۵- نگاره (تصویر) و نگاره وارون (تصویر معکوس) مجموعه

یادآوری! اگر $f: X \to Y$ یک تابع باشد و ضابطه آن $y=f(x)$ باشد در این صورت عنصر y از Y را نگاره (تصویر) x می‌نامیم و عنصر $x \in X$ را پیش نگاره y می‌نامیم. در تعریف زیر این مطلب یعنی نگاره (تصویر) و پیش نگاره را به مجموعه تعمیم می‌دهیم

تعریف: اگر $f: X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$ ، $B \subseteq Y$ باشد در این صورت $f(X)$ را نگاره (تصویر) مجموعه X می‌نامیم و $f^{-1}(B)$ را نگاره وارون (تصویر معکوس یا تصویر وارون) Y می‌نامیم به عبارت منطقی

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(A)=\{f(x) \mid x\in A\} \quad \text{و} & f^{-1}(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\} \\ f(A)\subseteq Y \quad , & f^{-1}(B)\subseteq X \end{array}}$$

توجه: اعضای $f(A)$ به صورت $y=f(x)$ هستند که $x\in A$ و اعضای $f^{-1}(B)$ به صورت x هستند که $f(x)\in B$. شناخت اعضای $f(A)$ و $f^{-1}(B)$ برای اثبات قضیه‌ها و حل تمرین‌ها لازم و مهم است

قضیه ۹: اگر $f: X \to Y$ یک تابع باشد آنگاه

الف) $f(\emptyset)=\emptyset$

ب) $\forall x\in X: \; f(\{x\})=\{f(x)\}$

ج) اگر $A\subseteq B\subseteq X$ آنگاه $f(A)\subseteq f(B)$

د) اگر $C\subseteq D\subseteq Y$ آنگاه $f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)$

اثبات (الف) چون $f(\emptyset)$ یک مجموعه است پس $\emptyset\subseteq f(\emptyset)$ چون $\emptyset$ زیرمجموعه هر مجموعه است. برای نشان دادن اینکه $f(\emptyset)\subseteq\emptyset$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

طبق تعریف مجموعه اگر $x\in\emptyset$ آنگاه $f(x)\in f(\emptyset)$ چون $\emptyset$ عضوی ندارد پس $f(\emptyset)$ هم نمی‌تواند عضوی داشته باشد پس $f(\emptyset)$ هم مجموعه خالی است پس $f(\emptyset)\subseteq\emptyset$ و بنابراین $f(\emptyset)=\emptyset$.

اثبات ب) طبق تعریف تابع $f(x)$ (منحصر به فرد است) $f(x)$ نتیجه می‌گردد.

اثبات ج) با عضوگیری نشان می‌دهیم

$$\forall f(x)\in f(A) \Longrightarrow x\in A \xRightarrow{A\subseteq B} x\in B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)\in f(B) \Longrightarrow f(A)\subseteq f(B)$$

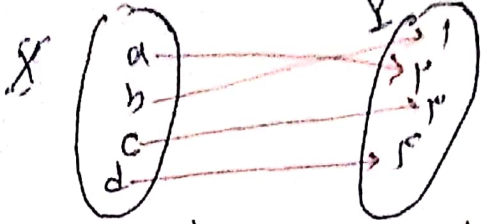
اثبات د)

$$\forall x\in f^{-1}(C) \Longrightarrow f(x)\in C \xRightarrow{C\subseteq D} f(x)\in D \Rightarrow f(x)\in f^{-1}(D)$$

پس $f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)$

تبصره: برای درک قضیه ۹ و تعریف تصویر مجموعه و تصویر معکوس یک مجموعه چند مثال ذکر می‌کنیم

مثال ۱: فرض کنید $X=\{a,b,c,d\}$ و $Y=\{1,2,3,4\}$ و $A=\{a\}$ و $B=\{a,b\}$ و $C=\{2,4\}$ و $D=\{1,2,4\}$ و f تابعی از X به Y به صورت نمودار زیر باشد:



قضیه ۱۰ (ب) ⟵ $f(A)=f(\{a\})=\{f(a)\}=\{2\}$

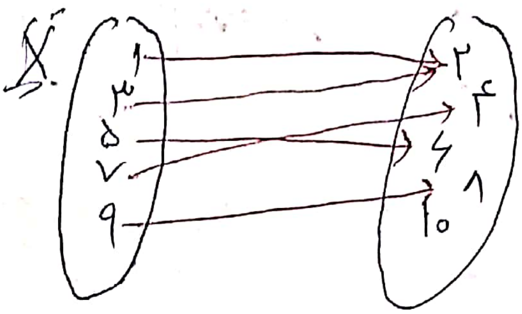
$f(B)=\{f(a),f(b)\}=\{2,1\}$

قضیه ۱۰ (ج) ⟵ $A\subseteq B \Rightarrow f(A)\subseteq f(B)$

$f^{-1}(C)=\{a,d\}$ و $f^{-1}(D)=\{b,a,d\} \Rightarrow f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)$

قضیه ۱۰ (د) ⟵ $C\subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)$

مثال ۲: فرض کنید $X=\{1,3,5,7,9\}$ و $Y=\{2,4,6,8,10\}$ و $A=\{1,3\}$ و $B=\{5,7,9\}$ و $C=\{2,4,6\}$ و $D=\{4,6,10\}$ و f یک تابع به صورت زیر باشد.



$f(A)=\{2\}$ و $f(B)=\{4,6,8\}$

$A\cup B=\{1,3,5,7,9\} \Rightarrow f(A\cup B)=\{2,4,6,8\}$

$f(A)\cup f(B)=\{2,4,6,8\}=f(A\cup B)$

$A\cap B=\phi \Rightarrow f(A\cap B)=f(\phi)=\phi$

$f(A)\cap f(B)=\phi=f(A\cap B)$

سوال: آیا همیشه $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ و $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ درست است

$f^{-1}(C)=\{1,3,5,7\}$ و $f^{-1}(D)=\{5,7\}$ و $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)=\{5,7\}$

$C\cap D=\{4,6\} \Rightarrow f^{-1}(C\cap D)=\{7,5\}$.

$C\cup D=\{2,4,6,10\} \Rightarrow f^{-1}(C\cup D)=\{1,3,5,7\}$

$f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)=\{1,3,5,7\}$

سوال آیا همیشه $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$ و $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

در قضیه ۱۰ و ۱۱ به آنها جواب می‌دهیم

قضیه ۱۰ فرض کنید که $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد و $\{A_\gamma \mid \gamma \in M\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد در این صورت

الف) $f(\bigcup_{\gamma \in M} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in M} f(A_\gamma)$ ب) $f(\bigcap_{\gamma \in M} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma \in M} f(A_\gamma)$

اثبات الف) $\forall y \in f(\bigcup_{\gamma \in M} A_\gamma) \equiv$ وجود دارد یک یا چند x از $\bigcup_{\gamma \in M} A_\gamma$: $f(x)=y$ $\equiv$

$\exists \gamma \in M$: $y = f(x)$ به ازای یک یا چند x از A_γ $\equiv \exists \gamma \in M$ $y = f(x) \in f(A_\gamma)$

$\xrightarrow[\text{اجتماع خانواده}]{\text{تعریف}} y = f(x) \in \bigcup_{\gamma \in M} f(A_\gamma) \Longrightarrow f(\bigcup_{\gamma \in M} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in M} f(A_\gamma)$

اثبات ب) می دانیم که $\forall \gamma \in M$ ، $\bigcap_{\gamma \in M} A_\gamma \subseteq A_\gamma$ حال طبق قضیه ۹ قسمت ( ) داریم

$\forall \gamma \in M$: $f(\bigcap_{\gamma \in M} A_\gamma) \subseteq f(A_\gamma)$ و طبق تعریف اشتراک خانواده $f(\bigcap_{\gamma \in M} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma \in M} f(A_\gamma)$

مثال ۳: فرض کنید که $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد و $X = \{a, b\}$ و $c \in Y$ و $M = \{1, 2\}$ و

$A_1 = \{a\}$ و $A_2 = \{b\}$ و $f(a) = f(b) = c$ در این صورت $A_1 \cap A_2 = \phi$ پس $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$

از طرفی $f(A_1) = f(\{a\}) = \{f(a)\} = \{c\}$ و $f(\ ) = f(\{a\}) = \{f(a)\} = \{c\}$

و $f(A_1) \cap f(A_2) = \{c\}$ ولی $f(A_1 \cap A_2) = \phi$ پس $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$

نکته: یعنی در قضیه ۱۰ قسمت (ب) تساوی برقرار نیست.

سؤال در چه صورت در قضیه ۱۰ قسمت ب تساوی برقرار است یعنی $f(\bigcap_{\gamma \in M} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in M} (f(A_\gamma))$

جواب، وقتی که تابع f یک به یک باشد که در بخش بعد به آن می پردازیم. (در قضیه ۱۳)

قضیه ۱۱. فرض کنید که $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد و $\{B_\gamma \mid \gamma \in M\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های Y باشد در این صورت

الف) $f^{-1}(\bigcup_{\gamma \in M} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in M} f^{-1}(B_\gamma)$ ب) $f^{-1}(\bigcap_{\gamma \in M} B_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in M} f^{-1}(B_\gamma)$

اثبات الف) در کتاب ثابت شده است و به اثبات (ب) می پردازیم.

$\forall x \in f^{-1}(\bigcap_{\gamma \in M} B_\gamma) \equiv f(x) \in \bigcap_{\gamma \in M} B_\gamma \equiv \forall \gamma \in M: f(x) \in B_\gamma \equiv \forall \gamma \in M: x \in f^{-1}(B_\gamma)$

$\xrightarrow[\text{اشتراک خانواده}]{\text{تعریف}} x \in \bigcap f^{-1}(B_\gamma) \Longrightarrow f^{-1}(\bigcap_{\gamma \in M} B_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in M} f^{-1}(B_\gamma)$

قضیه ۱۲: اگر $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد و B و C دو زیرمجموعه Y باشند آنگاه

$$f^{-1}(B-C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

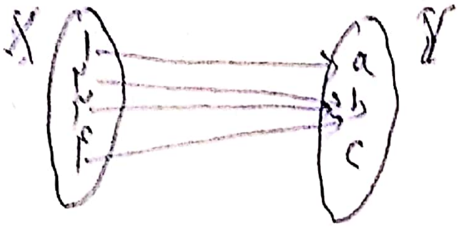
اثبات:

$$\forall x \in f^{-1}(B-C) \equiv f(x) \in (B-C) \equiv f(x) \in B \wedge f(x) \notin C \equiv$$

$$\equiv x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(C) \equiv x \in [f^{-1}(B) - f^{-1}(C)]$$

سؤال: اگر $f: X \longrightarrow Y$ باشد و A و B دو زیرمجموعه X باشند آیا $f(A-B) = f(A) - f(B)$

جواب: این سؤال دقیقاً سؤال ۱۱ صفحه ۸۸ کتاب است که در این سؤال (تمرین) ذکر شده که نادرست است و با مثال نقض آن را رد کنید.



حل: مثال نقض فرض کنید که f تابعی با صورت نمودار مقابل باشد

$$X = \{1, 2, 3, 4\} \quad , \quad Y = \{a, b, c\}$$

$$A = \{1, 2, 3\} \quad , \quad B = \{1, 2, 4\}$$

$$f(A) = \{a, b\} \ , \ f(B) = \{a, b\} \Rightarrow f(A) - f(B) = \{a, b\} - \{a, b\} = \phi$$

$$A - B = \{1, 2, 3\} - \{1, 2, 4\} = \{3\} \qquad f(A-B) = f(\{3\}) = \{b\}$$

$$\Longrightarrow f(A-B) \neq f(A) - f(B)$$

سؤال در چه صورت در سؤال قبل

$$f(A-B) = f(A) - f(B)$$

جواب: اگر f یک تابع یک به یک باشد آنگاه: $f(A-B) = f(A) - f(B)$

در بخش بعد آن می‌پردازیم. (بخش ۶ مثال ۲)

مثال ۳ (تمرین ۶ ص ۸۷) فرض کنید که $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$. ثابت کنید

الف) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ ب) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

اثبات الف)

$$\boxed{\forall x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))} \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A))$$

اثبات ب)

$$\forall f(x) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in B$$

پس

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$$

۶- توابع یک به یک و پوشا (پوششی) و دوسویی

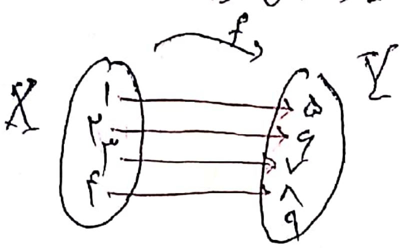
تعریف: تابع $f: X \to Y$ را یک به یک یا انژکتیو نامیده می‌شود هرگاه اگر $x_1, x_2 \in X$ و $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه $x_1 = x_2$. تابع انژکتیو را انژکسیون هم می‌گویند.

طبق قانون عکس نقیض این تعریف معادل این است: تابع $f: X \to Y$ را یک به یک یا انژکتیو نامیده می‌شود هرگاه اگر $x_1, x_2 \in X$ و $x_1 \neq x_2$ آنگاه $f(x_1) \neq f(x_2)$

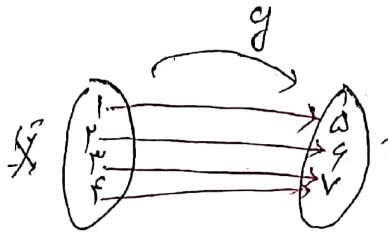
تابع $f: X \to Y$ را پوشا یا پوششی یا سورژکتیو نامیده می‌شود هرگاه برای هر y از Y یک یا چند عضو از X مانند x وجود داشته باشد بطوری که $y = f(x)$. به عبارت دیگر تابع $f: X \to Y$ را پوشا یا پوششی یا سورژکتیو نامیده می‌شود هرگاه $f(X) = Y$ (یا $Im f = Y$)
هر تابع سورژکتیو را سورژکسیون می‌نامیم.

تابع $f: X \to Y$ را دوسویی نامیم هرگاه هم یک به یک و هم پوشا باشد. هر تابع دوسویی یعنی یک به یک و پوشا را بیژکتیو هم گفته می‌شود همچنین به تابع دوسویی تناظر یک به یک نیز گفته می‌شود

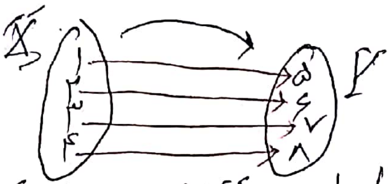
مثال ۱: الف) تابع f مقابل یک به یک است



ب) تابع g در شکل مقابل پوشا است



ج) تابع h در شکل مقابل دوسویی است.



توجه: تابع f پوشا نیست چون عدد ۹ در Y را نپوشانده است یا برای عدد $9 \in Y$ عددی از X به ۹ توسط f نسبت داده نشده است

تابع g یک به یک نیست زیرا $4 \neq 3$ ولی $g(3) = g(4) = 7$ است. یعنی دو عدد متفاوت به عدد $7 \in Y$ توسط g نسبت داده شده است.

قضیه ۱۳: فرض کنید که $f: X \to Y$ یک تابع یک به یک باشد و $\{A_\gamma \mid \gamma \in M\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد در این صورت

$$f\Big(\bigcap_{\gamma \in M} A_\gamma\Big) = \bigcap_{\gamma \in M} f(A_\gamma)$$

اثبات: در قضیه ۱۰ بخش قبل نشان دادیم که اگر $f: X \to Y$ یک تابع باشد آنگاه $f\big(\bigcap_{\gamma \in M} A_\gamma\big) \subseteq \bigcap_{\gamma \in M} f(A_\gamma)$ ولی با مثال نقض نشان دادیم که $\bigcap_{\gamma \in M} f(A_\gamma) \subseteq f\big(\bigcap_{\gamma \in M} A_\gamma\big)$ همواره درست نیست. حال اگر تابع f یک به یک باشد نشان می‌دهیم که

$$f\Big(\bigcap_{\gamma \in M} A_\gamma\Big) = \bigcap_{\gamma \in M} f(A_\gamma)$$

$y \in \bigcap_{\gamma \in \mu} f(A_\gamma) \Longleftrightarrow y \in f(A_\gamma) \quad \forall \gamma \in \mu \Longleftrightarrow (\exists x_\gamma \in A_\gamma : y = f(x_\gamma)) \quad \forall \gamma \in \mu$

(چون f یک یک است تمام این x_γ ها یکی هستند و این عضو را x_0 می نامیم (یا با x_0 نشان می دهیم)

پس داریم

$y \in \bigcap_{\gamma \in \mu} f(A_\gamma) \Longleftrightarrow \exists x_0 \in A_\gamma : \forall \gamma \in \mu \quad y = f(x_0) \Longleftrightarrow \exists x_0 \in \bigcap_{\gamma \in \mu} A_\gamma : y = f(x_0)$

$\Longleftrightarrow y \in f(\bigcap_{\gamma \in \mu} A_\gamma)$

بنابراین $\bigcap_{\gamma \in \mu} f(A_\gamma) = f(\bigcap_{\gamma \in \mu} A_\gamma)$.

مثال ۲: نشان دهید که اگر $f: X \to Y$ یک یک باشد و A و B دو زیر مجموعه X باشند آنگاه

$$f(A-B) = f(A) - f(B)$$

حل:

چون f یک یک است یک عضو منحصر بفرد در $(A-B)$ وجود دارد که $y = f(x)$

$\forall y \in f(A-B) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x \in A, x \notin B : y = f(x) \Longleftrightarrow f(x) = y \in f(A), \ y = f(x) \notin f(B) \Longleftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = f(x) \in [f(A) - f(B)]$

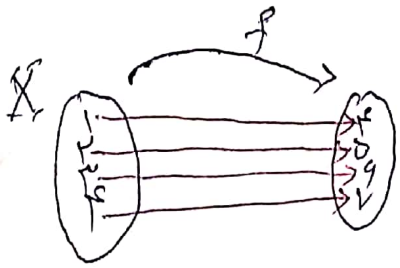
بنابراین $f(A-B) = f(A) - f(B)$

مثال ۳: فرض کنید که f تابع یک یک مقابل باشد در این صورت

اگر $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{2,3,4\}$ آنگاه $A - B = \{1\}$

$f(A) = \{4, 5, 6\}$, $f(B) = \{5, 6, 7\} \Rightarrow$

$f(A) - f(B) = \{4\} = f(A-B)$.



تبصره: در بخش ۲ برای یک رابطه R از A به B رابطه R^{-1} از B به A تعریف کردیم حال چون یک تابع $f: X \to Y$ یک رابطه است پس f به عنوان یک رابطه دارای معکوس است ولی آیا f^{-1} یک تابع است اگر f یک تابع نیست در چه صورت f^{-1} یک تابع می شود

در قضیه زیر به این سؤال جواب داده می شود

قضیه ۱۴) اگر $f: X \to Y$ یک تابع دوسویی (یک یک و پوشا) باشد آنگاه $f^{-1}: Y \to X$ یک تابع دوسویی است.

اثبات: ۱ در مرحله اول نشان می دهیم که f^{-1} یک تابع است

۲ در مرحله دوم نشان می دهیم که f^{-1} یک یک است

۳ در مرحله سوم نشان می دهیم که f^{-1} پوشا است

① برای تابع بودن f^{-1}، باید سه شرط بررسی کنیم (الف) f^{-1} یک رابطه از Y به X است که چون $f \subseteq X \times Y$ آنگاه $f^{-1} \subseteq Y \times X$ یعنی f^{-1} یک رابطه از Y به X است.

ب) قبلاً دیده‌ایم که $\mathrm{Dom}\, f^{-1} = \mathrm{Im}\, f$ حال چون f پوشا است پس $f(X) = \mathrm{Im}\, f = Y$ پس $\mathrm{Dom}\, f^{-1} = Y$

ج) اگر $(y, x_1) \in f^{-1}$ و $(y, x_2) \in f^{-1}$ آنگاه $(x_1, y) \in f$ و $(x_2, y) \in f$ حال چون f یک‌به‌یک است پس $x_1 = x_2$
(زیرا از $(x_1, y_1) \in f$ و $(x_2, y_2) \in f$ نتیجه می‌شود $f(x_1) = f(x_2)$ پس چون f یک‌به‌یک است $x_1 = x_2$)
بنابراین $f^{-1}: Y \to X$ یک تابع است.

② برای یک‌به‌یک بودن f^{-1}: فرض کنیم که $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$ پس طبق تعریف $y_1 = f(x) = y_2$ یعنی f^{-1} یک‌به‌یک

③ برای پوشا بودن می‌دانیم که: حال چون $\mathrm{Im}\, f^{-1} = \mathrm{Dom}\, f$ پس $\mathrm{Dom}\, f = X$ پس $\mathrm{Im}\, f^{-1} = X$ پس f^{-1} پوشا است.

تعریف: اگر تابع $f: X \to Y$ دوسویی باشد تابع $f^{-1}: Y \to X$ را وارون (تابع وارون) تابع f می‌نامیم و همواره $\mathrm{Dom}\, f^{-1} = \mathrm{Im}\, f$ و $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Im}\, f^{-1}$.

تبصره: در ریاضی عمومی چون هر تابع f از دامنه‌اش به بردش (یعنی $f: \mathrm{Dom}\, f \to \mathrm{Im}\, f$) در نظر گرفته می‌شود برای معکوس‌پذیری (داشتن معکوس f) فقط یک‌به‌یک بودن را بررسی می‌کنند و پوشا بودن بدیهتاً برقرار است زیرا $f: \mathrm{Dom}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ در نظر گرفته می‌شود.

توجه: برای یافتن معکوس تابع f یعنی f^{-1} باید در حیطه ریاضی از دوسویی بودن $f: X \to Y$ مطمئن شویم سپس در ضابطه $y = f(x)$ نقش x و y را عوض می‌کنیم یعنی $x = f(y)$ سپس از رابطه $x = f(y)$ متغیر y را برحسب x می‌یابیم و به $y = f^{-1}(x)$ می‌رسیم

مثال ۴: معکوس تابع (تابع معکوس) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $y = x^3$ را بیابید.

حل: $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$ و $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$ پس f پوشا است

برای یک‌به‌یک بودن: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3} \Rightarrow x_1 = x_2$

حال برای یافتن ضابطه تابع معکوس f یعنی f^{-1} از توجه بالا استفاده می‌کنیم

$$y = f(x) = x^3 \Rightarrow x = f(y) = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x} = f^{-1}(x)$$

مثال ۵ (تمرین ۳ صفحه ۹۱) فرض کنید که $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $f(x) = 3x - 2$

الف) ثابت کنید که f دوسویی است ب) تابع وارون f یعنی f^{-1} را بیابید.

حل: چون $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$ و $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$ پس تابع f پوشا است

f یک‌به‌یک است زیرا $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - \cancel{2} = 3x_2 - \cancel{2} \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

چون f یک‌یک و پوشا است پس f دوسویی است

برای یافتن تابع معکوس $x = 3y-2 \Rightarrow 3y = x+2 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

مثال ۶ (تمرین ۸) ثابت کنید که یک تناظر یک‌یک بین مجموعه اعداد طبیعی N و مجموعه اعداد طبیعی زوج وجود دارد

حل: قرار می‌دهیم $f: N \to N_e$ که N_e مجموعه تمام اعداد طبیعی زوج است

$$f(n) = 2n$$

f یک تابع است و f یک‌یک است زیرا $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$

f پوشا است $\forall x \in N_e \Rightarrow$ زوج $x = 2k \Rightarrow \exists k \in N : f(k) = 2k = x$

پس f دوسویی است یعنی f یک تناظر بین N و N_e است

مثال ۷ (تمرین ۱۸) ثابت کنید که تابع $f: X \to Y$ یک‌یک است اگر و فقط اگر برای تمام زیرمجموعه‌های X مانند A و B: $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

حل: طبق قضیه ۱۳ اگر f یک‌یک باشد آنگاه برای هر دو زیرمجموعه A و B از X داریم

$$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$$

برعکس: فرض کنید که برای هر زیرمجموعه A و B از X داشته باشیم $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

نشان می‌دهیم که f یک‌یک است. فرض کنید که $x_1 \neq x_2$ قرار می‌دهیم که $A = \{x_1\}$ و $B = \{x_2\}$ بدیهی است که $A \neq B$ پس $A \cap B = \emptyset$ چون A و B تک عضوی هستند حال چون $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset \Rightarrow \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \emptyset$$

پس $\{f(x_1)\} \neq \{f(x_2)\}$ بنابراین $f(x_1) \neq f(x_2)$ پس f یک‌یک است

مثال ۸ (تمرین ۷) ثابت کنید که تابع X-تصویر $P_X: X \times Y \to X$ و تابع Y-تصویر یعنی $P_Y: X \times Y \to Y$ پوشا هستند. چه وقت تابع X-تصویر یک‌یک است

$P_X(x,y) = x$

$P_Y(x,y) = y$

حل: تابع X-تصویر یعنی P_X زمانی یک‌یک است که $Y = \{c\}$ تک عضوی باشد زیرا

$P_X: X \times \{c\} \to X$

$P_X(x,c) = x$

$$P_X(x_1,c) = P_X(x_2,c) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1,c) = (x_2,c)$$

نشان می‌دهیم که تابع P_X پوشا است:
با شرطی که Y ناتهی باشد

$$\forall x \in X : \exists (x,y) \in X \times Y : P_X(x,y) = x$$

تابع P_Y پوشا است زیرا
با شرطی که X ناتهی باشد

$$\forall y \in Y\ \exists (x,y) \in X \times Y : P_X(x,y) = y$$

۷- ترکیب توابع

تعریف: فرض کنید که $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دو تابع باشند ترکیب این دو تابع، تابع $g \circ f: X \to Z$ است که در آن $\forall x \in X: (g\circ f)(x) = g(f(x))$.

به عبارت دیگر،

$$g\circ f = \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y: (x,y) \in f \wedge (y,z) \in g\}$$

تبصره: ترکیب توابع در مبانی ریاضی: باید دامنه و برد توابع (هر دو تابع) باید معلوم باشد (و دامنه یکی برد تابع دیگری است) تا ترکیب توابع تعریف بشود.

ترکیب توابع در ریاضی عمومی: چون دامنه و برد توابع زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ هستند معمولاً ذکر نمی‌گردند و در ترکیب توابع (هنگام ترکیب کردن) مشکلی برای ترکیب شدن می‌آورند و این شرط برای دامنه تابع $g\circ f$ است که به صورت زیر است

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثال ۱- فرض کنید که $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x+1$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = x^2$ باشد در این صورت $f\circ g(x)$ و $g\circ f(x)$ را بیابید.

حل: چون در این دو تابع دامنه و برد هر دو تابع $\mathbb{R}$ است پس

$$\left.\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x)) = g(x)+1 = x^2+1\\(g\circ f)(x) &= g(f(x)) = (f(x))^2 = (x+1)^2 = x^2+2x+1\end{aligned}\right\} \Rightarrow f\circ g \neq g\circ f$$

توجه: در حالت کلی در صورت تعریف شدن $f\circ g$ و $g\circ f$، $g\circ f \neq f\circ g$

قضیه ۵: ترکیب توابع شرکت‌پذیر است یعنی اگر $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$، و $h: Z \to W$ سه تابع باشند آنگاه $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$

اثبات: نخست توجه داریم که هر دو تابع $h\circ(g\circ f)$ و $(h\circ g)\circ f$ از X به W هستند، یعنی دامنه هر دو تابع $h\circ(g\circ f)$ و $(h\circ g)\circ f$ مجموعه X است

در مرحله بعد نشان می‌دهیم که ضابطه این دو تابع یکسان است یعنی $[h\circ(g\circ f)](x) = [(h\circ g)\circ f](x)$ $\forall x \in X$

$$\left.\begin{aligned}[h\circ(g\circ f)]x &= h((g\circ f)(x)) = h(g(f(x)))\\ [(h\circ g)\circ f](x) &= (h\circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))\end{aligned}\right\} \Rightarrow h(g(f(x))) = h(g(f(x)))$$

پس $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$

قضیه ۱۶: فرض کنید که $f: X \to Y$ تابع است.

الف) اگر تابع $g: Y \to X$ وجود داشته باشد بطوریکه $g \circ f = I_X$ آنگاه f یک یک است

(با عبارت دیگر اگر f معکوس چپ ($g \circ f$) داشته باشد آنگاه f یک یک است)

ب) اگر تابع $h: Y \to X$ وجود داشته باشد که $f \circ h = I_Y$ آنگاه f پوشا (پوششی) است

(با عبارت دیگر اگر f معکوس راست ($f \circ h$) داشته باشد آنگاه f پوشا است.

اثبات الف) فرض کنید که تابع $g: Y \to X$ وجود داشته باشد بطوریکه $g \circ f = I_X$ ($I_X: X \to X$ تابع همانی است)

نشان می دهیم که f یک یک است، فرض کنید که $f(x_1) = f(x_2)$ ، $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 = I_X(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = I_X(x_2) = x_2$$

پس $x_1 = x_2$ یعنی f یک یک است.

اثبات ب) فرض کنید که تابع $h: Y \to X$ موجود باشد بطوریکه $f \circ h = I_Y$ (I_Y تابع همانی است)

در این صورت برای هر y از Y یک عضد $x = h(y)$ در X وجود دارد (چون h تابع است)

بطوریکه $y = I_Y(y) = (f \circ h)(y) = f(h(y)) = f(x)$: یعنی f پوشا است

مثال (تمرین ۱ صفحه ۹۵) اگر $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = 2x^3 + 1$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ باشند آنگاه

الف) ترکیب $g \circ f$ را بیابید ب) ترکیب $f \circ g$ را بیابید.

حل:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{(f(x))^2+1} = \frac{1}{(2x^3+1)^2+1} = \frac{1}{4x^6+4x^3+2}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(g(x))^3 + 1 = 2\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^3 + 1 = \frac{2}{(x^2+1)^3} + 1$$

توجه: در کتاب ضابطه $g(x)$ برابر با $\cot g x$ است که از نظر مبانی ریاضی تمرین درستی نیست و برای اینکه مثله درست حل بشود ضابطه $g(x)$ را تعویض کرده ایم. ولی از نظر ریاضی عمومی اگر دامنه و برد f و g ذکر نشود و گفته شود که دو تابع $f(x) = 2x^3 + 1$ و $g(x) = \cot g x$ را ترکیب کنید جواب به صورت زیر است:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(g(x))^3 + 1 = 2\cot g^3 x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cot g(f(x)) = \cot g(2x^3+1)$$

توضیح: $Dom(\cot g x) = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

فرمول: $\cot g x = \frac{\cos x}{\sin x}$ و $\sin x$ باید مخالف صفر باشد پس اگر $\sin x = 0$

آنگاه $x = k\pi$ که $k \in \mathbb{Z}$ است جواب $\sin x$ صفر است پس

$$D_{\cot g x} = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

مثال ۲) (تمرین ۲ صفحه ۹۵) فرض کنید $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ و $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ با ترتیب $f(x) = \log_{10} x$ و $g(x) = 10^x$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ باشد

الف) ترکیب $g \circ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ را مطالبه کنید

ب) ترکیب $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را مطالبه کنید

حل:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 10^{f(x)} = 10^{(\log_{10} x)} = x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_{10}(g(x)) = \log_{10}(10^x) = x$$

$\Rightarrow$ f و g معکوس همدیگر هستند

مثال ۳) (تمرین ۶ صفحه ۹۵) فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد ثابت کنید که $f \circ I_X = f = I_Y \circ f$

اثبات: $f: X \to Y$ و $I_X : X \to X$ بنابراین $f \circ I_X : X \to Y$

$$(f \circ I_X)(x) = f(I_X(x)) = f(x) \quad (1)$$

و $I_Y : Y \to Y$ و $f: X \to Y$ پس $I_Y \circ f : X \to Y$

چون $f(x) \in Y$ پس داریم

$$(I_Y \circ f)(x) = I_Y(f(x)) = f(x) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f \circ I_X = f = I_Y \circ f$$

مثال ۴) (تمرین $\frac{7}{95}$) دو تابع $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ مفروض است ثابت کنید که

الف) ثابت کنید که اگر توابع f و g یک‌به‌یک باشند آنگاه تابع $g \circ f : X \to Z$ یک‌به‌یک است

ب) ثابت کنید که اگر توابع f و g پوشا باشند آنگاه تابع $g \circ f : X \to Z$ پوشا است

حل الف)

$$x_1, x_2 \in X : g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow$$

چون g تابع یک‌به‌یک است پس $f(x_1) = f(x_2)$ و چون تابع f یک‌به‌یک است پس $x_1 = x_2$.

پس تابع $g \circ f$ یک‌به‌یک است

حل ب) روش اول: چون f و g پوشا هستند پس $f(X) = Y$ و $g(Y) = Z$ پس

$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$$

روش دوم:

$$\forall t \in Z \xrightarrow[\text{تابع } g]{\text{پوشا بودن}} \exists y \in Y : t = g(y) \xrightarrow[\text{تابع } f]{\text{پوشا بودن}} (\exists x \in X : y = f(x)), t = g(y)$$

$$\Rightarrow t = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \Longrightarrow$$ تابع $g \circ f$ پوشا است