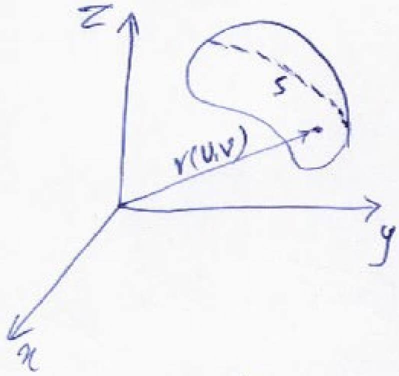
به نام خدا

## رویه های پارامتری و مساحتشان

همانند روشی که منحنی های فضایی را با تابع برداری $r(t)$ توصیف نمودیم، می توانیم یک رویه را با تابع برداری $r(u,v)$ توصیف کنیم




اگر $S$ یک رویه به صورت زیر باشد، هر نقطه در رویه $S$ توسط انتهای بردار $r(u,v)$ بدست می آید

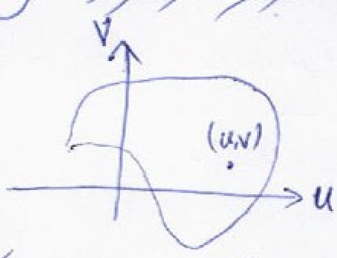
فرم کلی $r(u,v)$ به صورت زیر است

$$r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$$

$x = x(u,v) \quad y = y(u,v) \quad z = z(u,v)$

لذا $x$ و $y$ و $z$ مؤلفه های بردار $r$ هستند

مقادیری از $u$, $v$ که رویه $S$ را توصیف می کنند به عنوان دامنه بردار $r$ در نظر گرفته می شوند و با $D$ نشان داده می شوند




برای بدست آوردن مؤلفه های بردار $r(u,v)$ که رویه $S$ را توصیف کنند بایستی وابستگی هر یک از متغیرها به نحوی باشند که در تابع رویه صدق کند

مثال: نمایش پارامتری رویه $x^2 = y^2 + z^2$ را بیابید

ابتدا وابستگی $x$ را به صورت $x = u$ در نظر می گیریم اگر $y = u\cos v$, $z = u\sin v$ آنگاه

$$y^2 + z^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v = u^2 = x^2$$

بنابراین این وابستگی رویه را توصیف می کند لذا

$$r(u,v) = u\vec{i} + u\cos v\,\vec{j} + u\sin v\,\vec{k}$$

مثال: نوع رویه با معادله برداری

$$r(u,v) = 2\cos u\,\vec{i} + v\vec{j} + 2\sin u\,\vec{k}$$

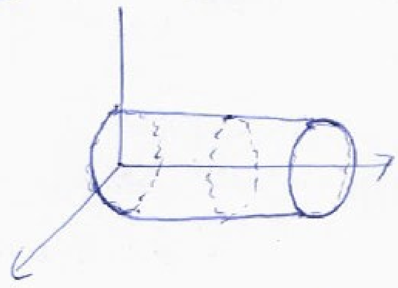
را تعیین و رسم کنید.

معادله پارامتری رویه به صورت زیر است

$$x = 2\cos u \quad y = v \quad z = 2\sin u$$

$$x^2 + z^2 = 4\cos^2 u + 4\sin^2 u = 4$$

بنابراین در صفحه $xz$ و سطح مقطع‌های قائم همگی دایره‌ای به شعاع ۲ هستند و روی $y$ نیز محدودیتی نداریم پس رویه استوانه‌ای به شعاع ۲ که محور آن محور $y$ است می‌باشد



تابعی برداری بیابید که رویه $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ را توصیف کند

راه اول: اگر $x=x$ , $y=y$ قرار دهیم آنگاه $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ بنابراین

$$r(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+2\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{k}$$

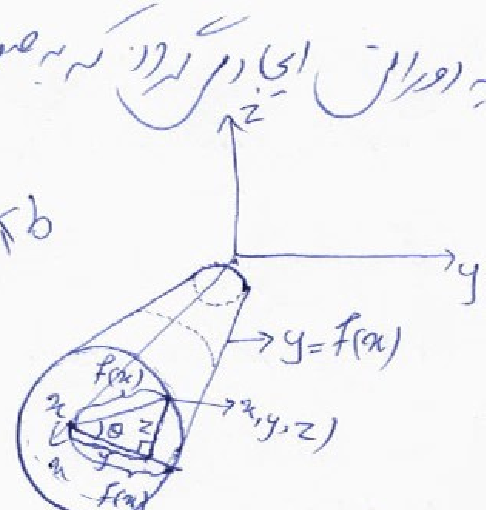
راه دوم: چون رویه در سطح مقطع‌های افقی یک دایره است پس

$$x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta \Rightarrow z=2\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=2r$$

$$r(r,\theta)=r\cos\theta\,\vec{i}+r\sin\theta\,\vec{j}+2r\,\vec{k}$$

اگر $y=f(x)$ را حول محور $x$ها دوران دهیم یک رویه دورانی ایجاد می‌گردد که به صورت زیر آن را توصیف می‌کنیم

$a\leq x\leq b$




اگر $\theta$ زاویه دوران باشد آنگاه $x=x,\ y=f(x)\cos\theta\quad z=f(x)\sin\theta$

به عنوان مثال معادله پارامتری رویه دورانی $y=\sin x$ ، $0\leq x\leq 2\pi$ حول محور $x$ به صورت زیر است

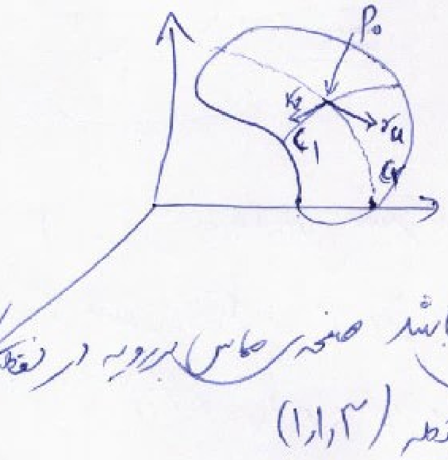
$$x=x\ ,\ y=\sin x\cos\theta\quad z=\sin x\sin\theta$$

## صفحه‌ی مماس

بردار $r(u,v)$ رویه $S$ را توصیف می‌کند

$$r(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

در نقطه‌ی $P_0$، نمایش هندسی مشتقات جزئی $r_u$ و $r_v$ به صورت زیر است




به صفحه‌ای که شامل دو بردار $r_u$ و $r_v$ در نقطه‌ی $P_0$ باشد صفحه‌ی مماس بر رویه در نقطه‌ی $P_0$ می‌گویند

مثال: صفحه‌ی مماس بر رویه تابع برداری زیر را در نقطه $(1,1,3)$ بیابید

$$r(u,v) = u^2\vec{i} + v^2\vec{j} + (u+2v)\vec{k}$$

حل

$$r_u = 2u\vec{i} + \vec{k}$$
$$r_v = 2v\vec{j} + 2\vec{k}$$

با توجه به اینکه نقطه‌ی $P(1,1,3)$ است لذا

$$x = u^2 = 1 \quad u = \pm 1$$
$$y = v^2 = 1 \quad v = \pm 1$$
$$z = u + 2v = 3 \Rightarrow \boxed{u = 1 = v}$$

$$r_u = 2\vec{i} + \vec{k}$$
$$r_v = 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

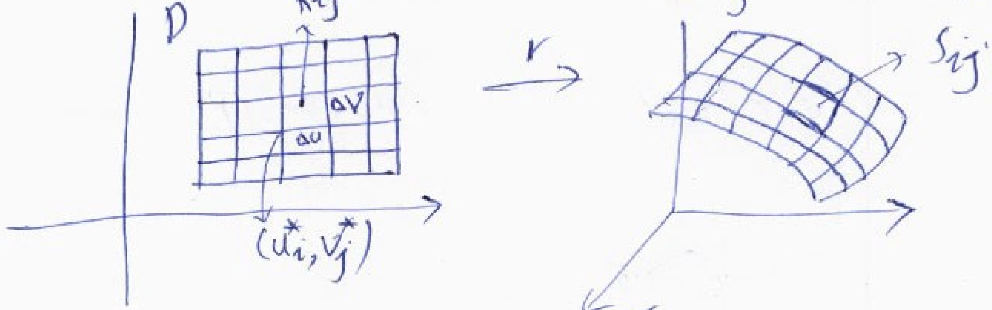
$$\vec{n} = \vec{r}_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

بنابراین معادله‌ی صفحه به صورت زیر است

$$-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0 \Rightarrow x + 2y - 2z + 3 = 0$$

## مساحت رویه‌ای

در صورتی که بردار $r(u,v)$ رویه $S$ را توصیف کند خواهیم داشت




در صورتی که دامنه $r$ را به زیر مستطیل‌هایی تقسیم کنیم یک زیر مستطیل به نام $R_{ij}$ از دامنه $r$ تحت نگاشت $r$ می‌تواند یک قسمت از $S$ به نام $S_{ij}$ را توصیف کند اگر $(u_i^*, v_j^*)$ گوشه سمت چپ پایین $R_{ij}$ باشد و $r_v^* = r_v(u_i^*, v_j^*)$ و $r_u^* = r_u(u_i^*, v_j^*)$

$r_u$ و $r_v$ بردار مماس گوشه $S_{ij}$ هستند و می‌توان $S_{ij}$ را با ضریبی از $r_u$ و $r_v$ به صورت یک متوازی‌الاضلاع توصیف نمود که اینجا ضرایب را $\Delta v$ , $\Delta u$ در نظر می‌گیریم تا بهترین توصیف را داشته باشیم


$$S_{S_{ij}} = |\Delta u\, r_u^* \times \Delta v\, r_v^*| = |r_u^* \times r_v^*|\,\Delta u \Delta v$$

بنابراین نتیجه تقریب مساحت $S$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |r_u^* \times r_v^*|\,\Delta u \Delta v$$

و به طور کلی

مساحت رویه $S$ : $A(S) = \iint_D |r_u \times r_v|\, dA$

که $D$ دامنه $r$ می‌باشد و $(u,v) \in D$

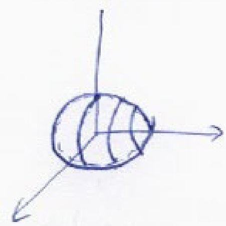
$$r(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

مساحت رویه‌ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ را بیابید

نمایش پارامتری یک کره به شعاع $a$ با توجه به اینکه $\rho=a$ به صورت زیر است

$$x=a\sin\phi\cos\theta,\quad y=a\sin\phi\sin\theta \quad z=a\cos\phi$$

$$r(\phi,\theta)=a\sin\phi\cos\theta\,\vec{i}+a\sin\phi\sin\theta\,\vec{j}+a\cos\phi\,\vec{k}$$



$$D=\{(\phi,\theta),\ 0\le\phi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

$$|r_\phi\times r_\theta|=a^2\sin\phi$$ محاسبات اندازه ضرب خارجی به عهده دانشجو

$$A=\iint_D |r_\phi\times r_\theta|\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta=a^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi=a^2(2\pi)(2)=4\pi a^2$$

در حالت خاص معادله‌ی رویه‌ی $S$، $z=f(x,y)$ را می‌توان با بردار زیر توصیف نمود

$$r(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+f(x,y)\vec{k}$$

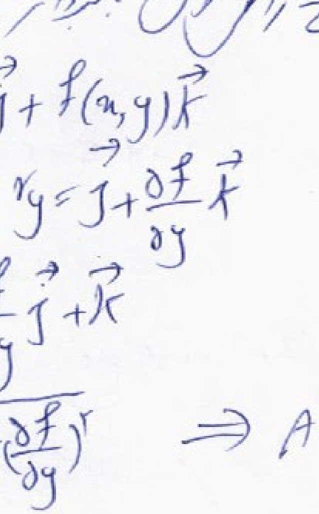
$$r_x=\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial x}\vec{k}\qquad r_y=\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{k}$$

$$r_x\times r_y=-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\vec{k}$$

$$|r_x\times r_y|=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\Rightarrow A(S)=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

مثال: مساحت آن قسمت از سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ که زیر صفحه $z=9$ قرار دارد را بیابید

حل. ابتدا رویه را رسم می‌کنیم




بنابراین رویه بالای قرص به مرکز مبدأ و شعاع ۳ قرار می‌گیرد

$$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA=\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dA\xrightarrow{\text{با تبدیل مختصات به قطبی}}\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{3}r\sqrt{1+4r^2}\,dr=2\pi\left(\frac{1}{8}\right)\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3=\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37}-1)$$

مثال: مساحت رویه دوران $y=f(x)$ ، $a\le x\le b$ حول محور $x$ را بدست آورید ($f(x)\ge 0$ و پیوسته است $\forall x\in[a,b]$)

حل: از قبل می دانیم که بردار $r$ که این رویه را توصیف می کند به صورت زیر است

$$r(x,\theta)=x\vec{i}+f(x)\cos\theta\,\vec{j}+f(x)\sin\theta\,\vec{k}$$

$$r_x=\vec{i}+f'(x)\cos\theta\,\vec{j}+f'(x)\sin\theta\,\vec{k}$$

$$r_\theta=-f(x)\sin\theta\,\vec{j}+f(x)\cos\theta\,\vec{k}$$

حل ضرب خارجی به عهده دانشجو

$$|r_x\times r_\theta|=f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$$

$$A=\iint_D |r_x\times r_\theta|\,dA=\int_0^{2\pi}\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,d\theta=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

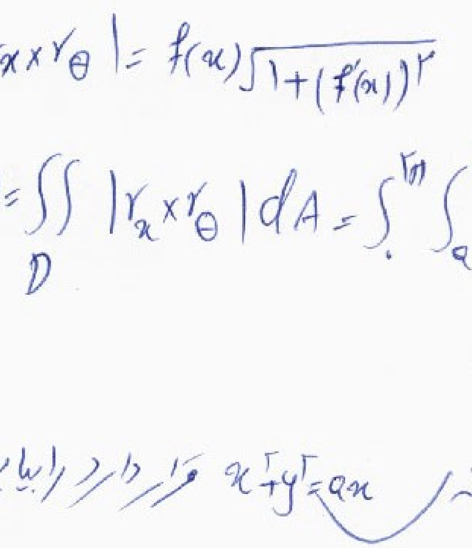
تمرین ۵۹ کتاب ص ۱۳۹۱

مساحت قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ را که درون استوانه $x^2+y^2=ax$ قرار دارد را بیابید

حل: اولین گام رسم شکل مسئله است

$$x^2+y^2=ax\Rightarrow\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$$

استوانه ای که قاعده آن دایره ای به شعاع $\frac{a}{2}$ و مرکز $(\frac{a}{2},0)$ می باشد




با توجه به برداری که معادله کره را توصیف می کند

$$r(\phi,\theta)=a\sin\phi\cos\theta\,\vec{i}+a\sin\phi\sin\theta\,\vec{j}+a\cos\phi\,\vec{k}$$

و شکل مسئله مشخص می شود که حدود $0\le\phi\le\pi$ و حدود $0\le\theta\le\pi$ می باشد

$$|r_\phi\times r_\theta|=a^2\sin\phi$$

$$\iint_D |r_\phi\times r_\theta|\,ds=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta=2\int_0^{\pi}a^2\,d\theta=2a^2\pi$$