$$

در نتیجه تابع در $(0,0)$ پیوسته است

x^2+y^2
x^4+y^4

توجه: زمانی از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم که متغیرهای x و y و z در مخرج یکسان باشند به ویژه درجه آنها زوج باشد یا تمام جملات در مخرج از یک درجه باشند. اگر بعد از ساده کردن در نهایت مقدار حد به θ وابسته باشد حد وجود ندارد. سعی کنیم برای نشان دادن پیوستگی یا حد از مختصات قطبی استفاده کنیم و برای نشان دادن عدم وجود حد از انتخاب مسیرها استفاده کنیم.

توابع سه متغیره یا تعداد بیشتر متغیر

۱- حد سه متغیره

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad s.t.\quad 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}<\delta$$
$$\Rightarrow |f(x,y,z)-L|<\varepsilon$$

مانند حالت دو متغیره تعریف شد در اینجا (برای توابع سه متغیره) مجموعه نقاط داخل کره به مرکز (a,b,c) و شعاع δ است.

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$$

$C_1=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x=0,\ z=0\}\to \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{0}{y^2+0}=0$

$C_2=\{(x,y,z)\in R^3 \mid z=0,\ y=x\}\to \lim\limits_{(x,y,z)\xrightarrow{C_2}(0,0,0)} f(x,y,z)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^2}{2y^2}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ حد وجود ندارد

۲) پیوستگی تابع سه متغیره

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$$

مثال) تابع $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$ در هر نقطه از $\mathbb{R}^3$ به جز نقطه‌هایی که $\underbrace{x^2+y^2+z^2=1}_{\text{معادله کره به مرکز } (0,0,0) \text{ و شعاع } 1}$ پیوسته است.

به عبارت دیگر روی کره به مرکز مبدأ و شعاع 1 ناپیوسته است

مشتق جزئی: فرض می‌کنیم f تابعی n متغیره باشد. اگر همه متغیرها به جز یکی از آنها را ثابت در نظر بگیریم، تابعی یک متغیره به دست می‌آید.

مشتق جزئی f نسبت به x و y در (a,b) به ترتیب با $f_x(a,b)$ و $f_y(a,b)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

$$f_y(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

اگر حد فوق موجود باشد می‌گوییم مشتق جزئی f نسبت به x یا y وجود دارد

تعریف: اگر f تابعی دو متغیره باشد مشتق‌های جزئی‌اش تابع‌های f_x، f_y اند که

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

نکته: برای توابع دوضابطه‌ای از تعریف مشتق جزئی استفاده می‌کنیم

نمادگذاری‌های دیگر مشتق جزئی

اگر $z=f(x,y)$ باشد

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = D_x f$$

$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = D_y f$$

قاعده پیدا کردن مشتق‌های جزئی $z=f(x,y)$

1- برای پیدا کردن f_x، y را ثابت در نظر می‌گیریم و از $f(x,y)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم

2- برای پیدا کردن f_y، x را ثابت در نظر می‌گیریم و از $f(x,y)$ نسبت به y مشتق می‌گیریم

مثال) اگر $f(x,y)=x^3+x^2y^3-2y^2$ ، $f_x(2,1)$ و $f_y(2,1)$ را بیابید

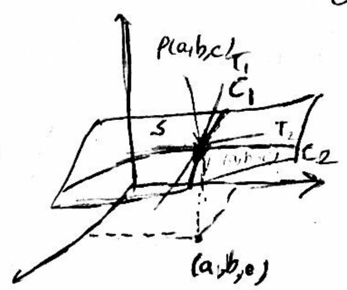
از جملاتی که x دارند مشتق می‌گیریم

(y را ثابت فرض می‌کنیم) $f_x(x,y)=3x^2+2xy^3 \Rightarrow f_x(2,1)=3\times 2^2+2\times 2\times 1^3=16$

(x را ثابت فرض می‌کنیم) $f_y(x,y)=3x^2y^2-4y \Rightarrow f_y(2,1)=3\times 2^2\times 1^2-4\times 1=8$

از جملاتی که y دارند مشتق می‌گیریم

تعبیر مشتق جزئی



مشتق‌های جزئی f در (a,b) شیب خط‌های مماس بر C_1 و C_2 اند.

توجه: منحنی C_1 نمودار تابع $g(x)=f(x,b)$ است. بنابراین شیب مماسش T_1 در P برابر است با $g'(a)=f_x(a,b)$

منحنی C_2 نمودار تابع $G(y)=f(a,y)$ است. بنابراین شیب مماسش T_2 در P برابر است با $G'(b)=f_y(a,b)$. بنابراین مشتق‌های جزئی $f_x(a,b)$ و $f_y(a,b)$ را می‌توان به طور هندسی به شیب خط‌های مماس در $P(a,b,c)$ در C_1 و C_2 از S در صفحه $y=b$ و $x=a$ تعبیر کرد.

مثال) اگر $f(x,y)=\sin\frac{x}{1+y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را بیابید

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right)\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)=\frac{1}{1+y}\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right)\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)=-\frac{x}{(1+y)^2}\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

مشتق جزئی توابع بیشتر از دو متغیر

فرض کنید $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ آنگاه مشتق جزئی اش نسبت به x_i برابر است با

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}{h}$$

برای مثال برای تابع سه متغیره

$$f_x(x,y,z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$

توجه: $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = D_i f$ همگی این نمادها یک معنا دارند. (مشتق f نسبت به x_i)

مشتقات جزئی مرتبه بالاتر

نمادگذاری ها برای مشتقات جزئی مرتبه بالاتر

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
 & & f_{xx}(x,y) \\
 & f_x(x,y) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & f_{xy}(x,y) \\
f(x,y) \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & f_{yx}(x,y) \\
 & f_y(x,y) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & f_{yy}(x,y)
\end{tikzcd}$$

مشتق دوم نسبت به x: $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ترتیب اولویت ① ②: $f_{yx} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{\text{دوم}}\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\text{اول}}\Big)$

ترتیب اولویت: $f_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}}_{2}\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{1}\Big)$

برای توسیع دوم مشابه از تعریف می رویم:

$$f_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(x,y+h) - f_x(x,y)}{h}$$

$$f_{xx}(x,y) = \lim \frac{f_x(x+h,y) - f_x(x,y)}{h}$$

بقیه نیز به طور مشابه تعریف می شوند

مثال) مشتق های جزئی دوم $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ را بیابید

حل: f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} , f_{yy} را باید بیابیم

$\boxed{1}$ $f_{xx} = (f_x)_x = (3x^2 + 2xy^3)_x = 6x + 2y^3$

$\boxed{2}$ $f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 2xy^3\right) = 6xy^2$

$\boxed{3}$ $f_{yx} = \underbrace{(\underset{1}{f_y})_x}_{2} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{2}\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{1}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 - 4y\right) = 6xy^2$

$\boxed{4}$ $f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 - 4y\right) = 6x^2y - 4$

نتیجه: $f_{xy} = f_{yx}$ (چون f_{xy} , f_{yx} پیوسته اند)

قضیه کلرو: فرض کنید f روی گوی (قرص) D شامل نقطه (a,b) است تعریف شده است. اگر تابع های f_{xy} و f_{yx} هر دو روی D پیوسته باشند آنگاه $f_{yx}(a,b)=f_{xy}(a,b)$

نتیجه: با استفاده از قضیه کلرو $f_{xyy}=f_{yxy}=f_{yyx}$ برابرند به شرطی که این تابع ها پیوسته باشند

مثال) اگر $f(x,y,z)=\sin(3x+yz)$ ، f_{xxyz} را بیابید.

حل:

$f_x=3\cos(3x+yz)$ $\qquad$ $f_{xx}=-9\sin(3x+yz)$

$f_{xxy}=-9z\cos(3x+yz)$ $\qquad$ $f_{xxyz}=-9\cos(3x+yz)+9yz\sin(3x+yz)$

معادلات دیفرانسیل جزئی:

معادله دیفرانسیل $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0}$ را معادله لاپلاس می نامند.

مثال) نشان دهید که تابع $u(x,y)=e^x\sin y$ جوابی برای معادله لاپلاس است

حل: باید نشان دهیم

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$u_x=e^x\sin y$ $\qquad$ $u_y=e^x\cos y$ $\qquad$ $\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=e^x\sin y-e^x\sin y=0$

$\underbrace{u_{xx}=e^x\sin y}$ $\qquad$ $\underbrace{u_{yy}=-e^x\sin y}$

مثال) فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مقادیر $f_x(0,y)$ ، $f_y(x,0)$ ، $f_x(0,0)$ ، $f_y(0,0)$ را بیابید.

حل: چون تابع دو ضابطه ای است برای مشتقات جزئی از تعریف مشتق جزئی استفاده می کنیم

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$$

$$f_x(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3y-hy^3}{h^2+y^2}-\frac{0-0}{h^2+y^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hy(h-y^2)}{h(h^2+y^2)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{y(h-y^2)}{h^2+y^2}=-y$$

ادامه حل با دانشجو

قسمت ب) نشان دهید که $f_{xy}(0,0)=-1$ و $f_{yx}(0,0)=1$.

$f_x(x,y)=\Big\{$

تمرین به عهده دانشجو.

مسیرهای مشخص در $\mathbb{R}^2$ دقت

$(x,y)\to(a,b)$

1. مسیر $y=b$

2. مسیر $x=a$

3. مسیر $y-b=m(x-a)$ ⟸ معمولاً $m=1$

4. مسیر $\underbrace{y-b=n(x-a)^{\alpha}}_{\text{منحنی}}$, $a\in\mathbb{R}$

مثلاً $y=x^{3/2}$

مثال) پیوستگی

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2+(y-1)^2} & (x,y)\neq(2,1)\\ 0 & (x,y)=(2,1)\end{cases}$$

مسیر $C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=2\}$ ⟹ روی مسیر C_1 $\displaystyle\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_1]{}(2,1)}\frac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2+(y-1)^2}=0=L_1$

مسیر C_2 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y-1=x-2\}$, $y=x-1$ ⟹ $\displaystyle\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_2]{}(2,1)}\frac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2+(y-1)^2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{2(x-2)^2}=1/2=L_2$

$\Longrightarrow L_1\neq L_2$

⟸ عدم وجود حد تابع در $(2,1)$ به همراه خود ناپیوستگی است.

تمرین: 38، 39، 37، 61، 65، 77، 64، 95، 73

پیوستگی تابع زیر را بررسی کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$