مساحت رویه (سطح) و انتگرال رویه‌ای (انتگرال سطح)

فرض کنید که S قطعه‌ای از رویه به معادله $F(x,y,z)=c$ باشد و R سایه (تصویر) رویه S در یکی از صفحات مختصات باشد و تابع F و مشتقات جزئی مرتبه اول آن روی ناحیه R پیوسته باشد در این صورت

$$\boxed{\text{مساحت رویه } S=\iint_S ds=\iint_R \frac{|\vec{\nabla} F|}{|\vec{\nabla} F\cdot \vec{p}|}\,dR} \quad (*)$$

که در آن $\vec{p}$ بردار قائم واحد بر R است و $\vec{\nabla} F$ همان گرادیان تابع $F(x,y,z)$ است

فرمول * در حالت های خاص زیر ساده‌تر شده و در هر حالت به صورت زیر است

۱- اگر معادله S به صورت $\underline{z=f(x,y)}$ باشد در این صورت $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ و اگر سایه F در صفحه xoy ناحیه $\underline{R}$ باشد آنگاه

$$\text{مساحت رویه } S=\iint_S ds=\iint_R\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy=\iint_R\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

زیرا $\vec{p}=\vec{k}$ و $\vec{\nabla} F=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}+\vec{k}$ و $|\vec{\nabla} F\cdot\vec{p}|=|-1|=1$ و $|\vec{\nabla} F|=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$ است پس

$$\text{مساحت رویه } S=\iint_R \frac{|\vec{\nabla} F|}{|\vec{\nabla} F\cdot\vec{p}|}\,dR=\iint_R\frac{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}{1}\,dx\,dy$$

پس (۱)

$$\text{مساحت رویه } S=\iint_S ds=\iint_R\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$$

یعنی $ds=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$ عنصر سطح S است

۲- اگر معادله S به صورت $y=f(x,z)$ باشد و تصویر S در صفحه xoz ناحیه R باشد آنگاه

$$\boxed{\text{مساحت رویه } S=\iint_S ds=\iint_R\sqrt{1+f_x^2+f_z^2}\,dx\,dz} \quad (۲)$$

۳- اگر معادله S به صورت $x=f(y,z)$ باشد و تصویر S در صفحه yoz ناحیه R باشد آنگاه

$$\text{مساحت رویه } S=\iint_S ds=\iint_R\sqrt{1+f_y^2+f_z^2}\,dx\,dz \quad (۳)$$

مثال ۱: مساحت آن قسمتی از سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ که زیر صفحه $z=9$ قرار دارد پیدا کنید.

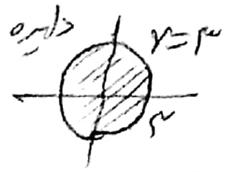
حل: از فرمول ① استفاده می کنیم: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x \,,\, \frac{\partial z}{\partial y}=2y$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

$$S \text{ مساحت رویه} = \iint_S dS = \iint_R \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy \xlongequal[\text{با قطبی}]{\text{در مختصات}} \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$\begin{cases} z=9 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=9$$

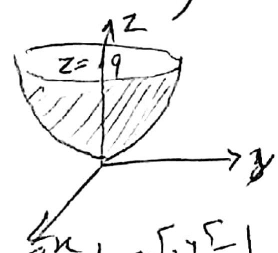
تصویر S در صفحه xoy دایره $x^2+y^2=9$ است زیرا



$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1+4r^2}\,dr \xlongequal[\text{متغیر}]{\text{تغییر}} 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac32}\right]_0^3 =$$

$$=\left[\frac{37\sqrt{37}-1}{6}\right]\pi$$ واحد مربع

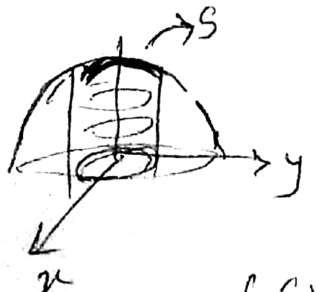
$$\int r\sqrt{1+4r^2}\,dr = \frac18\int\sqrt{u}\,du=\frac18\times\frac23(u)^{\frac32}+c$$
$$u=1+4r^2 \Rightarrow du=8r\,dr \qquad =\frac1{12}(1+4r^2)^{\frac32}+c$$



مثال ۲: مساحت قسمتی از نیم کره $x^2+y^2+z^2=2$ ، $z\ge 0$ که توسط استوانه $x^2+y^2=1$ جدا می شود را بیابید

$$S:\ z=+\sqrt{2-x^2-y^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2-y^2}} \,,\, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2y}{2\sqrt{2-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow ds=\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,dR=\sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{2-x^2-y^2}}\,dR=\frac{\sqrt2}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\,dR$$



$$R\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow 1+z^2=2 \Rightarrow z^2=1 \rightarrow z=1$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+1=2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=1}$$

$$\text{مساحت نیم کره} = \iint_S dS = \iint_R \frac{\sqrt2\,dR}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \xlongequal[\text{قطبی}]{\text{مختصات}} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt2\,r\,dr\,d\theta}{\sqrt{2-r^2}}$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\sqrt2\,r\,dr}{\sqrt{2-r^2}} = 2\sqrt2\,\pi\left[\frac{-\cancel{2}}{2}\sqrt{2-r^2}\right]_0^1 = 2\sqrt2\,\pi\left[\sqrt2-1\right]$$

$$=2\left[2-\sqrt2\right]\pi$$ واحد مربع

انتگرال رویه ای (انتگرال سطح) فرض کنید که S یک سطح به طور پیوسته مشتق پذیر به معادله $F(x,y,z) = c$ باشد (یعنی مشتقات جزئی مرتبه اول F روی تصویرش R پیوسته باشند) و تابع $g(x,y,z)$ یک تابعی باشد که روی S و تصویرش R تعریف شده است در این صورت انتگرال دوگانه $\iint_S g\, dS$ را انتگرال رویه ای (انتگرال سطح) تابع g روی S می نامیم. که در آن dS عنصر

که در یکی از فرمول های ۱ و ۲ و ۳ (حالات خاص) صدق می کند

* برای محاسبه $\iint_S g\, dS$ کافی است که تصویر S در یکی از سه صفحه مختصات xy ، yz ، zx تعیین کنیم مثلاً اگر R تصویر S در صفحه xy باشد در این صورت معادله $F(x,y,z)=c$ معمولاً به صورت $z=f(x,y)$ است و $dS = \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\, dx\, dy$ و بنابراین تابع g به صورت $g(x,y,f(x,y))$ نوشته می شود و در نهایت

$$\boxed{\iint_S g\, dS = \iint_R g(x,y,f(x,y)) \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\, dx\, dy}$$

و اگر معادله S به صورت $y=f(x,z)$ و تصویر آن در صفحه zox ناحیه R باشد آنگاه

$$\boxed{\iint_S g\, dS = \iint_R g(x, f(x,z), z) \sqrt{1+(f_x)^2+f_z^2}\, dx\, dz}$$

و اگر معادله S به صورت $x=f(y,z)$ و تصویر آن در صفحه yoz باشد آنگاه ،

$$\boxed{\iint_S g\, dS = \iint_R g(f(y,z), y, z) \sqrt{1+(f_y)^2+(f_z)^2}\, dy\, dz}$$

مثال ۳: انتگرال رویه ای $\iint_S z^2\, dS$ را که S کره واحد $x^2+y^2+z^2=1$ است را حساب کنید.

حل: می توان نیمی از کره S برای محاسبه dS از تعریف اولی $dS = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot p|}\, dR$ حساب کرد که در آن $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1=0$ است و R تصویر S در صفحه xoy یعنی دایره $x^2+y^2 \le 1$ در نظر گرفت

$\nabla F = 2x i + 2y j + 2z k$ و $|\nabla F| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2$ و $\boxed{\vec{p} = \vec{k}}$ ، $\boxed{|\nabla F \cdot p| = 2|z|}$

$\boxed{z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$dS = \frac{2}{2z}\, dR = \frac{dR}{z}$

$$\iint_S z^2\,dS=\iint_R z^2\cdot\frac{dR}{|Z|}\overset{*}{=}2\iint_R\sqrt{1-x^2-y^2}\,dR\ \xlongequal[\text{مختصات}]{\text{قطبی}}\ 2\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta$$

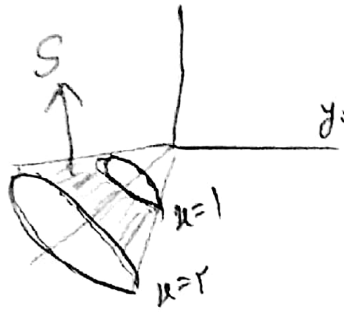
$$=2\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr\right)=(4\pi)\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4\pi}{3}$$

$$\int r\sqrt{1-r^2}\,dr=-\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]+C=-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

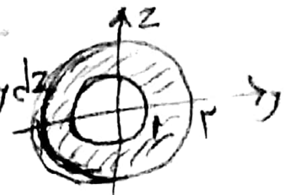
$1-r^2=u\Rightarrow du=-2r\,dr$

* به دلیل تقارن [illegible]

مثال ۱۴: انتگرال سطح $\iint_S \ln x\,d\sigma$ را حساب کنید که در آن S بخشی از مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$ است که بین صفحات $x=1$ و $x=2$ قرار دارد.



حل: چون معادله S به صورت $x=\sqrt{y^2+z^2}$ است و تصویر آن در صفحه yoz درون دایره $y^2+z^2=4$ و بیرون دایره $y^2+z^2=1$ است شکل زیر



پس $d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz$

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{2y}{2\sqrt{y^2+z^2}}\right)^2+\left(\frac{2z}{2\sqrt{y^2+z^2}}\right)^2}\,dy\,dz=\sqrt{1+\frac{y^2+z^2}{y^2+z^2}}\,dy\,dz=\sqrt{2}\,dy\,dz$$

$$\iint_S \ln x\,dS=\iint_R \ln\sqrt{y^2+z^2}\cdot\sqrt{2}\,dy\,dz\ \xlongequal[\text{قطبی عمل کنیم}]{\text{در مختصات}}\ \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_1^2 r\ln r\,dr\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\int_1^2 r\ln r\,dr\quad 2\sqrt{2}\pi\left[\frac{1}{2}r^2\ln r-\frac{1}{4}r^2\right]_1^2=\dots=\frac{\sqrt{2}}{2}(8\ln 2-3)\pi$$

$u=\ln r \qquad dv=r\,dr$

$du=\frac{dr}{r} \qquad v=\frac{1}{2}r^2$

$$\int r\ln r\,dr\ \xlongequal[\text{جزء}]{\text{جزء به}}\ \frac{1}{2}r^2\ln r-\frac{1}{2}\int r\,dr=\frac{1}{2}r^2\ln r-\frac{1}{4}r^2+C$$

کاربرد انتگرال رویه‌ای در فیزیک: اگر $\rho(x,y,z)$ چگالی جرم هر نقطه از سطح S باشد آنگاه

۱) جرم $S = M = \iint_S \rho\,dS$

۲) گشتاورهای مرتبه سطح S حول صفحات مختصات:

$$M_{yz}=\iint_S x\rho\,dS$$
$$M_{zx}=\iint_S y\rho\,dS$$
$$M_{xy}=\iint_S z\rho\,dS$$

۳) مرکز ثقل S: $\boxed{\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M},\ \bar{y}=\frac{M_{zx}}{M},\ \bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}}$

۴- گشتاورهای مرتبه دوم S حول محورهای مختصات :

$$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\,\rho\, dS$$

$$I_y = \iint_S (x^2+z^2)\,\rho\, dS \quad \text{و} \quad I_z = \iint_S (x^2+y^2)\,\rho\, dS$$

مثال ۵: مرکز جرم سطح نیم‌کره‌ای با شعاع a و چگالی ثابت $\rho=c$ را بیابید.

حل: فرض کنید که نیم‌کره با شعاع a عبارت باشد از $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ و تصویر آن در صفحه xoy دایره $x^2+y^2\le a^2$ است. چون محور zها محور تقارن S است و چگالی ثابت است (سطح S همگن) پس مرکز تقارن روی محور zها واقع می‌شود یعنی $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow dS=\frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2+x^2+y^2}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$M=\iint_S c\cdot dS=c\iint_R \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \overset{\text{قطبی}}{=} c\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{a\,r\,dr\,d\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}=\dots=2\pi c a^2$$

$$M_{xy}=\iint_S c\cdot z\,dS=\iint \frac{c\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=c\iint_R dx\,dy=c(\text{مساحت } R)$$

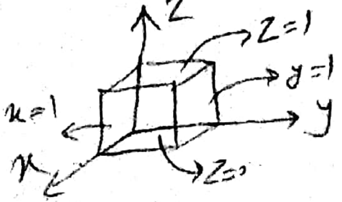
$$=c(\pi a^2) \qquad \Rightarrow \bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\pi c a^2}{2c\pi a^2}=\frac{a}{2}$$

تبصره: اگر $S=S_1\cup S_2$ در این صورت

$$\iint_S g\,dS=\iint_{S_1} g\,dS_1+\iint_{S_2} g\,dS_2$$

در مثال ۳ از این تبصره استفاده کردیم.

مثال ۶: $\iint_S xy^2z^3\,dS$ را حساب کنید که در آن S مکعب واحد است که در یک هشتم اول واقع است:



حل: مکعب از شش سطح $z=1$ و $y=1$ و $x=1$ و $z=0$ و $y=0$ و $x=0$ تشکیل شده است.

$$\iint_S xy^2z^3\,dS=\sum_{i=1}^{6}\iint_{S_i} xy^2z^3\,dS_i=\underbrace{\int_0^1\!\!\int_0^1 xy^2\,dx\,dy}_{S_2}+\underbrace{\int_0^1\!\!\int_0^1 xz^3\,dx\,dz}_{S_4}+\underbrace{\int_0^1\!\!\int_0^1 y^2z^3\,dy\,dz}_{S_6}$$

$$\boxed{S_1: z=0 \quad , \quad S_3: y=0 \quad , \quad S_5: x=0 \Rightarrow \iint_{S_1} 0\,dS_1=\iint_{S_3} 0\,dS_3=\iint_{S_5} 0\,dS_5=0}$$

$S_2: z=1 \Rightarrow dS_2=dx\,dy \quad , \quad S_4: y=1 \Rightarrow dS_4=dx\,dz \quad , \quad S_6: x=1 \Rightarrow dS_6=dy\,dz$

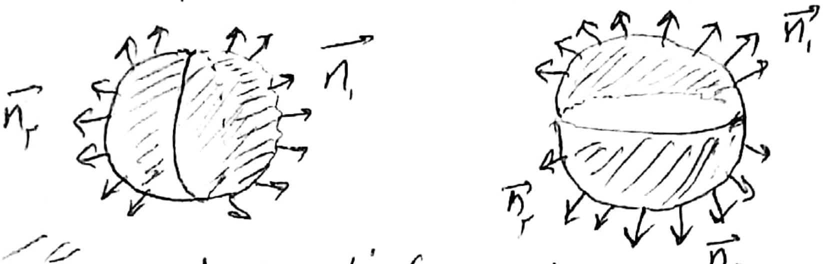
$$=\int_0^1 x\,dx\int_0^1 y^2\,dy+\int_0^1 x\,dx\int_0^1 z^3\,dz+\int_0^1 y^2\,dy\int_0^1 z^3\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=?$$

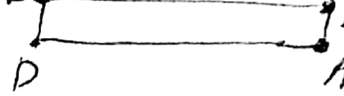
انتگرال رویه‌ای روی میدان برداری و محاسبه شار $\vec{F}$

تعریف: رویه (سطح) جهت دار: رویه S را جهت دار (دوطرفه) نامیم هرگاه در هر نقطه دارای بردار قائم $\vec{n}$ باشد و $\vec{n}$ بطور پیوسته روی S حرکت کند، مانند کره، بیضیگون، صفحه، نیم‌کره و سهمیگون و ...

توضیح: هر رویه جهت دار (دوطرفه) دارای دو جهت است (جهت بردار قائم $\vec{n}$ یک جهت به S می‌دهد) مانند شکل مقابل:

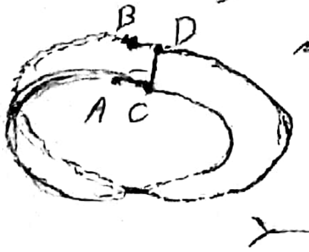


تنها رویه‌ای که جهت دار نیست (دوطرفه نیست) نوار موبیوس است: اگر یک نوار مستطیل شکل مانند



را طوری به یک حلقه تبدیل کنیم که B به D و A به C وصل شود، یک نوار موبیوس ساخته می‌شود (یعنی این نوار را نیم دور می‌تابانیم و سپس دو لبه آن را به هم می‌چسبانیم).

اگر سنجاقی که نوک آن به سمت بالا قرار دارد روی یک نوار موبیوس حرکت دهیم، بعد از یک دور کامل جهت نوک سنجاق عوض می‌شود. (نیم دور می‌تابانیم سپس دو سرش را به هم می‌چسبانیم)



تعریف: اگر $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ یک میدان برداری پیوسته باشد (یعنی مولفه‌های آن P و Q و R پیوسته باشند) که روی رویه جهت دار S با بردار قائم واحد $\vec{n}$ تعریف شده است، در این صورت انتگرال رویه‌ای $\vec{F}$ روی S برابر است با $\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS$ را شار $\vec{F}$ از روی S می‌نامیم.

به عبارت دیگر

$$\boxed{\text{شار } \vec F \text{ گذرنده از } S = \iint_S (\vec F\cdot\vec n)\, dS}$$ *

به همین طریق می‌توان شار $\vec F$ گذرنده از یک سطح S را حساب کرد

روش اول: محاسبه مستقیم dS و $\vec n$ و $\vec F$ و جایگذاری آن در انتگرال *

مثال ۷: شار میدان برداری $\vec F = x^2\vec i + y^2\vec j + z\vec k$ گذرنده از سطح S با معادله $z = 1 - x^2 - y^2$، $z \geq 0$ را بدست آورید ($\vec n$ را بردار قائم واحد رو به بیرون S در نظر بگیرید)

حل:

معادله S: $G(x,y,z) = x^2+y^2+z-1=0 \Rightarrow \vec\nabla G = 2x\vec i + 2y\vec j + \vec k$

$$\vec n = \frac{\vec\nabla F}{|\vec\nabla F|} = \frac{2x\vec i + 2y\vec j + \vec k}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \quad , \quad dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\,dy$$

$$(\vec F\cdot\vec n)\,dS = \left[\frac{2x^3+2y^3+z}{\cancel{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}}\right]\cdot \cancel{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\, dx\,dy = (2x^3+2y^3+z)\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \text{شار } \vec F = \iint_S (\vec F\cdot\vec n)\,dS = \iint_R (2x^3+2y^3+z)\,dx\,dy \quad \frac{\text{به جای } z}{\text{مقدارش قرار می‌دهیم}}$$

R دایره $x^2+y^2=1$ است. تصویر $z=1-x^2-y^2$ در صفحه xoy

$$= \iint_R [2x^3+2y^3+\cancel{z}-x^2-y^2]\,dx\,dy \quad \frac{\text{در مختصات}}{\text{قطبی حل می‌کنیم}}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 [2r^3\cos^3\theta + 2r^3\sin^3\theta + 1 - r^2]\, r\,dr\,d\theta = \cdots = \frac{\pi}{2}$$

روش دوم: به معادله S نگاه کنید اگر معادله به سه صورت زیر باشد آنگاه،

الف) $z = f(x,y)$ و تصویر S در صفحه xoy باشد در این صورت با محاسبه داریم:

$G(x,y,z) = z - f(x,y)$

$$\vec n = \frac{\vec\nabla G}{|\vec\nabla G|} = \frac{-f_x\vec i - f_y\vec j + \vec k}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \quad , \quad dS = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dR$$

$$(\vec F\cdot\vec n)\,dS = [-Pf_x - Qf_y + R]\,dA \Longrightarrow$$

$$\boxed{\text{شار } \vec F = \iint_S (\vec F\cdot\vec n)\,dS = \iint_A [-Pf_x - Qf_y + R]\,dA}$$

در مقایسه این فرمول شماره ۱۰ داریم

که در آن A تصویر S در صفحه xoy است $dA = dx\,dy = dy\,dx$

ب) اگر معادله S به صورت $y = f(x, z)$ باشد و تصویر S در صفحه (صفحه zx) zx ناحیه A باشد آنگاه:

$$\boxed{\vec{F}\text{ شار} = \iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \iint_A [-Pf_x + Q - Rf_z]\,dA \qquad dA = dx\,dz = dz\,dx}$$

ج) اگر معادله S به صورت $x = f(y, z)$ باشد و تصویر S در صفحه yz ناحیه A باشد آنگاه:

$$\boxed{\vec{F}\text{ شار} = \iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \iint_A [P - Qf_y - Rf_z]\,dA \qquad dA = dy\,dz,\ dA = dz\,dy}$$

روش سوم: در بخش بعد (جلسه بعد) می‌خوانیم که به قضیه دیورژانس معروف است تحت شرایطی داریم:

$$\vec{F}\text{ شار} = \iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \iiint_D (\operatorname{div}\vec{F})\,dD = \iiint_D (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,dD =$$

$$= \iiint_D \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right] dD$$

D درون سطح بسته S است

روش چهارم (مثال زیر)

مثال ۸) مطلوب است محاسبه شار برداری $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ گذرنده از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$

حل: روش چهارم: در این روش فقط $\vec{F}\cdot\vec{n}$ را حساب می‌کنیم:

$$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2=0 \Rightarrow \vec{\nabla}G = 2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$$

$$|\vec{\nabla}G| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2a \Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{\nabla}G}{|\vec{\nabla}G|} = \frac{1}{a}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = \frac{1}{a}\vec{F}$$

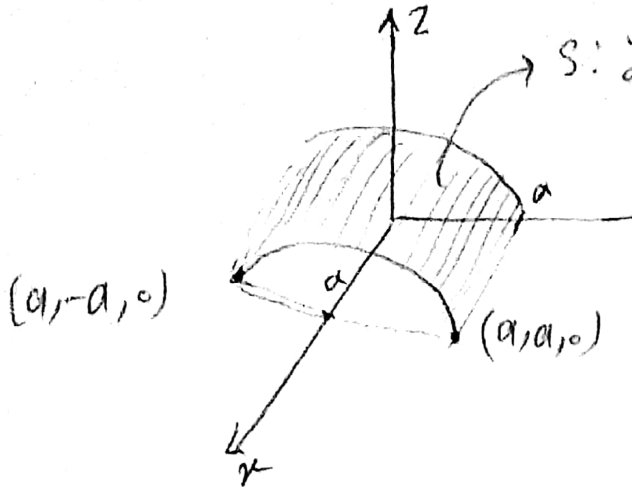
$$\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{1}{a}(x^2+y^2+z^2) = a$$

$$\Rightarrow \vec{F}\text{ شار} = \iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = a\iint_S dS = a(\text{مساحت سطح } S) =$$

$$= a(\text{مساحت سطح کره}) = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3$$

$\boxed{\text{در این روش باید } \vec{F}\cdot\vec{n} \text{ یک عدد شود}}$

مثال ۹: مطلوب است محاسبه شار برداری $\vec{F} = yz\vec{i} + z^2\vec{k}$ گذرنده از رویه S وقتی که S عبارت است از رویه‌ای که صفحات $x=0$ و $x=a$ از استوانه $a^2=z^2+y^2$ و $z\geq 0$ جدا می‌کند.



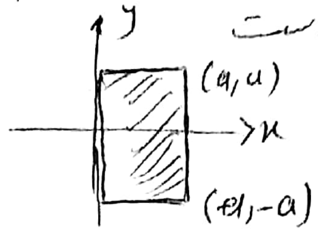
حل:

$z \geq 0 , z = \pm\sqrt{a^2-y^2}$

معادله سطح S به صورت

$z = \sqrt{a^2-y^2}$

تصویر S در صفحه xoy ناحیه مستطیلی A به صورت زیر است



$\vec F$ شار $= \iint_S [\vec F\cdot\vec n]\, dS$ فرمول ۱۰

$$= \iint_A [\underbrace{-0}_{P}\frac{\partial z}{\partial x} \underbrace{- yz}_{Q}\frac{\partial z}{\partial y} + \underbrace{z^2}_{R}]\, dA = \iint_R [-yz(\frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}}) + z^2]\, dA$$

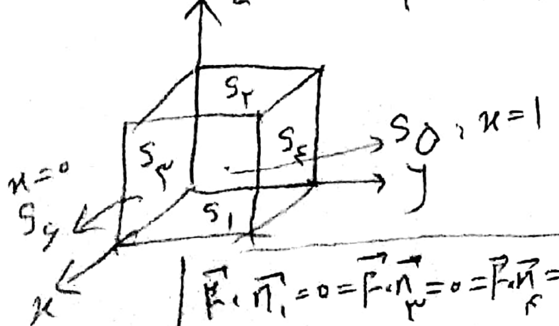
$$= \iint_R [y^2 + a^2 - y^2]\, dA = a^2 \iint_A dA = a^2 (\text{مساحت مستطیل}) = 2a^4$$

تبصره: اگر $S = S_1 \cup S_2$ (یا $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$) آنگاه

$$\iint_S (\vec F\cdot\vec n)\, dS = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} (F\cdot\vec n_i)\, dS_i$$

مثال ۱۰) شار میدان $\vec F = xy^3\vec i - yz\vec j + x^2z^2$ خارج از مکعب واحد S واقع در یک هشتم اول (محدود با سه صفحه $x=1$ و $y=1$ و $z=1$ و سه صفحه مختصات).

حل



$S_1 : z=0 \Rightarrow \vec n_1 = -\vec k \Rightarrow dA = dx\,dy$

$S_2 : z=1 \Rightarrow \vec n_2 = \vec k$

$S_3 : y=0 \Rightarrow \vec n_3 = -\vec j \Big\} \Rightarrow dA = dx\,dz$

$S_4 : y=1 \Rightarrow \vec n_4 = \vec k$

$S_5 : x=0 \Rightarrow \vec n_5 = -\vec i \Big\} \Rightarrow dA = dy\,dz$

$S_6 : x=1 \Rightarrow \vec n_6 = i$

$\boxed{\vec F\cdot\vec n_1 = 0 = \vec F\cdot\vec n_3 = 0 = \vec F\cdot\vec n_5 = 0}$

$\vec F\cdot\vec n_2 = x^2z^2 \underset{z=1}{=} x^2$

$\vec F\cdot\vec n_4 = -yz \overset{y=1}{=} -z \quad , \vec F\cdot\vec n_6 = xy^2 \underset{y=1}{=} y^2$

$\vec F$ شار $= \iint_S (\vec F\cdot\vec n)\, dS = 0+0+0 + \int_0^1\int_0^1 x^2\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 -z\,dx\,dz + \int_0^1\int_0^1 y^2\,dy\,dz =$

$$= \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 dy + \int_0^1 dx \int_0^1 -z\, dz + \int_0^1 y^2 dy \int_0^1 dz = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

در بخش آخر این فصل (قضیه دیورژانس) به راحتی حل می‌شود

$$\text{شار} = \iint (\vec{F} \cdot \vec{n})\, dS = \iiint_D \operatorname{div} F = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x}(\cancel{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(-yz) + \frac{\partial}{\partial z}(\cancel{zx})\right] dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y^2 z + 2zx^2)\, dx\, dy\, dz = \cdots = \frac{1}{6}$$

تمرین: شماره ۵۶ و ۵۷ و ۴۹ و ۴۸ صفحه ۱۳۹۱ و ۱۳۹۰

تمرین: شماره‌های ۱۵ و ۱۶ و ۱۹ و ۲۳ و ۳۷ صفحه ۱۴۰۴ و ۱۴۰۵