آزمون‌های همگرایی سری‌های عددی

۱- **آزمون واگرایی:** اگر برای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ داشته باشیم: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ و یا $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود نباشد، سری واگرا است.

۲- **آزمون انتگرال:** فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری مثبت و $f(x)$ برای $x \geq 1$ یک تابع پیوسته، نزولی و نامنفی باشد و برای $n \geq 1$ داشته باشیم: $a_n = f(n)$. در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و انتگرال غیر عادی $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$، هر دو همگرا یا هر دو واگرا می‌باشند.

۳- **آزمون p ـ سری:** هرگاه p یک عدد حقیقی مثبت باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ را یک p ـ سری (یا سری p) می‌گویند.
اگر $p > 1$ سری همگرا و اگر $p \leq 1$ سری واگرا می‌باشد.

۴- **آزمون مقایسه:** فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری مثبت و برای هر n داشته باشیم: $a_n \leq b_n$

الف) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

ب) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا است.

۵- **آزمون مقایسه حدی:** فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری مثبت باشند و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ در این صورت:

الف) اگر $L > 0$ دو سری از یک نوع می‌باشند.

ب) اگر $L = 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

ج) اگر $L = \infty$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگرا است.

۶- **آزمون نسبت (قضیه دالامبر):** فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری و داشته باشیم: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ آنگاه:

الف) اگر $0 \leq L < 1$، سری همگرا است. **ب)** اگر $L > 1$، سری واگرا است.

ج) اگر $L = 1$، از این آزمون نمی‌توان اطلاعی در مورد همگرایی یا واگرایی سری به‌دست آورد.

۷- **آزمون ریشه (قضیه کوشی):** فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری و داشته باشیم: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ آنگاه:

الف) اگر $0 \leq L < 1$، سری همگرا است. **ب)** اگر $L > 1$، سری واگرا است.

ج) اگر $L = 1$، از این آزمون نمی‌توان اطلاعی در مورد همگرایی یا واگرایی سری به‌دست آورد.

۸- **آزمون سری‌های متناوب (آزمون لایب‌نیتز):** اگر $\{a_n\}$ یک دنباله نزولی از اعداد مثبت و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ آنگاه سری‌های متناوب مقابل همگرا می‌باشند. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

۹- **آزمون همگرایی مطلق:** اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

جدول ۱

سریهای مک‌لورین مهم و شعاعهای همگرایی‌شان

$$\frac{۱}{۱-x} = \sum_{n=\circ}^{\infty} x^n = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots \qquad R = ۱$$

$$e^x = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=\circ}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=\circ}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\tan^{-۱} x = \sum_{n=\circ}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \frac{x^۷}{۷} + \cdots \qquad R = ۱$$

$$(۱+x)^k = \sum_{n=\circ}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = ۱ + kx + \frac{k(k-۱)}{۲!}x^۲ + \frac{k(k-۱)(k-۲)}{۳!}x^۳ + \cdots \qquad R = ۱$$