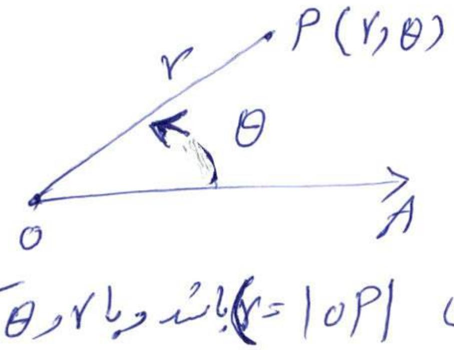
دستگاه مختصات قطبی

برای نمایش یک نقطه در صفحه و رسم منحنی در صفحه از دو دستگاه مختصات دکارتی و قطبی می توان استفاده کرد. دستگاه مختصات دکارتی از دو محور عمود بر هم تشکیل می شود و این دو محور را محور x ها و محور y ها نامیم و محل تلاقی این دو محور که با O نمایش داده می شود مبداء مختصات نامیده می شود و هر نقطه در این دستگاه مختصات دارای دو مختص x و y است که با (x,y) نمایش داده می شود و x و y هر دو از یک جنس یعنی عدد حقیقی هستند. در این دستگاه مختصات، مختصات هر نقطه منحصر به فرد است یعنی زوج (x,y) منحصر به فرد است.

و در دستگاه مختصات دکارتی می توان هر منحنی بر حسب دو متغیر x و y را رسم کرد.

دستگاه مختصات قطبی: این دستگاه از یک نقطه ثابت بنام قطب تشکیل می شود که با O نمایش داده می شود و یک نیم خط که شروع آن از قطب است و با آن محور قطبی (پرتو نخستین یا شعاع نخستین) گفته می شود معمولاً محور قطبی که با OA نمایش داده می شود به سمت راست کشیده می شود و متناظر با قسمت مثبت محور x در مختصات دکارتی است.

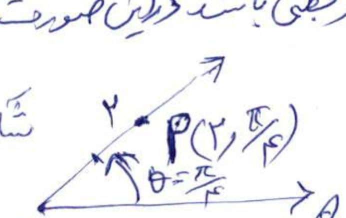
اگر P نقطه ای دلخواه از صفحه بجز O باشد و θ اندازه زاویه جهت دار $\angle AOP$ برحسب رادیان باشد. θ مثبت در نظر گرفته می شود هرگاه در خلاف جهت عقربه های ساعت اندازه گیری شود و θ منفی در نظر گرفته می شود هرگاه در جهت عقربه های ساعت اندازه گیری شود.



اگر r فاصله غیرجهت دار O تا P (یعنی $|OP| = r$) باشد و یا r و θ یک مجموعه ی مختصات قطبی P معین می شود و این مختصات به صورت (r,θ) نوشته می شود.

مثال ۱: برای تعیین نقطه $P(2,\frac{\pi}{4})$ ابتدا زاویه ای به اندازه $\frac{\pi}{4}$ رادیان را چنان رسم می کنیم که راس آن در قطب و ضلع اولش منطبق بر محور قطبی باشد در این صورت نقطه P روی ضلع دوم زاویه به فاصله ۲ واحد از قطب تعیین می گردد.

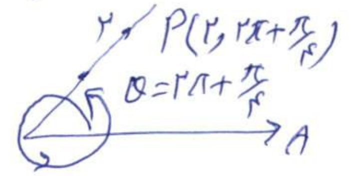
شکل (۱)



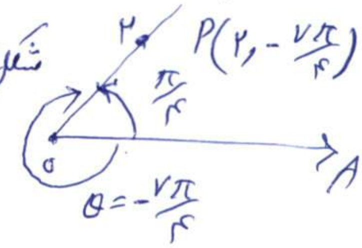
بدیهی است که یک مجموعه مختصات قطبی دیگر این نقطه $(2,-\frac{7\pi}{4})$ است شکل صفحه بعد (شکل ۲)

و علاوه بر این مختصات $(2, 2\pi+\frac{\pi}{4})$ نیز همانطور که در شکل (۳) دیده می‌شود همین نقطه P را نشان می‌دهد

شکل (۳)



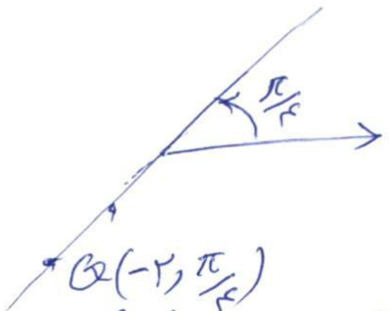
شکل (۲)



در واقع مختصات $(2, \frac{\pi}{4}+2n\pi)$ وقتی که n یک عدد صحیح دلخواه باشد همان نقطه P را نشان می‌دهد. بنابراین هر نقطه دلخواه تعداد نامتناهی مجموعه مختصات قطبی دارد. این موضوع برخلاف دستگاه مختصات دکارتی است.

اگر $r=0$ و θ عدد حقیقی دلخواهی باشد قطب را نمایش می‌دهد یعنی $(0, \theta)$ مختصات قطب می‌باشد.

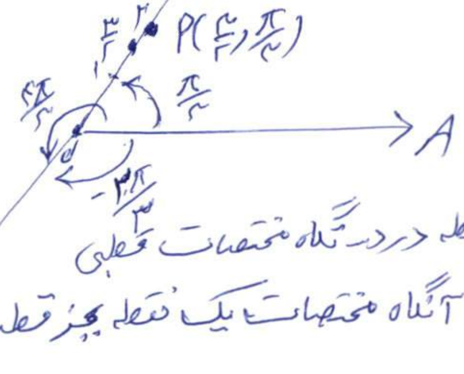
در مختصات قطبی r می‌تواند منفی باشد در این صورت به جای اینکه نقطه P بر ضلع دوم زاویه باشد، بر امتداد ضلع دوم یعنی بر آن پرتو که از قطب آغاز می‌شود و در راستای ضلع دوم، اما در خلاف جهت آن امتداد می‌یابد قرار دارد. لذا اگر P بر امتداد ضلع دوم زاویه‌ای با اندازه θ رادیان باشد، یک مجموعه‌ی مختصات قطبی P، (r, θ) است که در آن $r=-|OP|$.



مثال ۲: نقطه $Q(-2, \frac{\pi}{4})$ قرینه نقطه $P(2, \frac{\pi}{4})$ در مثال (۱) است. نقطه Q دارای مختصات دیگری باشد $(2, \pi+\frac{\pi}{4})$ و $(2, -\frac{3\pi}{4})$ است

مثال ۳: نقاط $P(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3})$ و $Q(-\frac{3}{2}, \frac{4\pi}{3})$ و $R(-\frac{3}{2}, -\frac{2\pi}{3})$ را در دستگاه مختصات قطبی نمایش دهید.

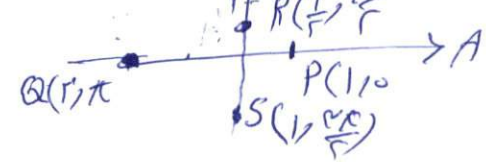
حل: همه این نقاط نمایش یک نقطه هستند.



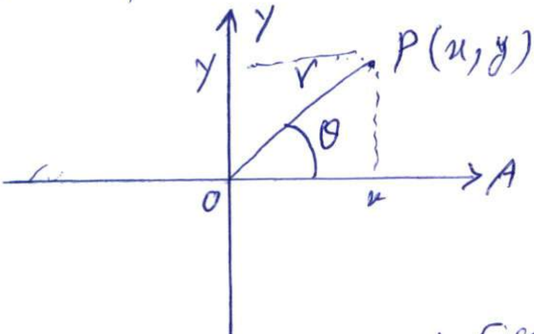
قرارداد: در مثال‌های قبل دیدیم که نمایش یک نقطه در دستگاه مختصات قطبی منحصر بفرد نیست. اگر $2\pi > \theta \geq 0$ و $r > 0$ آنگاه مختصات یک نقطه بجز قطب منحصر بفرد است.

مثال ۴: نقاط $P(1, 0)$ و $Q(2, \pi)$ و $R(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ و $S(1, \frac{3\pi}{2})$ را نمایش دهید.

حل:



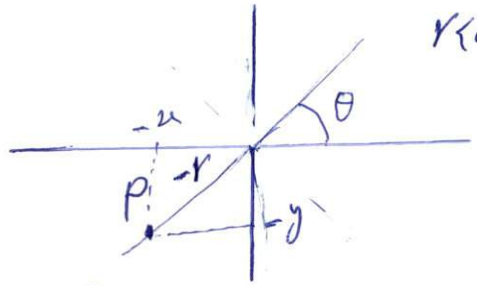
ارتباط بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی : قطب و مبداء مختصات دکارتی را روی هم قرار می دهیم و محورهای مثبت x را با محور قطبی OA منطبق می کنیم در این صورت محور y های مثبت روی نیم خط $\theta=\frac{\pi}{2}$ منطبق می شود. اگر P یک نقطه در صفحه باشد در این صورت



الف) اگر $r>0$

$$\begin{cases} \cos\theta=\frac{x}{r} \\ \sin\theta=\frac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad (1)$$

ب) اگر $r<0$



$$(1)\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad \text{زیرا} \quad \begin{cases} \cos\theta=\frac{-x}{-r}=\frac{x}{r} \\ \sin\theta=\frac{-y}{-r}=\frac{y}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2 \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (2)$$

معادلات (1) و (2) روابط بین مختصات دکارتی و قطبی را نشان می دهد.

اگر $P(r,\theta)$ در مختصات قطبی باشد مختصات دکارتی آن $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$ است

و اگر $P(x,y)$ در مختصات دکارتی باشد مختصات قطبی آن $P(r,\theta)$ است که در رابطه (2) صدق می کند.

مثال ۵: مختصات نقاط $(4,\frac{\pi}{3})$ و $(-4,\frac{5\pi}{3})$ را در مختصات دکارتی بیابید.

حل:

$$\left(4,\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow r=4,\ \theta=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=4\cos\frac{\pi}{3}=\frac{4}{2}=2 \\ y=4\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(2,2\sqrt{3})$$

$$\left(-4,\frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow r=-4,\ \theta=\frac{5\pi}{3}=2\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=-4\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=-2 \\ y=-4\sin(2\pi-\frac{\pi}{3})=2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(-2,2\sqrt{3})$$

مثال ۶: مختصات $(1,\sqrt{3})$ و $(-1,\sqrt{3})$ را در مختصات قطبی بیابید.

$$(1,\sqrt{3}) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{1+3}=2 \\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=\tan^{-1}(\sqrt{3}) \Rightarrow \theta=k\pi+\frac{\pi}{3} \quad k\in Z \end{cases}$$

چون $(1,\sqrt{3})$ در ربع اول واقع است پس $\theta=\frac{\pi}{3}$ در نظر می گیریم پس مختصات $(1,\sqrt{3})$ در مختصات قطبی $P(2,\frac{\pi}{3})$ است.

$$(-1,\sqrt{3}) \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{1+3}=2 \\ \theta=\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = k\pi-\frac{\pi}{3} \quad k\in Z \end{cases}$$

چون $(-1,\sqrt{3})$ در ربع دوم واقع است پس $\theta=-\frac{\pi}{3}$ در نظر می گیریم و مختصات نقطه $(-1,\sqrt{3})$ در مختصات قطبی $(-2,-\frac{\pi}{3})$ است.

مثال ۷: الف) مختصات نقطه $(1,-1)$ را در مختصات قطبی بدست آورید.

ب) مختصات نقطه $(-6, \frac{7\pi}{4})$ را در مختصات دکارتی بدست آورید.

حل الف) $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ و $\tan\theta=\frac{y}{x}=-1$

چون نقطه $(1,-1)$ در ربع چهارم واقع است می‌توان $\theta=\frac{7\pi}{4}$ یا $\theta=-\frac{\pi}{4}$ در نظر گرفت. پس یکی از جوابهای مسئله $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ و دیگری $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$ را می‌توان در نظر گرفت.

حل ب) $x=r\cos\theta=-6\cos(\frac{7\pi}{4})=-6\cos(2\pi-\frac{\pi}{4})=-6\cos(\frac{\pi}{4})=-6(\frac{\sqrt{2}}{2})=-3\sqrt{2}$

$y=r\sin\theta=-6\sin(\frac{7\pi}{4})=-6\sin(2\pi-\frac{\pi}{4})=-6\sin(-\frac{\pi}{4})=-6(-\frac{\sqrt{2}}{2})=3\sqrt{2}$

پس مختصات نقطه $(-6, \frac{7\pi}{4})$ در مختصات دکارتی $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ است.

معادلات منحنی های قطبی

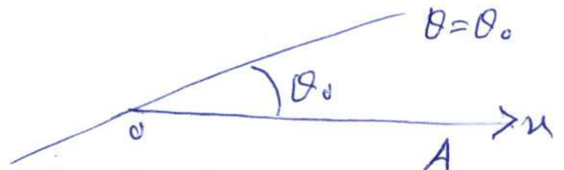
در دستگاه مختصات قطبی معادله منحنی به صورت $r=f(\theta)$ یا به صورت $F(r,\theta)=0$ نوشته می‌شود.

حالات خاص:

الف) اگر a عددی ثابت باشد معادله $r=a$ که در آن θ دلخواه است معادله یک دایره به شعاع a و مرکز مبداء مختصات می‌باشد زیرا

$a=r=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2=a^2$

ب) اگر θ_0 ثابت باشد معادله $\theta=\theta_0$ که در آن r دلخواه است معادله یک خط است که با محور xها زاویه θ_0 می‌سازد و از مبداء می‌گذرد.



توجه: همانطور که به کمک رابطه های (۱) یعنی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ و رابطه (۲) یعنی $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\tan\theta=\frac{y}{x}$ مختصات یک نقطه در مختصات دکارتی به مختصات قطبی و همچنین مختصات یک نقطه در مختصات قطبی را به مختصات دکارتی تبدیل می‌کند این دو رابطه معادلات در مختصات دکارتی $F(x,y)=0$ را به معادلات در مختصات قطبی $F(r,\theta)=0$ تبدیل می‌کند و برعکس $F(r,\theta)=0$ به $F(x,y)=0$ تبدیل می‌کند. بنابراین برای شناخت معادله‌ها در مختصات قطبی و نمودار آنها از این دو رابطه کمک می‌گیریم.

مثال ۸: شکل قطبی معادلات $x^2+y^2=2x$ و $x^2+y^2=8y$ و $x=a$ و $y=a$ را بنویسید.

حل:

$x^2+y^2=2x \Rightarrow r^2=2r\cos\theta \longrightarrow r=2\cos\theta$

$x^2+y^2=8y \Rightarrow r^2=8r\sin\theta \Longrightarrow r=8\sin\theta$

$x=a \Rightarrow r\cos\theta=a \longrightarrow r=\frac{a}{\cos\theta}=a\sec\theta \Rightarrow r=a\sec\theta$

$y=a \Rightarrow r\sin\theta=a \Rightarrow r=\frac{a}{\sin\theta}=a\csc\theta \Longrightarrow r=a\csc\theta$

مثال ۹: معادلات $r=a(1+\cos\theta)$ و $r=\cos2\theta$ و $r=\sin2\theta$ و $r=a(1-\sin\theta)$ را در مختصات دکارتی بیابید.

حل:

$$r=a(1+\cos\theta) \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین در } r} r^2=ra+ra\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2=a\sqrt{x^2+y^2}+ax$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$$

$$r=\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین در } r^2} r^3=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3=x^2-y^2$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=x^2-y^2$$

$$r=\sin2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین در } r^2} r^3=2(r\sin\theta)(r\cos\theta) \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3=2yx$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=2yx$$

$$r=a(1-\sin\theta)=a-a\sin\theta \xrightarrow[r \text{ ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در}} r^2=ra-ar\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=a\sqrt{x^2+y^2}-ay$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2-ay)^2=a^2(x^2+y^2)$$

نکته ۱) در مثال (۸) دیدیم که معادله $r=a\cos\theta$ در دکارتی به صورت $x^2+y^2=ax$ یعنی معادله دایره است و معادله $r=a\sin\theta$ در دکارتی به صورت $x^2+y^2=ay$ یعنی معادله دایره است.

در مثال (۸) $a=4$ و $a=8$ در نظر گرفته شده بود.

بنابراین معادلات $r=a\cos\theta$ و $r=a\sin\theta$ هر دو دایره هستند یعنی به ترتیب معادله $x^2+y^2=ax$ و $x^2+y^2=ay$.

رسم نمودار معادلات در دستگاه مختصات قطبی

به چهار روش می‌توان نمودار معادلات در دستگاه مختصات قطبی را رسم کرد.

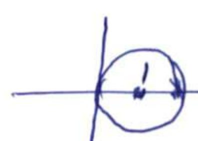
روش اول: تبدیل معادلات قطبی به دکارتی (زیرا نمودار $F(r,\theta)=0$ و $F(x,y)=0$ وقتی که به هم تبدیل می‌شوند در مختصات دکارتی و قطبی یکسان هستند)

برای رسم نمودار معادلات قطبی کافی است که آن را به معادله برحسب x و y تبدیل کنیم و سپس آن را در مختصات دکارتی رسم کنیم. از این روش زمانی استفاده می‌کنیم که رسم نمودار در مختصات دکارتی آسان باشد.

مثال ۱۰: نمودار $r=2\cos\theta$ را رسم کنید.

حل: طبق نکته ۱ معادله $r=2\cos\theta$ در دکارتی معادله دایره $x^2+y^2=2x$ است که مرکز این دایره $(1,0)$ و شعاع آن ۱ است زیرا

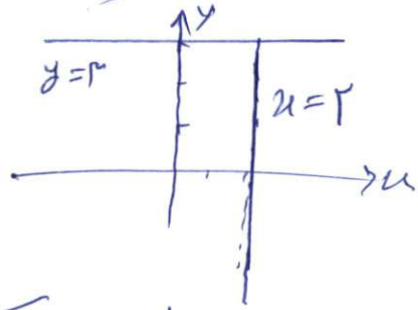
$$x^2+y^2-2x=0 \longrightarrow (x-1)^2+y^2=1$$



$\to r=2\cos\theta$

مثال ۱۱: نمودار $r=2\sec\theta$ و $r=3\csc\theta$ را رسم کنید.

حل:



$$r=2\sec\theta=\frac{2}{\cos\theta}\Rightarrow 2=r\cos\theta\Rightarrow 2=x$$

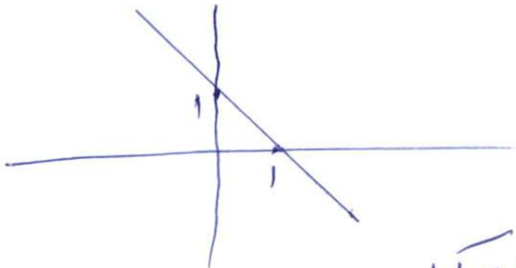
$$r=3\csc\theta=\frac{3}{\sin\theta}\Rightarrow 3=r\sin\theta\Rightarrow y=3$$

مثال ۱۲: نمودار $r=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$ را رسم کنید.

حل:

$$r=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\Longrightarrow r\sin\theta+r\cos\theta=1\longrightarrow y+x=1$$

معادله خط

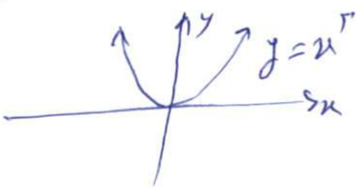


مثال ۱۳: نمودار $r=\tan\theta\sec\theta$ را رسم کنید.

حل:

$$r=\tan\theta\sec\theta\Rightarrow r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\Rightarrow \sin\theta=r\cos^2\theta\Longrightarrow r\sin\theta=r^2\cos^2\theta\Longrightarrow y=x^2$$

معادله یک سهمی است.

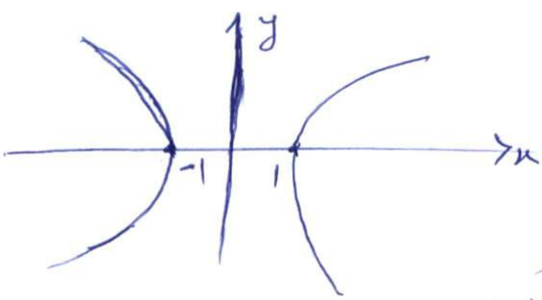


مثال ۱۴: نمودار $r^2=\sec2\theta$ را رسم کنید.

حل:

$$r^2=\sec2\theta\Rightarrow r^2\cos2\theta=1\Rightarrow r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=1\Longrightarrow x^2-y^2=1$$

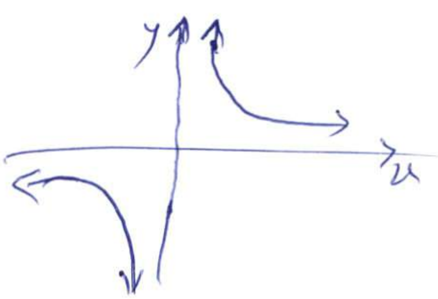
معادله هذلولی



مثال ۱۵: نمودار $r^2=2\csc2\theta$ را رسم کنید.

حل:

$$r^2=2\csc2\theta\Rightarrow r^2\sin2\theta=2\Rightarrow 2r^2\sin\theta\cos\theta=2\Longrightarrow xy=1\to y=\frac{1}{x}$$



روش دوم: با استفاده از تقارن‌ها و دوره تناوب و دوران‌ها می‌توان تعدادی از نمودار معادلات قطبی را رسم کرد.

نکته ۲- نمودار قطبی $r=f(\theta)$ و $r=f(\theta-\theta_0)$ مشابه است و از دوران $r=f(\theta)$ به اندازه $\theta=\theta_0$ حول مبدأ (قطب) O در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، نمودار $r=f(\theta-\theta_0)$ رسم می‌شود.

نکته ۳- اگر $T=\theta_0$ دوره تناوب اصلی نمودار $r=f(\theta)$ باشد کافی است که نمودار $r=f(\theta)$ را در فاصله $[0,\theta_0]$ رسم کنیم و سپس همان نمودار را در فاصله $[\theta_0, 2\theta_0]$ و $[2\theta_0, 3\theta_0]$ و ... تکرار کنیم.

نکته ۴- نمودار دو منحنی $r=f(\theta)$ و $r=f(\theta-2\alpha)$ نسبت به پرتو $\theta=\alpha$ متقارن هستند، به عبارت دیگر اگر با تبدیل θ به $\theta-2\alpha$ در معادله $r=f(\theta)$ به معادله $r=g(\theta)=f(\theta-2\alpha)$ برسیم آنگاه نمودار $r=f(\theta)$ و $r=g(\theta)$ نسبت به $\theta=\alpha$ متقارن هستند. همچنین اگر با تبدیل θ به $\theta=2\alpha$ در معادله $r=f(\theta)$ به خود معادله $r=f(\theta)$ برسیم (یعنی این تغییر در θ معادله را تغییر ندهد) آنگاه $\theta=\alpha$ محور تقارن $\theta=\alpha$ است.

مثال ۱۶: نمودارهای $r=1-\cos\theta$ و $r=1+\cos\theta$ نسبت به پرتو $\theta=\frac{\pi}{2}$ متقارن هستند زیرا

$r=1+\cos(\theta-\pi)=1-\cos(\theta)$ یعنی $2\alpha=\pi$ پس $\alpha=\frac{\pi}{2}$

همچنین نمودارهای $r=1+\sin\theta$ و $r=1-\sin\theta$ نسبت به پرتو $\theta=\pi$ متقارن هستند زیرا

$r=1+\sin(\theta-2\pi)=1-\sin\theta$ یعنی $2\alpha=2\pi$ پس $\alpha=\pi$

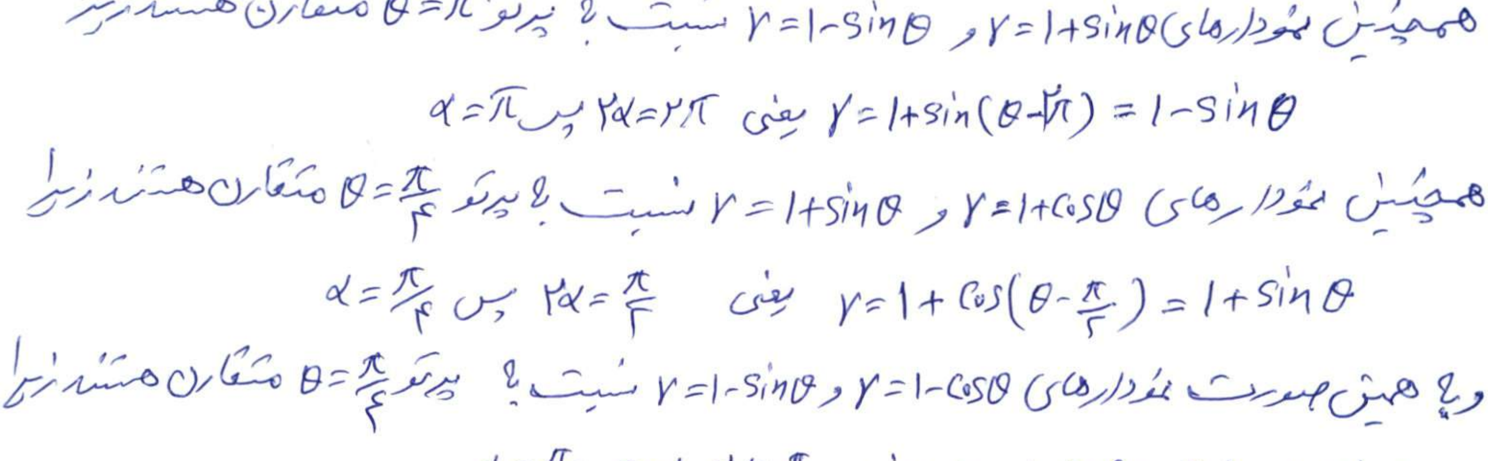
همچنین نمودارهای $r=1+\cos\theta$ و $r=1+\sin\theta$ نسبت به پرتو $\theta=\frac{\pi}{4}$ متقارن هستند زیرا

$r=1+\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=1+\sin\theta$ یعنی $2\alpha=\frac{\pi}{2}$ پس $\alpha=\frac{\pi}{4}$

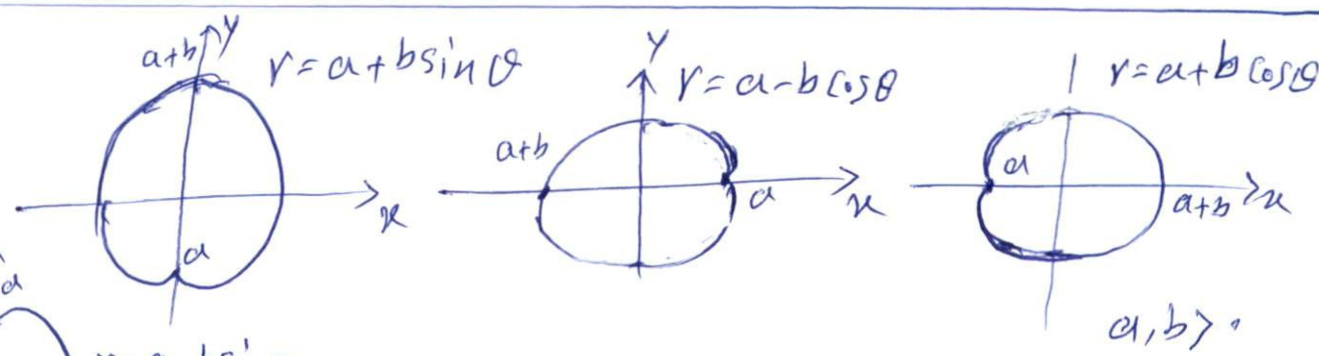
و به همین صورت نمودارهای $r=1-\cos\theta$ و $r=1-\sin\theta$ نسبت به پرتو $\theta=\frac{\pi}{4}$ متقارن هستند زیرا

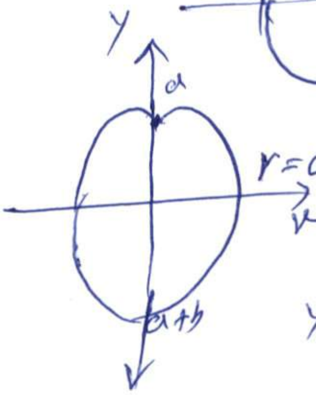
$r=1-\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=1-\sin\theta$ یعنی $2\alpha=\frac{\pi}{2}$ پس $\alpha=\frac{\pi}{4}$

نکته ۵) نمودارهای $r=a\pm b\cos\theta$ و $r=a\pm b\sin\theta$ به حلزون معروف هستند و اگر $a=b$ باشد نمودار دلنما یا دلوار (cardoid) به صورت زیر هستند:



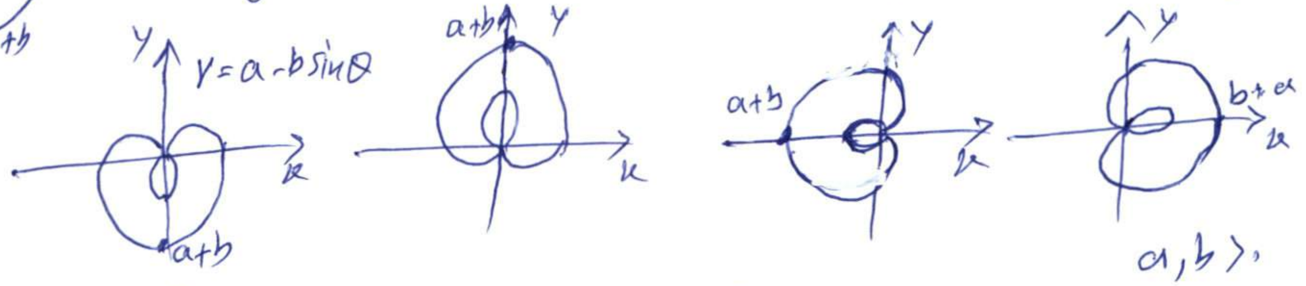
اگر $b>a$ باشد آنگاه نمودار به صورت زیر (صفحه) بعد است





$r=a-b\sin\theta$

واگر $a<b$ باشد نمودارها مانند دنما است و یک طوق اضافی در داخل دارد

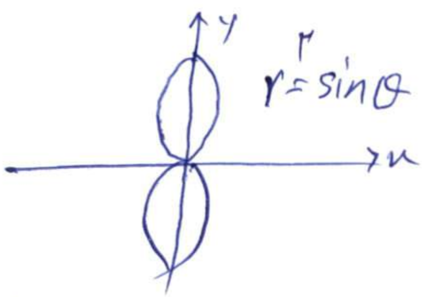


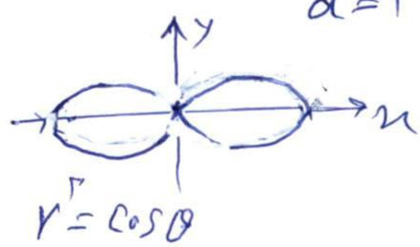
مثال ۱۷: نمودار $r^2=a\cos\theta$ و $r^2=a\sin\theta$ نسبت به پرتو $\theta=\frac{\pi}{4}$ متقارن هستند زیرا

$r^2=a\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=a\sin(\theta)$ یعنی $2\alpha=\frac{\pi}{2}$ پس $\alpha=\frac{\pi}{4}$

نکته ۶: نمودارهای $r^2=a\cos\theta$ و $r^2=a\sin\theta$ به پروانه (لیمنسکات) معروف هستند

$a=1$



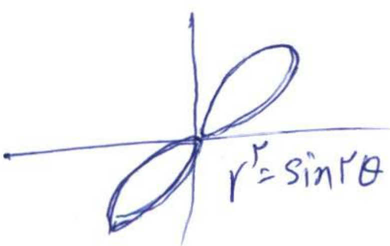


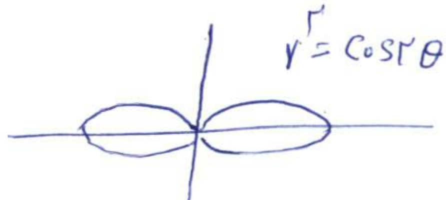
مثال ۱۸: نمودار $r^2=\cos2\theta$ و $r^2=\sin2\theta$ نسبت به پرتو $\theta=\frac{\pi}{8}$ متقارن هستند زیرا

$r^2=\cos2(\theta-\frac{\pi}{4})=\cos(2\theta-\frac{\pi}{2})=\sin2\theta$ زیرا $2\alpha=\frac{\pi}{4}$ پس $\alpha=\frac{\pi}{8}$

نکته ۷: نمودارهای $r^2=a\cos2\theta$ و $r^2=a\sin2\theta$ به پروانه (لیمنسکات) معروف هستند

اگر $a=1$ باشد شکل به صورت زیر است





مثال ۱۹: نمودارهای $r=\cos 2\theta$ و $r=\sin 2\theta$ نسبت به $\theta=\frac{\pi}{8}$ متقارن هستند زیرا

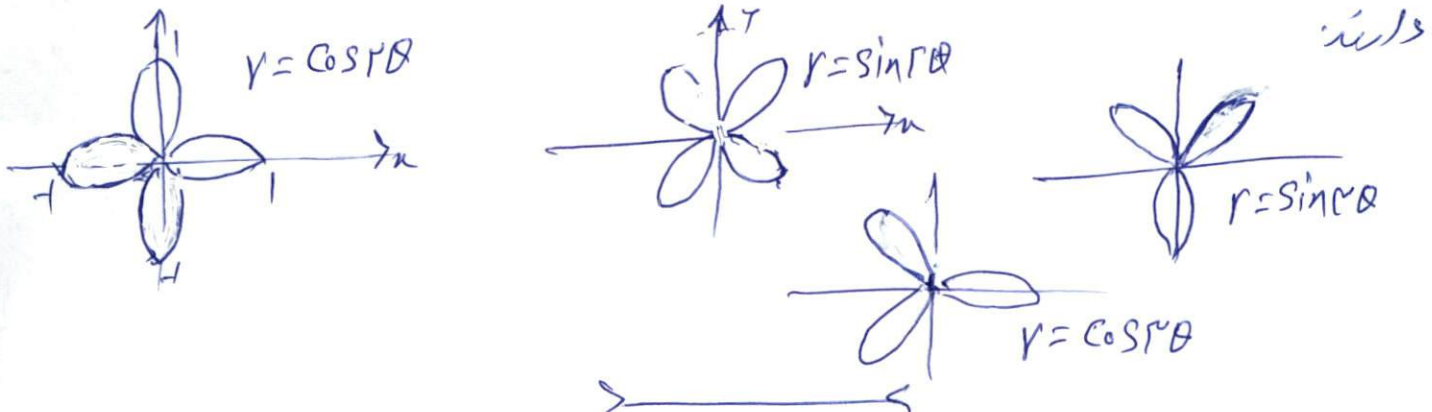
$r=\cos 2(\theta-\frac{\pi}{4}) = \cos(2\theta-\frac{\pi}{2}) = \sin 2\theta$ زیرا $2\alpha=\frac{\pi}{4}$ پس $\alpha=\frac{\pi}{8}$

نکته ۸: نمودارهای $r=a\sin n\theta$ و $r=a\cos n\theta$ به گل رز معروف هستند (گل چندپر)

و اگر n زوج باشد این گل‌ها دارای $2n$ گل برگ است

و اگر n فرد باشد این گل‌ها دارای n گل برگ می‌باشد

اگر $n=1$ باشد که قبلاً دیدیم که $r=\cos\theta$ و $r=\sin\theta$ دایره هستند و یک گل برگ (که همان دایره باشد) دارند:



محورهای تقارن در مختصات قطبی

محور xها محور تقارن: محور تقارن نمودار $r=f(\theta)$ محور xها است هرگاه یکی از دو حالت زیر برقرار شود

الف) با تبدیل θ به $-\theta$ معادله عوض نشود (یا معادله هم‌ارز $r=f(\theta)$ تبدیل گردد)

ب) با تبدیل θ به $\pi-\theta$ و r به $-r$ به‌طور همزمان معادله $r=f(\theta)$ عوض نشود (یا به معادله هم‌ارز $r=f(\theta)$ تبدیل گردد)

مثال ۲۰: محور xها (محور قطبی) محور تقارن منحنی‌های $r=1+\cos\theta$ و $r=\cos 2\theta$ و $r=\cos\theta$ و $r^2=\cos\theta$ و $r^2=\cos^2\theta$ است زیرا تابع $\cos\theta$ زوج است و $\cos(-\theta)=\cos\theta$

یعنی طبق الف با تبدیل θ به $-\theta$ معادله عوض نمی‌شود.

مثال ۲۱: محور xها (محور قطبی) محور تقارن منحنی‌های $r=\sin 2\theta$ و $r^2=\sin\theta$ است، زیرا با تبدیل θ به $\pi-\theta$ و r به $-r$ در معادله $r=\sin 2\theta$ معادله عوض نمی‌شود:

$-r=\sin 2(\pi-\theta) = -\sin 2\theta \Longrightarrow r=\sin 2\theta$

در معادله $r^2=\sin\theta$ با تبدیل θ به $\pi-\theta$ و r به $-r$ به معادله $r^2=+\sin\theta$ تبدیل می‌شود پس محور xها محور تقارن منحنی $r^2=\sin\theta$ است.

تعریف: دو معادله $r=f(\theta)$ و $(-r)^n=f(\theta+n\pi)$ برای هر $n\in\mathbb{Z}$ هم‌ارز هستند. نمودار هر دو

محور y محور تقارن: محور y ها محور تقارن نمودار $r=f(\theta)$ است هرگاه یکی از دو حالت زیر برقرار شود

الف) با تبدیل θ به $\pi-\theta$ معادله $r=f(\theta)$ عوض نشود یا با هم ارز آن تبدیل شود

ب) با تبدیل θ به $-\theta$ و r به $-r$ بطور همزمان در معادله $r=f(\theta)$ معادله عوض نشود و یا با هم ارز آن تبدیل شود

مثال ۲۲: محور y ها محور تقارن منحنی های $r=a\cos2\theta$ و $r=a\sin\theta$ و $r=a\sin^3\theta$ و $r=a\sin2\theta$ است

همچنین محور y ها محور تقارن $r=1+\sin\theta$ و $r=1-\sin\theta$ و $r^2=\sin\theta$ و $r^2=\cos\theta$ است.

تقارن نسبت به قطب (مبداء مختصات): قطب مرکز تقارن منحنی $r=f(\theta)$ است هرگاه یکی از سه حالت زیر برقرار باشد

الف) محور x ها و محور y ها هر دو با هم محور تقارن $r=f(\theta)$ باشند.

ب) با تبدیل r به $-r$ در معادله $r=f(\theta)$ معادله عوض نشود و یا هم ارز آن بدست آید

ج) با تبدیل θ به $\pi+\theta$ در معادله $r=f(\theta)$ معادله عوض نشود و یا هم ارز آن بدست آید

مثال ۲۳: قطب مرکز تقارن منحنی های $r^2=a\cos\theta$ و $r^2=a\sin\theta$ و $r=a\cos2\theta$ و $r=a\sin2\theta$ است.

روش سوم برای رسم نمودارهای قطبی:

برای رسم نمودار قطبی معادله $r=f(\theta)$ (r تابعی از θ باشد) می توان از دستور کلی زیر کمک گرفت.

۱. تقارن‌های نمودار $r=f(\theta)$ را می‌یابیم تا بازه رسم معلوم شود.

۲. بررسی کنید قطب روی نمودار $r=f(\theta)$ است یعنی معادله $r=f(\theta)=0$ جواب داشته باشد که در این صورت قطب روی نمودار $r=f(\theta)$ قرار دارد

۳. در صورت وجود مجانب های نمودار $f(\theta)$ را پیدا کنید.

۴. صعودی و نزولی بودن نمودار $r=f(\theta)$ را در بازه مورد نظر معلوم کنید یعنی معادله $r'=f'(\theta)=0$ را حل کنید و $r'=f'(\theta)$ را تعیین علامت کنید.

۵. با نقطه یابی در بازه داده شده (r,θ) که در معادله صدق می کند چند نقطه از منحنی را معین کنید

۶. با طی مراحل پنجگانه به صورت پیوسته نقاط را به هم وصل کنید تا نمودار کامل رسم شود.

مثال ۲۴: نمودار $r=1+\cos\theta$ را رسم کنید.

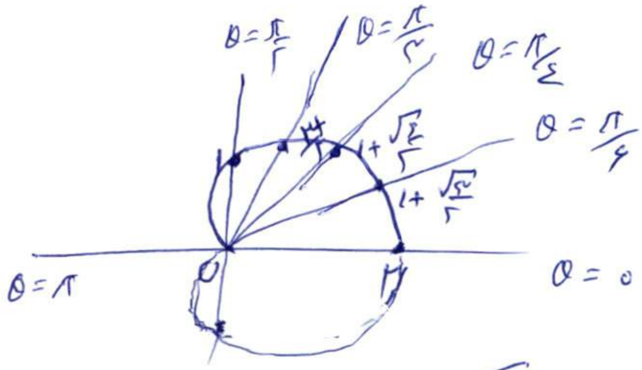
حل: با تبدیل θ به $-\theta$ معلوم می شود که محور x ها محور تقارن نمودار است زیرا $r=1+\cos(-\theta)=1+\cos\theta$ یعنی معادله عوض نمی شود پس نمودار را در بازه $[0,\pi]$ رسم می کنیم سپس قرینه آن را نسبت به محور x ها رسم می کنیم که نمودار کاملاً رسم شود.

پس قطب روی نمودار است،

$r=1+\cos\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=-1 \Rightarrow \theta=\pi$

$r'=-\sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0 , \theta=\pi$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		π
r'	0 −	−	−	−		−	0
r	2 ↘	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↘	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↘	$\frac{3}{2}$ ↘	1	→	0



تبصره: برای آنکه مقادیر r درست روی نمودار واقع شود بهتر است که با شعاعهای $r=2$ و $r=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $r=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $r=\frac{3}{2}$ و $r=1$ و مرکز قطب دایره‌هایی رسم کنیم در این صورت محل تلاقی این دایره‌ها با نیم‌خطهای $\theta=0$ و $\theta=\frac{\pi}{6}$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ و ... همان نقطه‌های $(2, 0)$ و $(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6})$ و $(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$ و $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3})$ و $(1, \frac{\pi}{2})$ و .... است تا منحنی $r=1+\cos\theta$ دقیق رسم شود.

مثال ۲۵: نمودار $r=\sin 2\theta$ را رسم کنید.

حل: با تبدیل θ به $-\theta$ و r به $-r$ معادله عوض نمی‌شود پس محور yها محور تقارن منحنی است زیرا

$-r=2\sin(-2\theta)=-2\sin 2\theta \Longrightarrow r=2\sin(2\theta)$

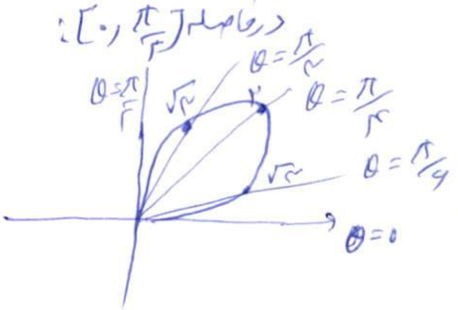
با تبدیل θ به $\pi-\theta$ و r به $-r$ معادله عوض نمی‌شود زیرا $-r=2\sin 2(\pi-\theta)=2\sin(2\pi-2\theta)=-2\sin 2\theta$

پس $r=2\sin 2\theta$ بنابراین محور xها هم محور تقارن منحنی است و چون هم محور xها و هم محور yها محور تقارن منحنی است پس مبدأ هم مرکز تقارن منحنی است. بنابراین کافی است که نمودار را در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ رسم کنیم پس قرینه‌ٔ آن نسبت به محورهای xها و yها و قرینه آن نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم.

قطب روی نمودار است زیرا: $r=2\sin 2\theta=0 \Longrightarrow \theta=0$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ ؛ در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$

$r'=4\cos 2\theta=0 \Longrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$ ؛ در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r'	0 +	+	0 −	−	
r	0 ↗	$\sqrt{3}$ ↗	2 ↘	$\sqrt{3}$ ↘	0



شکل کامل و کوچک شده

مثال ۲۶: نمودار $r^2=4\cos\theta$ را رسم کنید.

حل: $r^2=4\cos\theta$ از دو نمودار $r=2\sqrt{\cos\theta}$ و $r=-2\sqrt{\cos\theta}$ تشکیل شده است که چون قرینه هم

نسبت یا مبداء هستند پس یکی از آن یعنی $r=2\sqrt{\cos\theta}$ را رسم می‌کنیم. $\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

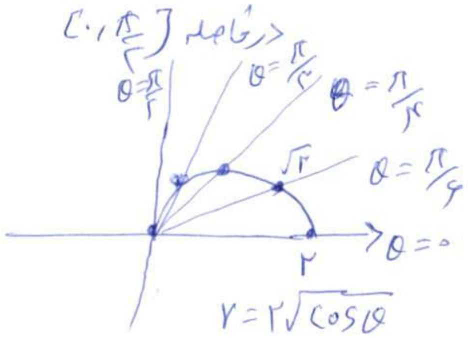
چون با تبدیل θ به $-\theta$ معادله $r=2\sqrt{\cos\theta}$ عوض نمی‌شود پس محور ox ها محور تقارن منحنی است بنابراین

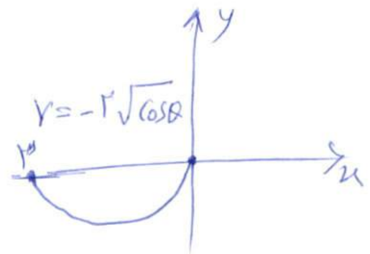
در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ رسم می‌کنیم

قطب روی نمودار قرار دارد $\Leftarrow$ در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ ؛ $r=2\sqrt{\cos\theta}=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

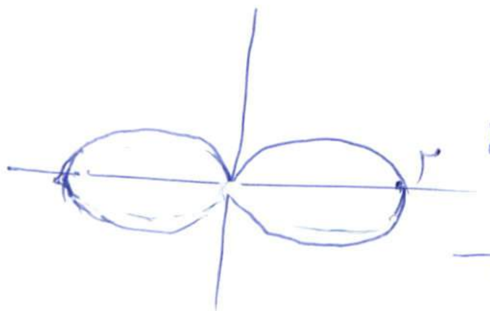
$r'=\frac{-\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}}=0 \longrightarrow \theta=0$ در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
r'	0	$-$		$-$		$-$		$-$	
r	2	$\searrow$	$\frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$\frac{2}{\sqrt[4]{2}}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0





نمودار کامل به صورت مقابل (پروانه) است



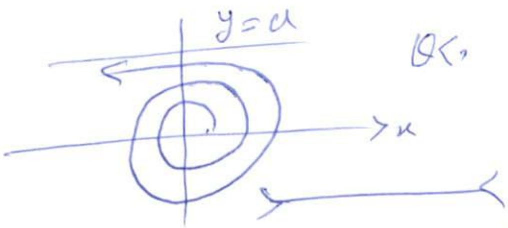
$r^2=4\cos\theta$

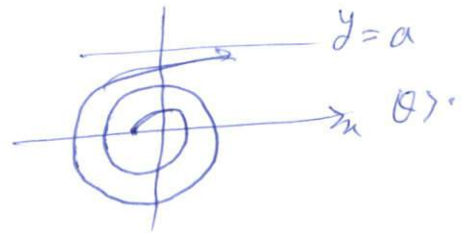
مثال ۲۷: نمودار $r\theta=a$ را رسم کنید $(a>0)$

حل: $r\theta=a$ نتیجه می‌دهد که $r=\frac{a}{\theta}$ و هرچه θ کوچک شود مقدار r بزرگ می‌شود پس احتمالاً مجانب دارد و خط $y=a$ مجانب آن است زیرا (در حالت $\theta>0$)

$$\lim_{\theta\to 0^+} y=\lim_{\theta\to 0^+} r\sin\theta=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{a\sin\theta}{\theta}=1\times a=a$$

(مارپیچ هذلولوی)





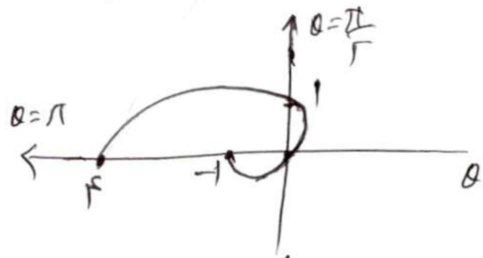
مثال ۲۸: نمودار $r=1-2\cos\theta$ را رسم کنید.

حل: با تبدیل θ به $-\theta$ معادله عوض نمی‌شود پس محور ox ها محور تقارن منحنی است بنابراین در بازه $[0, \pi]$ نمودار را رسم می‌کنیم و سپس قرینه آن را نسبت به محور ox ها کامل می‌کنیم. قطب روی نمودار است زیرا

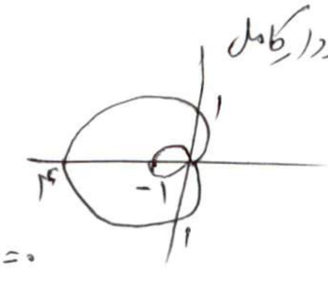
$r=1-2\cos\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$ در فاصله $[0, \pi]$

$r'=2\sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0, \pi$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r'	0 $+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
r	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	



نمودار کامل



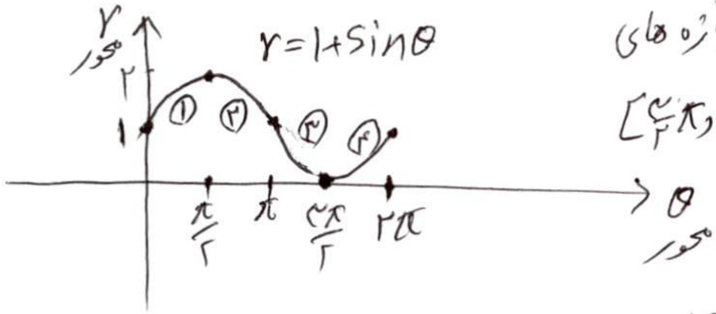
حلزون طوق دار

روش چهارم برای رسم منحنی های قطبی:

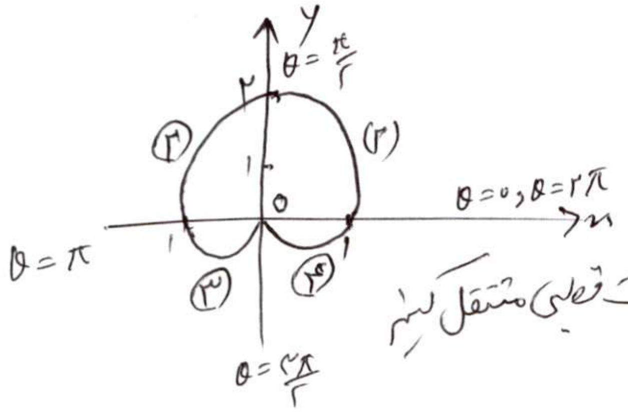
یکی از روشهای رسم نمودار قطبی، رسم نمودار دکارتی (یعنی در صفحه‌ای که یک محور آن θ و محور دیگر آن r است ولی دو محور بر هم عمود در نظر می‌گیریم) آن و سپس انتقال آن در بازه های مختلف است. چون منحنی های قطبی در برخی از بازه ها تکرار می شوند می توان همزمان از محورهای تقارن و مرکز تقارن هم کمک گرفت. از این روش زمانی استفاده می کنیم که نمودار $r=f(\theta)$ در مختصات دکارتی r و θ به راحتی رسم شود.

مثال ۲۹: نمودار $r=1+\sin\theta$ را رسم کنید.

حل: می دانیم که $r=1+\sin\theta$ همان نمودار $r=\sin\theta$ است که یک واحد بالای محور θ منتقل شده است.



با توجه به رفتار $r=1+\sin\theta$ (صعودی و نزولی) در بازه های $[0,\frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{\pi}{2},\pi]$ و $[\pi,\frac{3\pi}{2}]$ و $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ نمودارهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را به مختصات قطبی به صورت زیر منتقل می کنیم.

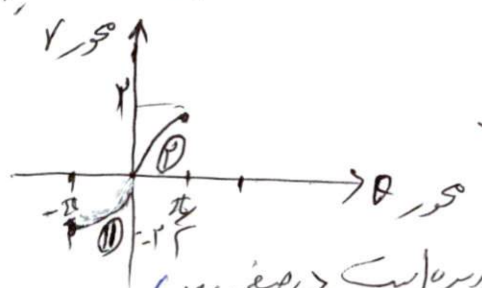


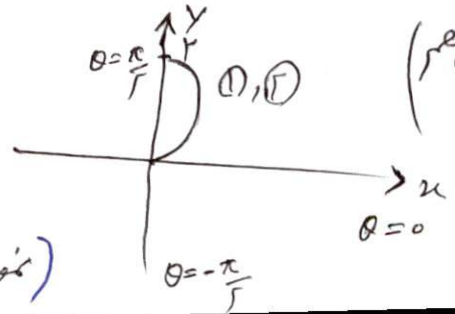
توجه: چون $r=1+\sin\theta$ نسبت به محور yها متقارن است می توانستیم اول نمودار دکارتی $r=1+\sin\theta$ را در فاصله $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ رسم کنیم سپس آن را به مختصات قطبی منتقل کنیم و در نهایت قرینه آن را نسبت به محور yها رسم کنیم.

(با تبدیل θ به $\pi-\theta$ معادله $r=1+\sin\theta$ عوض نمی شود پس محور yها محور تقارن $r=1+\sin\theta$ است)

مثال ۳۰: نمودار $r=2\sin\theta$ را رسم کنید.

حل: $r=2\sin\theta$ نسبت به محور yها متقارن است (با تبدیل θ به $\pi-\theta$ معادله عوض نمی شود) پس نمودار دکارتی $r=2\sin\theta$ را در فاصله $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ رسم می کنیم سپس آن را به مختصات قطبی منتقل می کنیم.

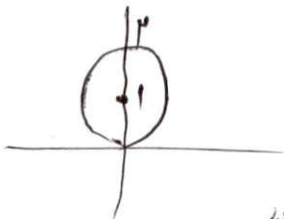




(نمودار ۱ و ۲ روی هم قرار می گیرند)

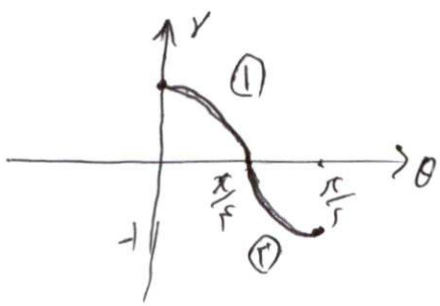
(نمودار کامل که دایره است در صفحه بعد)

نمودار $r = 2\sin\theta$

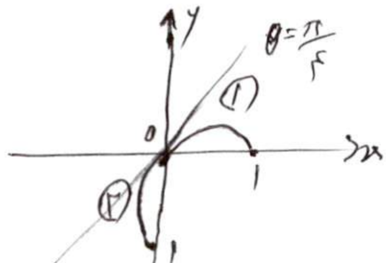


مثال ۳۱ نمودار $r=\cos 2\theta$ را رسم کنید

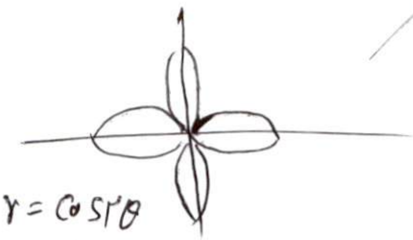
حل: با تبدیل θ به $-\theta$ معادله عوض نمی شود پس محور x ها محور تقارن منحنی است و همچنین با تبدیل θ به $\pi-\theta$ معادله عوض نمی شود پس محور y ها محور تقارن منحنی است بنابراین مبداء هم مرکز تقارن منحنی است پس کافی است که نمودار را در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ رسم می کنیم. نمودار $r=\cos 2\theta$ در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ در مختصات دکارتی r و θ به صورت زیر است



انتقال به مختصات قطبی



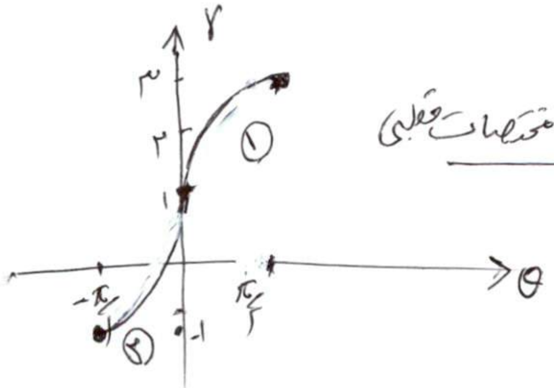
و نمودار کامل (گل چهار پر است)



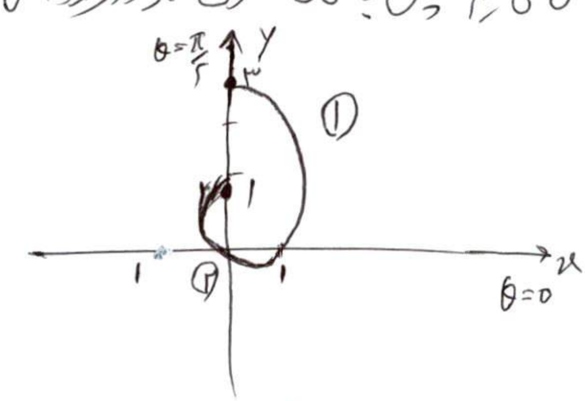
$r=\cos 2\theta$

مثال ۳۲ نمودار $r=1+2\sin\theta$ را رسم کنید.

حل: با تبدیل θ به $\pi-\theta$ معادله عوض نمی شود پس محور y ها محور تقارن منحنی است پس در فاصله $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ رسم می کنیم. نمودار دکارتی $r=1+2\sin\theta$ را در فاصله $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ رسم می کنیم و سپس آن را به مختصات قطبی منتقل می کنیم سپس با کمک تقارن نمودار را کامل می کنیم.

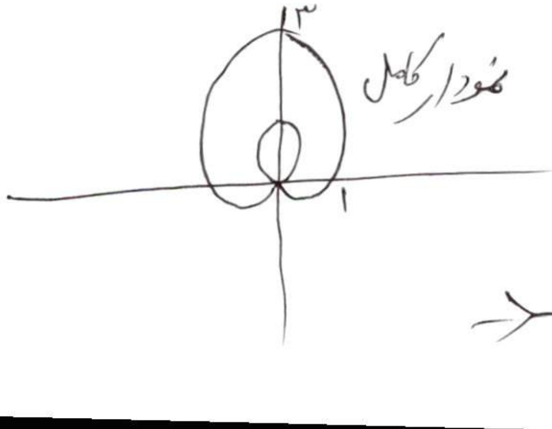


انتقال به مختصات قطبی



نمودار ① در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ و

نمودار ② در فاصله $[-\frac{\pi}{2}, 0]$



نمودار کامل

تقاطع نمودارها در مختصات قطبی

در دستگاه مختصات دکارتی برای یافتن محل تلاقی دو منحنی کافی است که معادله این دو منحنی را با هم حل کنیم (با برابر قرار دادن ضابطه آنها با هم) تا محل تلاقی بدست می آید ولی این کار در دستگاه مختصات قطبی اکثر مواقع جواب نمی دهد زیرا مختصات هر نقطه (مخصوص مختصات قطب) منحصر بفرد نیست. برای حل این مشکل دو روش زیر برای یافتن محل تلاقی دو نمودار بررسی می کنیم.

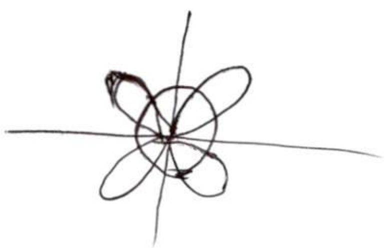
روش اول: رسم هر دو نمودار در یک دستگاه مختصات قطبی سپس محل تلاقی این دو نمودار را معین می کنیم

روش دوم: دیدیم که معادله $r=f(\theta)$ و $(-1)^n r=f(\theta+n\pi)$ برای هر $n\in\mathbb{Z}$ با هم همارز هستند (یا یکی هستند) بنابراین برای یافتن محل تلاقی دو نمودار $r=f(\theta)$ و $r=g(\theta)$ به صورت زیر عمل می کنیم:

فرض کنید که معادلات $r=f_1(\theta)$ و $r=f_2(\theta)$ و ... معادلات همارز معادله $r=f(\theta)$ باشند و به همین صورت فرض کنید که $r=g_1(\theta)$ و $r=g_2(\theta)$ و ... معادلات همارز معادله $r=g(\theta)$ باشند در این صورت از حل دستگاههای $\begin{cases} r=f(\theta) \\ r=g(\theta) \end{cases}$ و $\begin{cases} r=f(\theta) \\ r=g_j(\theta) \end{cases}$ برای هر j و $\begin{cases} r=f_i(\theta) \\ r=g(\theta) \end{cases}$ برای هر i و $\begin{cases} r=f_i(\theta) \\ r=g_j(\theta) \end{cases}$ برای هر i و برای هر j محل تلاقی دو منحنی $r=f(\theta)$ و $r=g(\theta)$ بدست می آید. همچنین قطب را جداگانه روی هر دو نمودار $r=f(\theta)$ و $r=g(\theta)$ بررسی می کنیم.

مثال ۳۳: نمودار $r=2\sin2\theta$ و $r=1$ را رسم کنید و سپس محل تلاقی این دو منحنی را بیابید.

حل: معادله $r=1$ دایره ای به شعاع یک و مرکز مبدا مختصات است و معادله $r=2\sin2\theta$ گل چهار پری باشد و هر دو در یک دستگاه مختصات قطبی رسم می کنیم. طبق شکل مقابل این دو نمودار



دارای هشت محل تلاقی است که چهار محل تلاقی از حل دستگاه $\begin{cases} r=1 \\ r=2\sin2\theta \end{cases}$ بدست می آید و چهار محل تلاقی دیگر از حل دستگاه $\begin{cases} r=-1 \\ r=2\sin2\theta \end{cases}$ بدست می آید که $r=-1$ همارز $r=1$ است. البته $r=-2\sin2\theta$ هم همارز معادله $r=2\sin2\theta$ است:

$$\begin{cases} r=1 \\ r=2\sin2\theta \end{cases} \Rightarrow 1=2\sin2\theta \Rightarrow \sin2\theta=\frac{1}{2}=\sin(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow 2\theta=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{12}, \theta=\frac{5\pi}{12}, \theta=\frac{13\pi}{12}, \theta=\frac{17\pi}{12}$$

چهار محل تلاقی عبارتند از: $(1,\frac{\pi}{12})$ و $(1,\frac{5\pi}{12})$ و $(1,\frac{13\pi}{12})$ و $(1,\frac{17\pi}{12})$

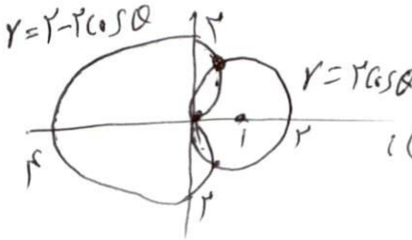
$$\begin{cases} r=-1 \\ r=2\sin2\theta \end{cases} \Rightarrow 2\sin2\theta=-1 \Rightarrow \sin2\theta=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})=\sin(\pi+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow$$

$$2\theta=\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6} \Rightarrow \theta=\frac{7\pi}{12}, \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi, \frac{23\pi}{12}$$

پس چهار نقطه دیگر عبارتند از: $(-1,\frac{7\pi}{12})$ و $(-1,\frac{11\pi}{12})$ و $(-1,\frac{19}{12}\pi)$ و $(-1,\frac{23\pi}{12})$

مثال ۳۴: مختصات محل تلاقی دو منحنی $r=2-2\cos\theta$ و $r=2\cos\theta$ را بیابید و نمودارهای آنها را رسم کنید.

حل: منحنی $r=2-2\cos\theta$ دلنما است و منحنی $r=2\cos\theta$ دایره است



طبق شکل مقابل این دو منحنی دارای ۳ محل تلاقی است که یکی از آنها قطب است. برای یافتن باقی نقاط تقاطع هر دو منحنی، هم ارزهای این دو منحنی را می‌یابیم.

معادلات های هم ارز با معادله $r=2-2\cos\theta$ عبارتند از

$$(-1)r = 2-2\cos(\pi+\theta) \Rightarrow r=-2-2\cos\theta$$

$$(-1)^2 r = 2-2\cos(2\pi+\theta) \Rightarrow r = 2-2\cos\theta$$

و معادلات هم ارز با $r=2\cos\theta$ عبارت است از

$$(-1)r = 2\cos(\theta+\pi) \Rightarrow -r=-2\cos\theta \Rightarrow r=2\cos\theta$$

یعنی معادله هم ارز با $r=2\cos\theta$ خود $r=2\cos\theta$ است پس باید با دستگاه‌های

$$\begin{cases} r=2-2\cos\theta \\ r=2\cos\theta \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} r=-2-2\cos\theta \\ r=2\cos\theta \end{cases}$$

را حل کنیم

$$\begin{cases} r=2-2\cos\theta \\ r=2\cos\theta \end{cases} \Rightarrow 2-2\cos\theta=2\cos\theta \to 4\cos\theta=2 \to \cos\theta=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \theta=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}, \ \theta=\frac{5\pi}{3} \Rightarrow \left(1,\frac{\pi}{3}\right), \left(1,\frac{5\pi}{3}\right)$$ محل تلاقی دو منحنی

$$\begin{cases} r=-2-2\cos\theta \\ r=2\cos\theta \end{cases} \Rightarrow -2-2\cos\theta=2\cos\theta \Rightarrow 4\cos\theta=-2 \Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\theta=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \left(-1,\frac{2\pi}{3}\right), \left(-1,\frac{4\pi}{3}\right)$$

اما دو نقطه $\left(-1,\frac{4\pi}{3}\right)$ و $\left(-1,\frac{2\pi}{3}\right)$ همان نقطه $\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$ و $\left(1,\frac{5\pi}{3}\right)$ است.

پس مختصات محل تلاقی این دو منحنی عبارتند از $\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$ و $\left(1,\frac{5\pi}{3}\right)$ و قطب

دلیل اینکه قطب روی هر دو منحنی است به دلیل شکل عبارت است از:

$$\left.\begin{array}{l} r=2\cos\theta=0 \to \theta=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots \\ r=2-2\cos\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=1 \Rightarrow \theta=0, 2\pi, \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow$$

قطب روی هر دو نمودار قرار دارد.

خط مماس بر منحنی های قطبی:

فرض کنید که $r=f(\theta)$ معادله یک منحنی قطبی باشد چون $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$، اگر α ضریب زاویه خط مماس بر منحنی قطبی $r=f(\theta)$ باشد در این صورت

$$\tan\alpha = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta} \qquad (1)$$

با فرض $\cos\theta \neq 0$ می‌توان صورت و مخرج کسر را بر $\cos\theta$ تقسیم کرد پس داریم

$$y' = \tan\alpha = \frac{r'\tan\theta + r}{r' - r\tan\theta} \qquad (2)$$

توجه (۱) برای یافتن مماسهای افقی نقاطی از منحنی $r = f(\theta)$ می‌یابیم که $\frac{dy}{d\theta} = 0$ به شرطی که $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$

(۲) برای یافتن مماسهای قائم نقاطی از منحنی $r = f(\theta)$ بیابیم که $\frac{dx}{d\theta} = 0$ به شرطی که $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$.

(۳) برای یافتن ضریب زاویه خط مماس در قطب باید $r = 0$ باشد یعنی در معادله (۲) $y' = \frac{r'\tan\theta}{r'} = \tan\theta$ به شرطی که $r' \neq 0$. بنابراین $\tan\alpha = \tan\theta$ بنابراین مقادیری از θ که $0 < \theta < \pi$ که در یک معادله قطبی منحنی به ازای $r = 0$ صدق می‌کنند زاویه های میل خط مماس بر منحنی در قطب هستند. پس اگر θ_1 و θ_2 و ... و θ_n جواب معادله $r = f(\theta) = 0$ باشند پس معادلات خطوط مماس بر منحنی در قطب عبارت هستند از پرتوهای

$$\theta = \theta_1 ,\ \theta = \theta_2 ,\ \dots \ \text{و}\ \theta = \theta_n .$$

مثال ۳۵: ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $r = 1 - \cos\theta$ در نقطه $P\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\pi}{4}\right)$ را بدست آورید.

حل:

$$r' = \sin\theta \rightarrow r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \left.\frac{r + r'\tan\theta}{r' - r\tan\theta}\right|_{\theta = \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

مثال ۳۶: معادله خط مماس بر منحنی های زیر را در قطب بدست آورید.

الف) $r = 1 - 2\cos\theta$ ب) $r = \sin 2\theta$

حل الف) طبق توجه (۳)

$$r = 1 - 2\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

معادله خط مماس در قطب بر منحنی $r = 1 - 2\cos\theta$ عبارت است $\theta = \frac{\pi}{3}$

ب) $r = \sin 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \Rightarrow \theta = 0 ,\ \theta = \frac{\pi}{2} ,\ \theta = \pi ,\ \theta = \frac{3\pi}{2} ,\ \theta = 2\pi$
معادلات خط مماس بر $r = \sin 2\theta$.

مثال ۳۷: الف) شیب خط مماس بر دلوار $r = 1 + \sin\theta$ در $\theta = \frac{\pi}{3}$ را پیدا کنید.

ب) نقطه هایی را روی دلوار پیدا کنید که در آنها خط مماس افقی و قائم است.

حل الف)

$$r = 1 + \sin\theta \Rightarrow r' = \cos\theta \rightarrow r'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} ,\ \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} ,\ r\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left.\frac{r + r'\tan\theta}{r' - r\tan\theta}\right|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = -1$$

ب)

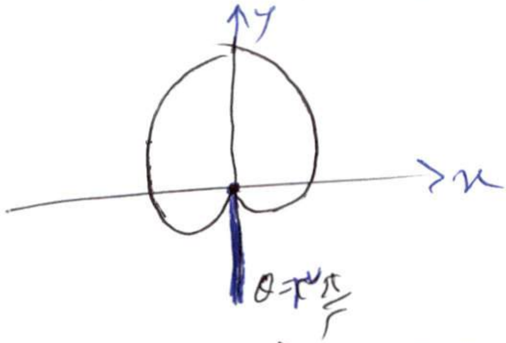
$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta\,(1+2\sin\theta)=0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{2} ، \frac{7\pi}{6} ، \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1+\cos\theta)(1-2\sin\theta)=0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} ، \frac{\pi}{6} ، \frac{5\pi}{6}$$

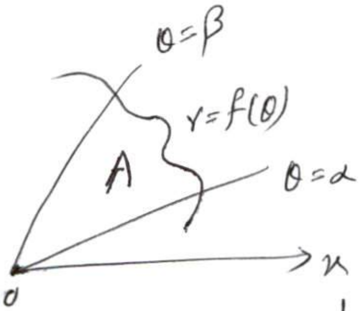
بنابراین در نقطه های $(2, \frac{\pi}{2})$ و $(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6})$ و $(\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6})$ مماس افقی وجود دارد و در نقطه $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6})$ و $(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6})$ مماس قائم هستند. وقتی که $\theta = \frac{3\pi}{2}$ هر دو $\frac{dy}{d\theta}$ و $\frac{dx}{d\theta}$ صفر هستند ولی

$$\lim_{\theta\to(\frac{3}{2}\pi)^-} \frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^-} \frac{1+2\sin\theta}{1-2\sin\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^-} \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right) \overset{\text{قانون}}{\underset{\text{هوپیتال}}{=}} \left(-\frac{1}{3}\right) \lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^-} \left(\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}\right) = +\infty$$

و به همین صورت $\lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^+} \frac{dy}{dx} = -\infty$ بنابراین در قطب مماس قائم وجود دارد (طبق شکل زیر هم معلوم است)



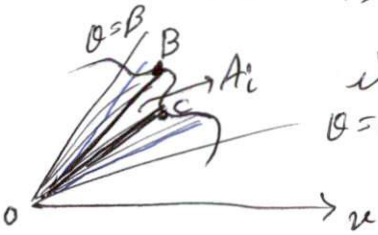
مساحت و طول قوس در مختصات قطبی



اگر A ناحیه محصور بین منحنی $r=f(\theta)$ و نیم‌خط‌های $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ باشد
در این صورت مساحت A برابر است با $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$.

زیرا: فرض کنید که P افرازی دلخواه برای $I=[\alpha, \beta]$ باشد:

$$P: [\alpha, \theta_1], [\theta_1, \theta_2], \dots, [\theta_{n-1}, \beta] \quad . \alpha \le \theta_1 \le \theta_2 \le \dots \le \theta_{n-1} \le \beta$$



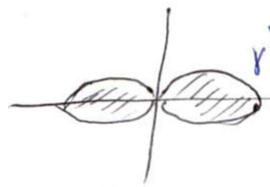
یعنی ناحیه A را با چنین قطاع تقسیم می‌کنیم فرض کنید که A_i قطاع شماره i باشد
و فرض کنید که $\gamma_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ دلخواه باشد $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$

$$A_i \text{ مساحت } = \text{مساحت قطاع } OBC = \frac{1}{2}(f(\gamma_i))^2 \Delta\theta_i$$

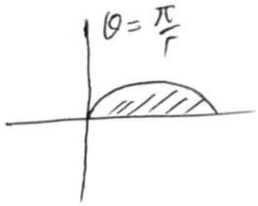
(توجه: مساحت قطاع = مساحت قسمتی از دایره به شعاع $f(\gamma_i)$ و زاویه $\Delta\theta_i$)

$$A \text{ مساحت} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(f(\gamma_i))^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$$

مثال ۳۸: مساحت ناحیه محصور به پروانه $r^2 = 2\cos\theta$ را بیابید.

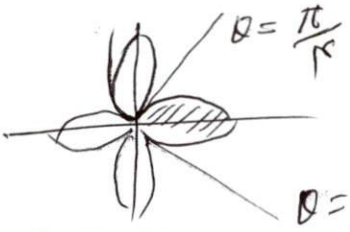


حل: ناحیه محصور بین پروانه از چهار قسمت تشکیل شده است که مساحت یک قسمت در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ را می‌یابیم و سپس آن را چهار برابر می‌کنیم.



$$\text{مساحت کل} = 4 \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\,d\theta = 4\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4$$ واحد مربع

مثال ۳۹: مساحت محصور بین یک گل برگ از منحنی $r = \cos 2\theta$ را بیابید.

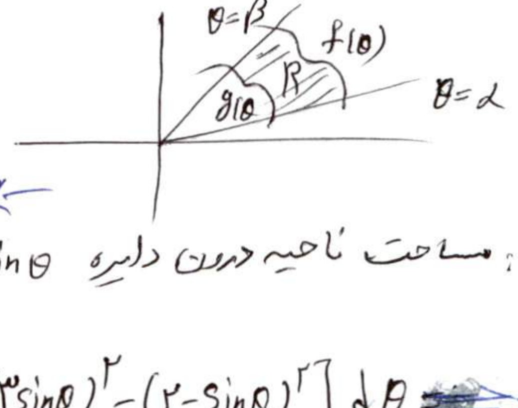


حل:
$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta\,d\theta =$$

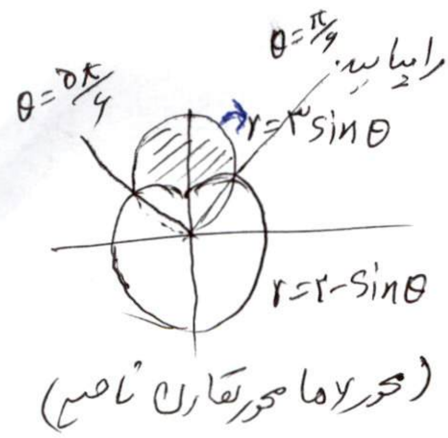
$$= \frac{1}{2}\times 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$ واحد مربع

تبصره: اگر R ناحیه محصور بین دو منحنی $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ و خطوط $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ باشد و اگر f و g روی $[\alpha, \beta]$ پیوسته باشند آنگاه $(g(\theta) < f(\theta))$

$$\text{مساحت } R = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[f^2(\theta) - g^2(\theta)\right] d\theta$$



مثال ۴۰: مساحت ناحیه درون دایره $r = 3\sin\theta$ و $r = 2 - \sin\theta$ را بیابید.



$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[(3\sin\theta)^2 - (2-\sin\theta)^2\right] d\theta \Longrightarrow$$

(محور y ها محور تقارن ناحیه) $\Longrightarrow$ $\text{مساحت} = 2\times\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left[9\sin^2\theta - (2-\sin\theta)^2\right]d\theta$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left[9\sin^2\theta - 4 - \sin^2\theta + 4\sin\theta\right]d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 8\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta - 4\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - 4\left[\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \cancel{4\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}} - 2\left[\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \cancel{4\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}} - 4\left[\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\sqrt{3}$$ واحد مربع

طول قوس منحنی قطبی و مساحت سطح دوار در مختصات قطبی

دیدیم که در مختصات دکارتی عنصر طول قوس منحنی عبارت است از $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ حال چون $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

$$(dx)^2+(dy)^2=(\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta)^2+(\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta)^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2$$

$$\Rightarrow ds=\sqrt{(dr)^2+r^2(d\theta)^2}=\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\;d\theta=\sqrt{r'^2+r^2}\;d\theta$$

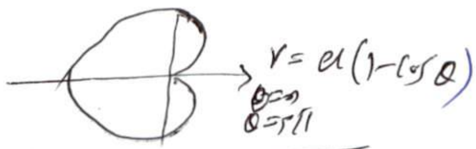
بنابراین طول قوس منحنی با معادله قطبی $r=f(\theta)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$L=\int_\alpha^\beta ds=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\;d\theta$$ در فاصله $\alpha\le\theta\le\beta$.

همچنین در مختصات دیدیم که اگر ناحیه بسته A حول یک خط مانند $y=k$ یا $x=k$ دوران کند آنگاه

$$\text{مساحت سطح دوار}=2\pi\int_\alpha^\beta \text{شعاع دوران}\times ds$$

که در آن A ناحیه بسته محصور بین $r=f(\theta)$ و $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ است.



مثال ۴۱: طول دلنمای $r=a(1-\cos\theta)$ را بیابید که $a>0$.

$$r'=a\sin\theta\Rightarrow ds=\sqrt{r'^2+r^2}\,d\theta=\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2(1-\cos\theta)^2}\,d\theta=a\sqrt2\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$$

$$L=\int_0^{2\pi}ds=a\sqrt2\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta=a\sqrt2\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2(\tfrac{\theta}{2})}\,d\theta=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

چون $\sin\frac{\theta}{2}$ در فاصله $[0,2\pi]$ مثبت است پس

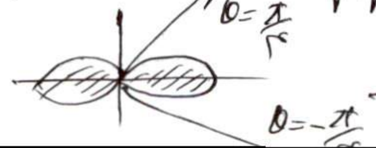
$$=2a\left[2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=8a$$

مثال ۴۲: اگر لمنیسکات $r^2=2a^2\cos2\theta$ را حول محور xها دوران می‌کند در این صورت مساحت سطح دوار عبارت است از:

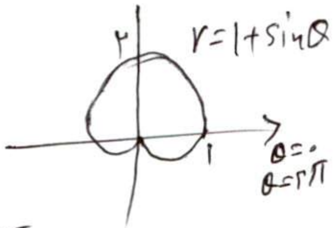
$$\text{مساحت سطح دوار}=2\pi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x\,ds=2\pi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=2\pi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\sqrt{r^4+r^2r'^2}\,d\theta$$

$$=2\pi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{4a^2\cos^22\theta+4a^2\sin^22\theta}\,d\theta=4\pi a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\,d\theta=4\pi a^2\left[\sin\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}=4\sqrt2\pi a^2$$

چون $2rr'=-2a^2\sin2\theta$ پس داریم: $r^2r'^2=4a^2\sin^22\theta$



مثال ۳۳؛ طول قوس دلنمای $r=1+\sin\theta$ را بیابید.



حل:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\sin\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2+2\sin\theta}}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\times\sqrt{2-2\sin\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\frac{|\cos\theta|}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\,d\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos\theta|}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\,d\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\,d\theta=$$

$$=4\lim\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos\theta}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\,d\theta+4\lim_{\alpha\to(\frac{\pi}{2})^+}\int_0^{\alpha}\frac{\cos\theta}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\,d\theta=$$

با توجه به انتگرال نامعین:

$$\int\frac{\cos\theta}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\,d\theta=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\sqrt{u}+C=-\sqrt{2-2\sin\theta}$$

$u=2-2\sin\theta$

$du=-2\cos\theta\,d\theta$

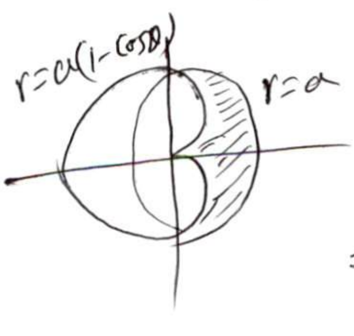
داریم:

$$=4\left[-\sqrt{2-2\sin\theta}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\lim_{\alpha\to(\frac{\pi}{2})^-}\left[-\sqrt{2-2\sin\theta}\right]_0^{\alpha}$$

$$=4\left[-\sqrt{2}+2\right]+4\left[0+\sqrt{2}\right]=8$$

تابع $2-2\sin\theta$ در $\theta=\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است و بنابراین $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\,d\theta$ ناسره است.

مثال ۳۴) مساحت ناحیه که داخل دایره $r=a$ و خارج دلنمای $r=a(1-\cos\theta)$ را حساب کنید.



$$\text{مساحت}=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[a^2-a^2(1-\cos\theta)^2\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\left[2\cos\theta-\cos^2\theta\right]d\theta=a^2\left[2\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=2a^2-\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2a^2-\frac{a^2}{4}\pi=a^2\left[2-\frac{\pi}{4}\right]$$ واحد مربع

حل برخی از معادلات مثلثاتی:

(۱) اگر $-1 \leq a \leq 1$ باشد

$$\sin x = a = \sin(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

حالت خاص:

الف) $\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \sin(0) \Rightarrow x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

ب) $\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

---

(۲) $-1 \leq a \leq 1$

$$\cos x = a = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

---

(۳) $a \in \mathbb{R}$

$$\tan x = a = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = 0 \Rightarrow \tan x = \tan 0 \Rightarrow x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

---

(۴) $a \in \mathbb{R}$

$$\cot x = a = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot x = 0 \Rightarrow \cot x = \cot \frac{\pi}{2} \Rightarrow (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$