۲- همتوانی (همعددی) مجموعه‌ها

تعریف ۲: دو مجموعه X و Y را همتوان (همعدد) نامیم هرگاه بین X و Y یک تناظر یک به یک $f: X \to Y$ وجود داشته باشد و اگر دو مجموعه X و Y همتوان (همعدد) باشند می‌نویسیم $X \sim Y$ و می‌خوانیم که X و Y همعدد (همتوان) هستند.

توجه: در مجموعه‌های متناهی اگر $X \sim Y$ آنگاه تعداد اعضای X و Y با هم برابر هستند. و برابری تعداد اعضای دو مجموعه نامتناهی در حالی که همعدد (همتوان) هستند به کار نمی‌بریم.

قضیه ۵: فرض کنید که P مجموعه‌ای از مجموعه‌ها است و R رابطه همعددی (همتوانی) روی P باشد یعنی $(X,Y) \in R \iff X \sim Y$. آنگاه R (رابطه همعددی) یک رابطه هم‌ارزی روی P است.

اثبات: R انعکاسی است زیرا $\forall X \in P$، $I_X: X \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} X$ تابع همانی I_X وجود دارد
چون I_X دوسوی است پس $X \sim X$ یعنی $(X,X) \in R$. $\quad I_X(x) = x$

R تقارنی است: اگر $(X,Y) \in R$ پس $X \sim Y$ یعنی تابع دوسوی $f: X \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} Y$ وجود دارد
حال چون $f^{-1}: Y \to X$ هم دوسوی است پس $Y \sim X$ یعنی $(Y,X) \in R$.

R متعدی است: اگر $(X,Y) \in R$ و $(Y,Z) \in R$ پس $X \sim Y$ و $Y \sim Z$ یعنی توابع دوسوی $f: X \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} Y$ و $g: Y \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} Z$ وجود دارد حال چون $h = gof: X \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} Z$ یک تابع دوسوی است پس $X \sim Z$ یعنی $(X,Z) \in R$.

قرارداد: بجای تابع دوسوی $f: X \to Y$ می‌نویسیم $f: X \rightarrowtail Y$.

مثال ۱: نشان دهید که الف) $(0,1) \sim (-1,1)$

ب) $(-1,1) \sim \mathbb{R}$ و $(0,1) \sim \mathbb{R}$

اثبات الف) تابع $f: (0,1) \longrightarrow (-1,1)$ با ضابطه $f(x) = 2x-1$ یک تابع یک به یک و پوشا است بنابراین $(0,1) \sim (-1,1)$

یک به یک بودن f: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

f پوشا است: نشان می‌دهیم که $\forall y \in (-1,1) \cdot \exists x \in (0,1): y = f(x) = 2x-1$

$\boxed{y = 2x-1 \Rightarrow y+1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y+1)}$ قرار می‌دهیم: $x = \frac{1}{2}(y+1)$

$$-1 < y < 1 \Rightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Rightarrow 0 < 2x < 2 \Rightarrow 0 < x < 1$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{2}y < 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < y < 1$$

$$x = (\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) \in (0,1) \Rightarrow f(x) = 2(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) - 1 = y + 1 - 1 = y$$

ب) تابع مثلثاتی $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\tan(\frac{x}{2})$: $\forall x\in(-1,1)$

یک تابع یک‌به‌یک و پوشا است، پس $(-1,1)\sim\mathbb{R}$

f یک‌به‌یک است؛ در ریاضی عمومی داریم که اگر f یک تابع صعودی باشد ($f'(x)>0$) آنگاه f یک‌به‌یک است

حال چون $f'(x)=(\tan(\frac{x}{2}))'=\frac{1}{2}\sec^2(\frac{x}{2})=\frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{x}{2}))>0$

پس f صعودی است بنابراین f یک‌به‌یک است.

توجه: در مشتق‌گیری باید دامنه و برد f زیرمجموعه اعداد حقیقی باشند و همچنین باید دامنه تابع به صورت بازه باشند در غیر این صورت ممکن است مشتق یک تابع تعریف نشود.

f پوشا است؛ چون $\mathrm{Im} f=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

حال چون $(-1,1)\sim\mathbb{R}$ و $(-1,1)\sim(0,1)$ پس با تعدی (قضیه ۵) $(0,1)\sim\mathbb{R}$.

سؤال: آیا می‌توانید تابع دوسویی مانند $h:(0,1)\to\mathbb{R}$ یا $g:\mathbb{R}\to(0,1)$ تعریف کنید؟

مثال ۲: الف) نشان دهید که $(a,b)\sim(0,1)$ که در آن (a,b) بازه باز است یعنی

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$$

ب) نشان دهید که $(a,b)\sim\mathbb{R}$ و $(a,b)\sim(-1,1)$

حل الف) تابع $f:(0,1)\to(a,b)$ را با ضابطه $f(x)=(b-a)x+a$ $\forall x\in(0,1)$ تعریف می‌کنیم: f یک تابع دوسوی است؛

f یک‌به‌یک است $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow(b-a)x_1+a=(b-a)x_2+a\Rightarrow$

$(b-a)x_1=(b-a)x_2\Rightarrow x_1=x_2$

توجه: می‌توان از مشتق کمک گرفت: $f'(x)=b-a$ چون $b-a>0$ پس $f(x)$ صعودی است بنابراین f یک‌به‌یک است

f پوشا است؛ زیرا $\forall y\in(a,b)\Rightarrow a<y<b\Rightarrow 0<y-a<b-a$

$\Rightarrow\frac{0}{b-a}<\frac{y-a}{b-a}<1\Rightarrow 0<\frac{y-a}{b-a}<1\Rightarrow x=\frac{y-a}{b-a}$

با انتخاب $x=\frac{y-a}{b-a}$ داریم $f(x)=(b-a)(\frac{y-a}{b-a})+a=y-a+a=y$

$$\left|\ y=(b-a)x+a\Rightarrow y-a=(b-a)x\Rightarrow x=\frac{y-a}{b-a}\ \right]$$

پس $(0,1)\sim(a,b)$.

ب) طبق مثال ۱ چون $(0,1)\sim\mathbb{R}$ و طبق قسمت الف $(a,b)\sim(0,1)$ پس با تعدی داریم.

$(a,b)\sim\mathbb{R}$ و به همین صورت $(-1,1)\sim(a,b)$

قضیه ۶: فرض کنید که X و Y و Z و W چهار مجموعه باشند و $X\cap Z=\phi=Y\cap W$ و $f: X\sim Y$ و $g: Z\sim W$ دو تابع دوسویی باشند (دو تناظر یک به یک باشند) آنگاه

$$f\cup g:(X\cup Z)\sim(Y\cup W)$$

برهان: چون $f: X\to Y$ و $g: Z\to W$ دو توابعی با شرط $X\cap Z=\phi$ هستند، بنابر قضیه ۱۸ فصل توابع $f\cup g:(X\cup Z)\to(Y\cup W)$ یک تابع است کافی است نشان دهیم که $f\cup g$ یک به یک و پوشا است: دیدیم که

$$f\cup g(t)=\begin{cases} f(t) & t\in X \\ g(t) & t\in Z\end{cases}$$

یک به یک بودن $f\cup g$: $f\cup g(t_1)=f\cup g(t_2) \Rightarrow$ ؛ $t_1,t_2\in X\cup Z$

اگر $t_1,t_2\in X$ $\quad f(t_1)=f(t_2) \xrightarrow[\text{است}]{f\text{ یک به یک}} t_1=t_2$

اگر $t_1,t_2\in Z \Rightarrow g(t_1)=g(t_2) \xrightarrow[g\text{ یک به یک}]{} t_1=t_2$ $\Big\} \Rightarrow t_1=t_2$ یعنی $f\cup g$ یک به یک است

پوشا بودن $f\cup g$: $\forall b\in Y\cup W \Rightarrow b\in Y$ یا $b\in W$

$b\in Y \xrightarrow[\text{است}]{\text{چون } f \text{ پوشا}} \exists a\in X: f(a)=b$

$b\in W \xrightarrow[\text{است}]{\text{چون } g \text{ پوشا}} \exists a\in Z: g(a)=b$ $\Big\} \Rightarrow \exists a\in X\cup Z: (f\cup g)(a)=b$

بنابراین $f: X\cup Z\sim Y\cup W$ یعنی $X\cup Z\sim Y\cup W$

قضیه ۷: فرض کنید که X و Y و Z و W چهار مجموعه باشند بطوریکه $X\sim Y$ و $Z\sim W$ آنگاه

$$X\times Z\sim Y\times W$$

اثبات: چون $X\sim Y$ و $Z\sim W$ پس توابع دوسویی f و g وجود دارند که $f: X\sim Y$ و $g: Z\sim W$. حال تابع $h=f\times g: X\times Z\to Y\times W$ با ضابطه $\forall (x,z)\in X\times Z \quad f\times g(x,z)=(f(x),g(z))$ یک تابع دوسویی است.

در مرحله اول تابع بودن $h=f\times g$: چون $f\subseteq X\times Y$ و $g\subseteq Z\times W$ (چون f و g رابطه هستند) پس $f\times g\subseteq (X\times Y)\times(Y\times W)$ یعنی $f\times g$ یک رابطه از $X\times Y$ به $Z\times W$ است.

چون $Dom f=X$ و $Dom g=Z$ پس $Dom(f\times g)=Dom f\times Dom g$ پس $Dom(f\times g)=X\times Z$

برای منحصر بفردی: چون f و g هر دو در شرط (ب) تعریف تابع صدق می‌کنند پس $f\times g$ در شرط ب صدق می‌کند یعنی $f\times g$ یک تابع است.

برای یک به یک بودن $f\times g$: $f\times g(x_1,z_1)=f\times g(x_2,z_2)\Rightarrow (f(x_1),g(z_1))=(f(x_2),g(z_2))\Rightarrow$

$$\begin{cases} f(x_1)=f(x_2) \xrightarrow{f\text{ یک به یک}} x_1=x_2 \\ g(x_1)=g(x_2) \xrightarrow[g\text{ یک به یک}]{} z_1=z_2\end{cases} \Rightarrow (x_1,z_1)=(x_2,z_2)$$

پوشا بودن $f\times g$ در صفحه بعد.

$\forall (y,w)\in Y\times W \Rightarrow y\in Y, w\in W \xrightarrow{\text{پوشا بودن } f,g} \exists x\in X, \exists z\in Z: f(x)=y,\ g(z)=w$

بنابراین $\exists (x,z)\in X\times Z$ به طوری که $f\times g(x,z)=(f(x),g(z))$

پس $f\times g: X\times Z \sim Y\times W$

مثال ۳: نشان دهید که $Z\sim \mathbb{N}$

اثبات: تابع $f:\mathbb{N}\to Z$ در نظر بگیرید

$$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد}\\ \frac{1-n}{2} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد}\end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4\end{array}$$

برای هشت عضو اول $\mathbb{N}$

یک به یک بودن: $f(n_1)=f(n_2)\Rightarrow$

اگر n_1 و n_2 زوج باشند آنگاه $\frac{n_1}{2}=\frac{n_2}{2}$ پس $n_1=n_2$

اگر n_1 و n_2 فرد باشند آنگاه $\frac{1-n_1}{2}=\frac{1-n_2}{2}$ پس $1-n_1=1-n_2$ بنابراین $n_1=n_2$

پوشا بودن f:

$$\forall m\in Z \Rightarrow \begin{cases} m=0 \Rightarrow \exists 1\in\mathbb{N}\quad f(1)=\frac{1-1}{2}=0\\ m>0 \Rightarrow \exists 2m\in\mathbb{N}: f(2m)=\frac{2m}{2}=m \\ m<0 \Rightarrow -m>0\Rightarrow -2m>0 \Rightarrow 1-2m\in\mathbb{N}: f(1-2m)=\frac{1-(1-2m)}{2}\end{cases}$$

یعنی $f(1-2m)=m$ پس f پوشا است.

مثال ۴: (تمرین ۴ کتاب صفحه ۱۲۵) ثابت کنید که اگر $(X-Y)\sim(Y-X)$ آنگاه $X\sim Y$

اثبات: اگر $(X-Y)\sim(Y-X)$ آنگاه تابع یک به یک و پوشای $f:(X-Y)\to(Y-X)$ وجود دارد.

حال تابع $g:X\to Y$ را با ضابطه زیر $\forall x\in X: g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in X-Y\\ x & x\in X\cap Y\end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

قبلاً دیدیم که $X-Y=X\cap Y'$ و همچنین طبق تعریف دیدیم که در محاسبه $X-Y$ اعضای $X\cap Y$ را از X حذف می‌کردیم پس $\phi = X\cap(X-Y)=X\cap(X\cap Y')$ پس تابع g با ضابطه بالا تعریف شده است.

حال نشان می‌دهیم که تابع g یک به یک است:

$$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow \begin{cases} x_1,x_2\in X-Y\Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \xrightarrow{f \text{ یک به یک}} x_1=x_2 \\ x_1,x_2\in X\cap Y \Rightarrow x_1=x_2 \quad \text{طبق تعریف } g\end{cases} \Rightarrow x_1=x_2$$

g پوشا است:

$$\forall b\in Y\Rightarrow \begin{cases} b\in Y-X \xrightarrow{f \text{ طبق پوشا}} \exists a\in X: f(a)=b\Rightarrow g(a)=f(a)=b \\ b\in Y\cap X\Rightarrow g(b)=b \Rightarrow a=b\in X,\ g(a)=a\end{cases}$$

مثال ۵ (تمرین ۱ صفحه ۱۲۵) فرض کنید که $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$ $(a<b)$

الف) ثابت کنید که $f:[0,1]\to[a,b]$ با ضابطه $f(x)=a+(b-a)x$ یک تناظر یک‌به‌یک است

ب) نتیجه بگیرید که $[a,b]\sim[c,d]$ $(c<d)$ ⊛

حل الف) f یک‌به‌یک است. $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow a+(b-a)x_1=a+(b-a)x_2\Rightarrow$

$(b-a)x_1=(b-a)x_2\Rightarrow x_1=x_2$

f پوشا است:

$\forall y\in[a,b]\Rightarrow a\le y\le b\Rightarrow \underbrace{a\le a+(b-a)x\le b}_{\text{دانسته فرض کردن مسئله}}\Rightarrow 0\le (b-a)x\le b-a\Rightarrow$

$0\le x\le 1 \Rightarrow \exists x\in[0,1]: f(x)=a+(b-a)x\Rightarrow [a,b]\sim[0,1]$

قسمت ب) همانند الف) $[c,d]\sim[0,1]$ و چون هم‌عددی یک رابطه هم‌ارزی است پس داریم:

$$(a<b\,,\ c<d): [a,b]\sim[c,d]$$

⊛ توجه: در مثال قبل چرا $a+(b-a)x$ در بازه $[a,b]$ قرار می‌گیرد؟ به عبارت دیگر چرا

$$a\le a+(b-a)x\le b$$

جواب: چون $0\le x\le 1$ و چون $a<b$ پس $b-a>0$ با ضرب $(b-a)$ در نامساوی $0\le x\le 1$ داریم: $0\le (b-a)x\le b-a$ با اضافه کردن a به طرفین نامساوی‌ها داریم:

پس $a\le (b-a)x\le b-a+a$ پس $a\le (b-a)x\le b$

چند تمرین:

می‌دانیم که اگر $f:X\to Y$ یک تابع دوسویی باشد آنگاه $f^{-1}:Y\to X$ هم یک تابع دوسویی است یعنی اگر $X\sim Y$ باشد آنگاه $Y\sim X$ (یعنی تقارن رابطه $\sim$ روی مجموعه‌ها)

۱- در بخش هم‌توانی مجموعه‌ها در قضایای ۶ و ۷ و مثال‌های ۱ تا ۵ ضابطه معکوس توابعی که مورد استفاده قرار گرفته است را بیابید به عبارت دیگر آیا می‌توانید به جای معرفی تابع $f:X\to Y$ تابع $f^{-1}:Y\to X$ را معرفی کنید. مثلاً در قضیه ۷ به جای ضابطه

$f\times g: X\times Z\to Y\times W$

$(f\times g)(x,y)=(f(x),g(y))$

ضابطه $(f\times g)^{-1}: Y\times W\to X\times Z$ را بیابید. سپس برای موارد دیگر هم به همین صورت

۲- یک تابع دوسویی $f:[a,b]\to[c,d]$ تعریف کنید.