پیوستگی تابع دو متغیره و سه متغیره

تعریف: تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) پیوسته نامیم هرگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

و تابع $f(x,y)$ روی ناحیه D پیوسته است به شرطی که f در هر نقطه از D مانند (a,b) پیوسته باشد.

نتیجه: توابع چندجمله‌ای و توابع سینوس و کسینوس و تابع ثابت همه جا پیوسته است. توابع گویا روی قلمروش پیوسته است و تابع لگاریتمی روی قلمروش پیوسته است. مجموع و تفاضل و حاصلضرب دو تابع پیوسته، پیوسته است، و تقسیم دو تابع پیوسته به شرطی که مخرج کسر مخالف صفر باشد پیوسته است.

مثال ۱: تابع $f(x,y) = x^4 + 5y^3y^2 + 6xy^2 - 7y + 6$ روی $\mathbb{R}^2$ پیوسته است چون چندجمله‌ای است.

تابع گویای $f(x,y) = \dfrac{2xy+1}{x^2+y^2}$ روی $\mathbb{R}^2$ پیوسته است.

مثال ۲: تابع $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ در $(0,0)$ ناپیوسته است زیرا $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد و روی $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ پیوسته است.

مثال ۳: تابع
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
در $(0,0)$ ناپیوسته است هرچند که $f(0,0)=0$ تعریف شده است.

مثال ۴: تابع
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
روی $\mathbb{R}^2$ پیوسته است و طبق روش (تعریف حد که) اثبات شد $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ یعنی در $(0,0)$ پیوسته است.

مثال ۵: تابع $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$ در هر نقطه از $\mathbb{R}^3$ بجز نقاطی که در معادله $x^2+y^2+z^2=1$ صدق می‌کند (یعنی روی کره‌ای به مرکز $(0,0,0)$ و شعاع ۱ ناپیوسته است) پیوسته است.

مثال ۶: تابع
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
در $(0,0)$ ناپیوسته است زیرا $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

بنام خدا

جلسه سوم ریاضی عمومی ۲ برای رشته های فنی و مهندسی

مشتق پذیری و دیفرانسیل تابع و کاربردهای آن (صفحه های ... و ... کتاب) و قاعده زنجیری و مشتق سوئی)

تعریف: برای تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ نمو f در نقطه (x_0,y_0) را با $\Delta f(x_0,y_0)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

و تابع $f(x,y)$ را در (x_0,y_0) مشتق پذیر نامیم هرگاه بتوان $\Delta f(x_0,y_0)$ را به صورت زیر نوشت

$$\Delta f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

به طوری که

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 \text{ و } \lim \varepsilon_2 = 0$$

توجه: استفاده مستقیم از تعریف مشتق پذیری طولانی و خسته کننده است. قضیه زیر شرط کافی برای مشتق پذیری است.

قضیه: اگر در یک همسایگی از (x_0,y_0) مشتقات جزئی f_x و f_y موجود باشند و در (a,b) پیوسته باشند آنگاه f در (a,b) مشتق پذیر است.

همچنین طبق قضیه زیر می توان شرطی برای مشتق ناپذیری تابع f در یک نقطه یافت.

قضیه: هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است.

پس اگر تابع f در یک نقطه ناپیوسته باشد آنگاه تابع f در آن نقطه مشتق پذیر نیست.

مثال ۱: تابع $f(x,y)=xe^{xy}$ در نقطه $(1,0)$ مشتق پذیر است زیرا مشتقات جزئی آن یعنی $f_x(x,y)=e^{xy}+xye^{xy}$ و $f_y(x,y)=x^2e^{xy}$ در $(1,0)$ وجود دارد و پیوسته است $\boxed{\text{چون } f_x(1,0)=1 \text{ و } f_y(1,0)=1}$ و f_x و f_y در هر نقطه ای پیوسته هستند).

مثال ۲: تابع

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست چون تابع $f(x,y)$ در $(0,0)$ پیوسته نیست (در جلسه دوم قبلاً بررسی شده است (مثال ۲ صفحه ۱۱۴ کتاب) تابع حد ندارد)

تعریف: اگر تابع $f(x,y)$ در (a,b) مشتق پذیر باشد دیفرانسیل کل تابع f را که با df نمایش می دهیم در نقطه (a,b) عبارت است از

$$df(a,b) = f_x(a,b)\,dx + f_y(a,b)\,dy$$

به همین صورت در نقطه دلخواه (x,y) داریم
$$df = f_x dx + f_y dy$$

توجه: df کاربردهای زیادی در ریاضی دارد که در این درس به تعدادی از آنها می پردازیم.

کاربرد (۱): برای تابع مشتق پذیر تابع f در (a,b) داریم
$$\Delta f(a,b) \simeq df(a,b)$$
یعنی از df برای تقریب Δf استفاده می کنیم.

مثال ۳ (مثال ۵ کتاب صفحه ۱۱۶۶) در یک اندازه گیری شعاع قاعده و ارتفاع مخروط دوار قائمی به ترتیب $r = 10\,cm$ و $h = 25\,cm$ اندازه گیری شده است. اگر خطای ممکن در هر یک از آنها حداکثر $\frac{1}{10}\,cm$ باشد، آنگاه حداکثر خطا در محاسبه حجم را تخمین بزنید.

حل: می دانیم که حجم مخروط دوار قائم عبارت است از $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ پس کافی است که dV در نقطه $(r,h) = (10,25)$ را حساب کنیم (زیرا $\Delta V \simeq df$)

$$dV = \frac{1}{3}\pi[2rh\,dr + r^2 dh] \Rightarrow dV(10,25) = \frac{1}{3}\pi[500\,dr + 100\,dh]$$

حال اگر طبق فرض $|\Delta h| \le \frac{1}{10}$ و $|\Delta r| \le \frac{1}{10}$ کافی است که بیشترین خطا در اندازه گیری را برای r و h همان $\frac{1}{10}$ در نظر بگیریم یعنی $dr = dh = \frac{1}{10}$ پس در این صورت حداکثر خطا در محاسبه حجم عبارت است

$$\Delta V \simeq dV(10,25) = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{500}{10} + \frac{100}{10}\right] = 20\pi\ cm^3$$

پس حداکثر خطا $\Delta V \simeq 20\pi\ cm^3$ است

توجه: تعریف Δf و مشتق پذیری و df را می توان به توابع سه متغیره هم تعمیم داد (صفحه ۱۱۶۶ کتاب)
یعنی
$$\Delta f(x_0,y_0,z_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)$$
$$df(x_0,y_0,z_0) = f_x(P)dx + f_y(P)dy + f_z(P)dz$$
که در آن P نقطه (x_0,y_0,z_0) است.

مثال ۴: (مثال ۶ کتاب صفحه ۱۱۶۶) ابعاد جعبه ای مستطیلی را اندازه گرفته اند و $x = 75\,cm$ و $y = 60\,cm$ و $z = 40\,cm$ و در هر مورد $\frac{2}{10}\,cm$ دقیق است. بیشترین خطای ممکن برای محاسبه حجم جعبه را تخمین بزنید.

حل: می دانیم که حجم جعبه مکعب مستطیل عبارت است از
$$V = xyz$$
پس کافی است dV را حساب کنیم.
$$dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$
و با فرض $dx = dy = dz = \frac{2}{10}\,cm$ پس
$$dV = [60\times40 + 75\times40 + 75\times60]\times\frac{2}{10} = 1980$$
پس $\Delta V \simeq dV = 1980\ cm^3$

کاربرد ۲: دومین کاربرد از df برای معرفی قاعده زنجیری در مشتقات جزئی است

یادآوری: در ریاضی ۱ توابع تک متغیره $y=f(x)$ اگر x تابعی از t باشد قاعده زنجیری به صورت $\frac{dy}{dt}=\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$ است. حال این قاعده را برای توابع دو متغیره و سه متغیره به صورت زیر تعمیم می‌دهیم. اگر x و y تابعی از t باشند در این صورت برای تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ داریم

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

یعنی طرفین رابطه $dz=f_x\,dx+f_y\,dy$ را بر dt تقسیم کرده‌ایم

و برای تابع سه متغیره $w=f(x,y,z)$ که x و y و z تابعی از t هستند داریم

$$dw=df=f_x\,dx+f_y\,dy+f_z\,dz \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

با این تفاوت که d با ∂ به معنی روند تبدیل شده است. (این کار برای حفظ کردن قاعده زنجیری آسان‌تر است)

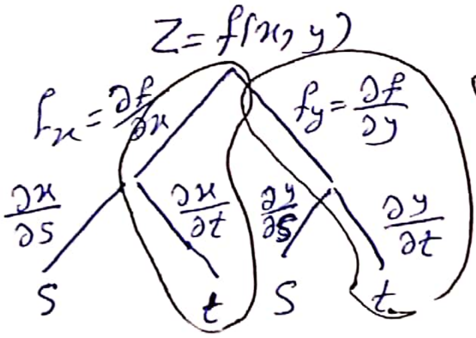
حال اگر در تابع دو متغیره x و y تابعی از s هم باشند آنگاه داریم برای $z=f(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

و برای تابع سه متغیره هم به همین صورت: اگر x و y و z تابعی از s باشند آنگاه

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

توجه: از نمودار درختی هم می‌توان قاعده زنجیری را به خاطر سپرد: فرض کنید که $z=f(x,y)$ و x و y توابعی دو متغیره از s و t باشند در این صورت



برای محاسبه $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}$ شاخه درخت (دو شاخه) معین شده در شکل را در نظر می‌گیریم

از بالا z شروع می‌کنیم و دو شاخه‌ای که به t ختم شده است را انتخاب می‌کنیم و می‌شود

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}}_{\text{شاخه اول}}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}}_{\text{شاخه دوم}}$$

توجه: از قاعده زنجیری معمولاً در جاهایی استفاده می‌کنیم که ضابطه تابع کاملاً معلوم نباشد و یا رابطه‌ای (معادله‌ای) از ما خواسته باشند. اگر ضابطه معلوم باشد برای محاسبه مشتق روش جایگذاری راحت‌تر است.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۵: اگر $z=f(x,y)=x^2+y^2$ و $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ باشد

مطلوبست محاسبه f_r و f_θ.

حل: چون ضابطه تابع f معلوم است پس اول در ضابطه f به جای x و y مقدارشان برابر r و θ قرار می‌دهیم پس داریم

$$z=f(r,\theta)=(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2$$

پس $z_r=f_r=2r$ و $z_\theta=f_\theta=0$

البته می‌توان از قاعده زنجیری هم استفاده کرد (به عنوان تمرین حل شود)

مثال ۶: اگر $g(s,t)=f(s^2-t^2, t^2-s^2)$ و f مشتق‌پذیر باشد نشان دهید که g در معادله $t\frac{\partial g}{\partial s}+s\frac{\partial g}{\partial t}=0$ صدق می‌کند.

حل: چون ضابطه g و f کاملاً مشخص نیست از قاعده زنجیری کمک می‌گیریم. کافی است که قرار دهیم $x=s^2-t^2$ و $y=t^2-s^2$ و $\frac{\partial g}{\partial t}$ و $\frac{\partial g}{\partial s}$ را حساب کنیم.

$$\frac{\partial g}{\partial s}=f_x\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+f_y\frac{\partial y}{\partial s}=f_x(2s)+f_y(-2s)=2s[f_x-f_y]$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}=f_x\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+f_y\frac{\partial y}{\partial t}=f_x(-2t)+f_y(2t)=2t[-f_x+f_y]$$

$$tg_s+sg_t=t[2s(f_x-f_y)]+s[2t(-f_x+f_y)]=2tsf_x-2tsf_y-2tsf_x+2tsf_y=0$$

مثال ۷: اگر $z=f(x,y)$ مشتقات جزئی دوم پیوسته داشته باشد و $x=r^2+s^2$ و $y=2rs$ آنگاه

الف) $\frac{\partial z}{\partial r}$ ب) $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ را بدست آورید.

حل: از قاعده زنجیری کمک می‌گیریم:

الف) $\frac{\partial z}{\partial r}=f_x\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+f_y\frac{\partial y}{\partial r}=f_x(2r)+f_y(2s)$

زیرا $\frac{\partial x}{\partial r}=2r$ و $\frac{\partial y}{\partial r}=2s$

برای قسمت ب) دوباره از قاعده زنجیری کمک می‌گیریم (یا روی $\frac{\partial z}{\partial r}$ قاعده زنجیری را بکار می‌بندیم)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}[2rf_x+2sf_y]=2f_x+\underbrace{\left[f_{xx}\frac{\partial x}{\partial r}+f_{xy}\frac{\partial y}{\partial r}\right]}_{\text{قاعده زنجیری}}2r+\underbrace{0\times f_y}_{0}+$$

$$+\underbrace{\left[f_{yx}\frac{\partial x}{\partial r}+f_{yy}\frac{\partial y}{\partial r}\right]}_{\text{قاعده زنجیری}}2s=2f_x+[f_{xx}(2r)+f_{xy}(2s)]2r+[f_{yx}(2r)+f_{yy}(2s)]2s$$

$$=2\frac{\partial f}{\partial x}+4r^2f_{xx}+8rsf_{xy}+4s^2f_{yy}$$

توضیح: از قاعده زنجیری می‌توان برای محاسبه مشتق‌گیری با صورت ضمنی کمک گرفت
کافی است برای معادله برحسب دو متغیر x و y آن را با صورت $F(x,y)=0$ نوشت سپس با صورت زیر قاعده زنجیری را به کار برد

$$0 = F_x \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + F_y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

مثال ۸: اگر $x^3 + y^3 = 6xy$ آنگاه y' را حساب کنید

حل:
$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0 \Rightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2-6y}{3y^2-6x} = \frac{2y-x^2}{y^2-2x}$$

صفحه مماس بر رویه و خط قائم بر رویه و مشتق سوئی

تعریف گرادیان یک تابع: اگر $f(x,y,z)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد گرادیان تابع f را با $\operatorname{grad} f$ یا $\vec{\nabla} f$ نمایش می‌دهیم و

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\operatorname{grad} f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{K}$$

و به $\frac{\partial}{\partial x}(\ )\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\ )\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\ )\vec{K}$ عملگر گرادیان گفته می‌شود و با $\vec{\nabla}$ یا grad نمایش داده می‌شود

و همچنین $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} \Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ عملگر لاپلاس نام دارد

در جلسه قبل با معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ آشنا شده‌اید

مسئله: فرض کنید که S رویه‌ای با معادله $F(x,y,z) = c$ باشد (یعنی یک رویه تراز) نشان دهید که بردار گرادیان (منظور خلاصه گرادیان) بر رویه تراز عمود است

حل: نشان می‌دهیم که بردار گرادیان بر هر منحنی واقع بر رویه تراز عمود است. پس فرض کنید که
$$\gamma \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$
یک منحنی دلخواه روی رویه تراز $F(x,y,z) = c$ باشد یعنی

① $F(x(t), y(t), z(t)) = c$

از طرفین معادله ① نسبت به t مشتق می‌گیریم. پس

$$f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \frac{\partial y}{\partial t} + f_z \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

بنابراین
$$\left(f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{K}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial t}K\right) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{R'}(t) = 0$$

که در آن $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)K$ معادله برداری منحنی γ است

چون $\vec{\nabla} f \cdot \vec{R'}(t) = 0$ پس $\vec{\nabla} f$ بر منحنی γ عمود است.

کاربرد بردار گرادیان

الف) معرفی معادله صفحه مماس و خط قائم بر رویه: اگر $F(x,y,z) = 0$ معادله رویه S باشد آنگاه صفحه مماس بر رویه S در نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ صفحه‌ای است که بردار عمود آن بردار گرادیان است و

$$F_x(P)(x - x_0) + F_y(P)(y - y_0) + F_z(P)(z - z_0) = 0$$

و معادله خط قائم بر رویه S در نقطه P عبارت است از

$$\frac{x-x_0}{F_x(P)} = \frac{y-y_0}{F_y(P)} = \frac{z-z_0}{F_z(P)}$$

یعنی بردار گرادیان $\vec{F}$ موازی با خط قائم است

مثال ۹: معادله صفحه مماس و خط قائم بر سهمیگون بیضوی $z = 2x^2 + y^2$ در نقطه $(1,1,3)$ را پیدا کنید

حل: قرار می‌دهیم $F(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z = 0$ پس $\nabla F = 4x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$

و $\nabla F(1,1,3) = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ پس معادله صفحه مماس و خط قائم عبارت است از

$$4(x-1) + 2(y-1) - (z-3) = 0 \quad و \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

مثال ۱۰: معادله صفحه مماس و خط قائم بر بیضیگون $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ در نقطه $(-2,1,-3)$ را بیابید

حل: قرار می‌دهیم $F(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 3 = 0$ پس $\nabla F = \frac{1}{2}x\vec{i} + 2y\vec{j} + \frac{2}{9}z\vec{k}$

با جایگذاری $(-2,1,-3)$ در ∇F داریم؛ $\nabla F(-2,1,-3) = -\vec{i} + 2\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$

پس

معادله صفحه مماس $-1(x+2) + 2(y-1) - \frac{2}{3}(z+3) = 0 \Rightarrow 3x - 6y + 2z + 18 = 0$

معادلات خط قائم متقارن $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-\frac{2}{3}}$

مشتق سوئی (جهتی)؛

تعریف: مشتق سوئی f در نقطه (x_0, y_0) در جهت بردار واحد $\vec{u} = (a,b)$ برابر است با

$$\frac{df}{du}(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+ha, y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h}$$

به شرطی که حد بالا موجود باشد.

تبصره: استفاده از تعریف بالا خیلی آسان و راحت نیست و معمولاً برای توابع چند ضابطه‌ای استفاده می‌کنیم زمانی که در نقطه‌ای خواسته باشد که ضابطه تابع تغییر می‌کند.

مثال ۱۱: مشتق سوئی تابع زیر در نقطه $(0,0)$ در جهت بردار $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$ را بیابید.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

صفحه ۱۵

حل: چون در جهت $\vec{A}$ مشتق جهتی خواسته شده باید $\vec{u}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}i+\frac{1}{\sqrt{2}}j$ را حساب کنیم.

$$\frac{df}{du}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+\frac{1}{\sqrt{2}}h,0+\frac{1}{\sqrt{2}}h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}h^5}{\frac{1}{4}(h^4+h^4)}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}h^5}{\frac{1}{2}h^5}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

توجه: یکی از کاربردهای مشتق جهتی در مشتق‌ناپذیری یک تابع است

اگر مشتق جهتی یک تابع در یک نقطه P در جهت دلخواه $\vec{u}$ موجود نباشد در این صورت تابع f در نقطه P مشتق‌ناپذیر است. مثال زیر را به عنوان تمرین حل کنید:

مثال ۱۲: مشتق‌پذیری تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ را بررسی کنید.

راهنمایی: نشان دهید که مشتق جهتی این تابع در $(0,0)$ در جهت $\vec{A}=\vec{i}+\vec{j}$ وجود ندارد.

قضیه: اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد آنگاه مشتق جهتی تابع f در نقطه (a,b) و در جهت $\vec{u}$ وجود دارد و

$$\frac{df}{du}(a,b)=\vec{\nabla}f(a,b)\cdot\vec{u}$$

* بنابراین کاربرد دوم گرادیان در محاسبه مشتق سوئی (جهتی) است

توجه: تعریف مشتق جهتی برای توابع سه متغیره و قضیه قبل هم به طور مشابه بیان می‌گردد.

مثال ۱۳: مشتق سوئی توابع داده شده در نقاط داده شده و جهت تعیین شده را بیابید.

الف) $f(x,y)=\sin x+e^{xy}$ و $P(0,1)$ و $\vec{A}=3\vec{i}+4\vec{j}$

ب) $f(x,y,z)=x\sin(yz)$ و $P(1,3,0)$ و $\vec{B}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

حل: از قضیه استفاده می‌کنیم. الف)

$|\vec{A}|=\sqrt{25}=5$, $\vec{u}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}$

$$\frac{df}{du}=\vec{\nabla}f(0,1)\cdot\vec{u}=\left[2\vec{i}+0\vec{j}\right]\cdot\left(\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}\right)=\frac{6}{5}$$

$$\vec{\nabla}f=(\cos x+ye^{xy})\vec{i}+xe^{xy}\vec{j}\Rightarrow\vec{\nabla}f(0,1)=2\vec{i}+0\vec{j}$$

ب)

$|\vec{B}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$, $\vec{u}=\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$

$$\vec{\nabla}f=\sin(yz)\vec{i}+xz\cos(yz)\vec{j}+xy\cos(yz)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}f(1,3,0)=0\vec{i}+0\vec{j}+3\vec{k}\Rightarrow\frac{df}{du}(1,3,0)=\vec{\nabla}f(1,3,0)\cdot\vec{u}=-\frac{3}{\sqrt{6}}$$

تبصره: اگر مشتق سوی را به عنوان آهنگ تغییر در نظر بگیریم در این صورت طبق قضیه صفحه‌ی بعد می‌توان مقدار ماکسیمم مشتق جهتی و مقدار مینیمم مشتق جهتی را تعیین کرد.

قضیه: فرض کنید که f یک تابع دو یا سه متغیره باشد در این صورت مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم مشتق سوی f در جهت بردار واحد u در نقطه P به ترتیب برابر است با $|\vec{\nabla} f(P)|$ و $-|\vec{\nabla} f(P)|$

به عبارت دیگر طبق فرمول زیر بیشترین مقدار مشتق جهتی تابع f در جهت بردار گرادیان و مقدار آن $|\vec{\nabla f}|$ است و کمترین مقدار مشتق جهتی تابع f در خلاف جهت بردار گرادیان و مقدار آن $-|\vec{\nabla f}|$ است و همچنین در جهت عمود بر بردار گرادیان مشتق جهتی صفر است.

$$\frac{df}{du}(P) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = |\vec{\nabla} f|\,|\vec{u}|\cos\theta = |\vec{\nabla} f|\cos\theta$$

که در آن θ زاویه بین $\vec{\nabla f}$ و $\vec{u}$ است پس

$$\frac{df}{du} = \begin{cases} |\vec{\nabla f}| & \cos\theta = 1 \ \text{یا}\ \theta = 0 \longrightarrow \text{در جهت بردار گرادیان} \\ -|\vec{\nabla f}| & \cos\theta = -1 \ \text{یا}\ \theta = \pi \longrightarrow \text{در خلاف جهت بردار گرادیان} \\ 0 & \cos\theta = 0 \ \text{یا}\ \theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \text{در جهت عمود بر بردار گرادیان} \end{cases}$$

مثال: (تمرین ۳۳ صفحه ۱۱۹۳) فرض کنید که روی ناحیه‌ای در فضا پتانسیل الکتریکی V با تابع $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$ مشخص شود.

الف) آهنگ تغییر پتانسیل در نقطه $P(3,4,5)$ در جهت بردار $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ را پیدا کنید.

ب) تابع V در نقطه P در کدام جهت با سرعت بیشتری حرکت می‌کند؟

ج) آهنگ تغییر ماکسیمم در P چقدر است؟

حل: الف)

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f = (10x - 3y + yz)\vec{i} + (-3x + xz)\vec{j} + (xy)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f(P) = (30 - 12 + 20)\vec{i} + (-9 + 15)\vec{j} + 12\vec{k} = 38\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\frac{df}{du}(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{u} = \frac{38}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

ب) در جهت بردار گرادیان

ج) جواب

$$|\vec{\nabla} f(P)| = \sqrt{(38)^2 + 36 + 144} = ?$$

پایان