توجه: برای بررسی اینکه یک ماتریس تحویل شده سطری است یا خیر، برای داشتن شرط (الف) با تک تک سطرهای ماتریس نگاه می‌کنیم مشخص شود سطرهای ناصفر باید اولین درایه این سطرهای ناصفر عدد 1 باشد حال این عدد 1 که اولین درایه ناصفر یک سطر است در یک ستون ماتریس قرار دارد. باید تمام درایه‌های این ستون غیر از عدد 1 تعیین شده باید صفر باشند تا شرط (ب) برقرار باشد.

قضیه ۲۳: هر ماتریس $m\times n$ دلخواه روی میدان $\mathbb{R}$ هم‌ارز سطری یک ماتریس تحویل شده سطری است. (با عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس $m\times n$ به ماتریس تحویل شده سطری می‌رسیم)

تعریف (ماتریس تحویل شده سطری پلکانی) ماتریس $m\times n$ مانند B را تحویل شده سطری پلکانی می‌نامیم هرگاه سه شرط زیر را داشته باشد:

الف) B تحویل شده سطری باشد.

ب) هر سطر B که همه درایه آن صفر است زیر همه سطرهای ناصفر B قرار گرفته باشد.

ج) اگر سطرهای شماره ۱، ۲، ...، r سطرهای غیرصفر B باشند و درایه غیرصفر مقدم سطر شماره iام (که عدد یک است) در ستون شماره k_iام قرار گیرد که $i=1,2,\dots,r$ آنگاه باید

$$k_1<k_2<\dots<k_r$$

(به عبارت دیگر عددهای یک (که مقدم سطرهای ناصفر هستند) در ماتریس B تشکیل یک پلکان دهند)

مثال ۲۵. در مثال ۲۴ ماتریس‌های R_1 و R_2 ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هستند، ولی R_3 تحویل شده سطری است ولی پلکانی نیست. کافی است در ماتریس R_3 جای دو سطر اول را عوض کنیم تا به ماتریس تحویل شده سطری پلکانی برسیم.

$$R_3=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_{12}}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad R_1=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$R_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

قضیه ۲۴: هر ماتریس $m\times n$ مانند A با یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم‌ارز سطری است (با عملیات سطری مقدماتی می‌توان از A به ماتریس تحویل شده سطری پلکانی رسید.

تبصره: در حل دستگاه معادلات خطی همگن $RX=0$ که R یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی است. اگر r تعداد سطرهای ناصفر ماتریس $R_{m\times n}$ باشد و $r<n$ (یعنی تعداد سطرهای ناصفر R کمتر از تعداد ستون های R باشد) آنگاه دستگاه $RX=0$ دارای جواب غیر بدیهی (غیرصفر) می باشد ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) است که در آن x_i ها صفر نیستند.

اگر $n=r$ آنگاه دستگاه همگن $RX=0$ فقط جواب بدیهی (صفر دارد)

بنابراین برای حل دستگاه همگن $AX=0$ کافی است که دستگاه هم ارز آن $RX=0$ را حل کنیم که در آن R ماتریس تحویل شده سطری پلکانی است.

قضیه ۲۵: اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد و $m<r$ آنگاه دستگاه معادلات خطی $AX=0$ یک جواب غیر بدیهی دارد (زیرا $r\le n<m$ که r تعداد سطرهای ناصفر R است و $A\sim R$ و R تحویل شده سطری پلکانی است)

نتیجه و خلاصه بالا: فرض کنید که $AX=0$ یک دستگاه معادلات خطی همگن m معادله و n مجهول باشد (یعنی A یک ماتریس $m\times n$ است) در این صورت

۱- اگر $m<n$ یعنی تعداد معادلات کمتر از مجهولات باشد، دستگاه $AX=0$ جواب غیر بدیهی دارد (بنابراین دستگاه همگن $AX=0$ بی نهایت جواب دارد)

۲- اگر $m\geq n$ در این صورت A به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R تبدیل می کنیم که اگر r تعداد سطرهای ناصفر R کوچکتر از n باشد ($r<n$) آنگاه طبق تبصره بالا دستگاه $AX=0$ دارای جواب غیر بدیهی است بنابراین دستگاه بی نهایت جواب دارد.

اگر $r=n$ در این صورت دستگاه $AX=0$ فقط جواب دارد و $(m-r)$ تا معادله این دستگاه ترکیب خطی از باقی معادلات هستند و در واقع این تعداد معادله در دستگاه اضافی و بی تاثیر است.

۳- اگر A ماتریسی مربعی $n\times n$ باشد اگر $A\sim I$ آنگاه دستگاه $AX=0$ فقط جواب بدیهی صفر دارد و اگر A هم ارز سطری با I نباشد آنگاه دستگاه $AX=0$ جواب غیر صفر دارد و بنابراین این دستگاه $AX=0$ بی نهایت جواب دارد. یا زبان دترمینان اگر $\det A\neq 0$ آنگاه دستگاه

همگن $AX=0$ جواب بدیهی صفر دارد و اگر $\det A = 0$ آنگاه دستگاه همگن $AX=0$ جواب ناصفر دارد یعنی بی نهایت جواب دارد

بنابراین برای دستگاه همگن $AX=0$ به سوالات طرح شده ۴ و ۵ در صفحه ۱۰ طبق نتیجه قبل جواب داده شد.

حال به سوال ۱ و ۲ و ۳ در صفحه ۱۰ یعنی حل دستگاه معادلات خطی $AX=B$ می پردازیم.

برای حل دستگاه $AX=B$ ماتریس افزوده $[A \mid B]$ را تشکیل می دهیم با عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده $[A \mid B]$ به ماتریس $[R \mid B']$ می رسیم که در آن R یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی است [البته کافی است که R یکی از ماتریس های بالامثلثی - پایین مثلثی قطری - واحد - تحویل شده سطری باشد زیرا دستگاه حل می شود] بنابراین دو دستگاه $AX=B$ و $RX=B'$ هم ارز هستند. پس دستگاه $RX=B'$ را حل می کنیم.

فرض کنید که r تعداد سطرهای ناصفر R باشد و سطرهای ناصفر R سطرهای ۱ و ۲ و ... r باشد و درایه غیر صفر مقدم سطر i ام (یعنی عدد 1) در ستون k_i ام قرار بگیرد، آنگاه معادله $RX=B'$ عملاً مجهولات x_{k_1} و x_{k_2} و ... و x_{k_r} را برحسب $(n-r)$ مجهول باقی مانده بیان می کند به شرطی که درایه های B' یعنی b'_{r+1} و b'_{r+2} و ... و b'_m همگی صفر باشند زیرا $(m-r)$ تا معادله $RX=B'$ به صورت مقابل است $0=b'_{r+1}$ و $0=b'_{r+2}$ و ... و $0=b'_m$

بنابراین شرط وجود جواب دستگاه $AX=B$ (یا $RX=B'$) این است که $\forall i>r:\ b'_i=0$

اگر این شرط برقرار باشد ها نتد حل دستگاه همگن با دادن مقادیر دلخواه به $(n-r)$ مجهول باقی مانده تمام مجهول های x_{k_1} و x_{k_2} و ... و x_{k_r} محاسبه می شود.

نتیجه و خلاصه: اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد و $AX=B$ یک دستگاه معادلات خطی باشد و R ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم ارز سطری ماتریس A باشد و r تعداد سطرهای ناصفر ماتریس R باشد و L تعداد سطرهای ناصفر ماتریس $[R \mid B']$ باشد

الف) اگر $r<L$ آنگاه دستگاه $AX=B$ ناسازگار است و دستگاه جواب ندارد.

ب) اگر $r=L$ و $n\neq L$ (توجه $L\leq n$) آنگاه دستگاه بی‌نهایت جواب دارد

ج) اگر $n=r=L$ آنگاه دستگاه $AX=B$ جواب منحصر به فرد دارد

در حالت خاص که A یک ماتریس $n\times n$ است اگر ۱) $r<L$ دستگاه جواب ندارد

۲) $r=L=n$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد

۳) $r=L<n$ دستگاه بی‌نهایت جواب دارد

مثال ۲۶: دستگاه‌های زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ 3x+y+2z=3 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ 3x+y+2z=4 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2x+2y+z=1 \\ 3x-y-z=-1 \end{cases}$

حل الف)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[-3R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

توجه: نیازی نیست که A حتما به ماتریس تحویل شده سطری پلکانی تبدیل کنیم.

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -5y-7z=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{بیشتر از تعداد معادلات}]{\text{تعداد مجهولات}}$$

$z=c$ دلخواه $\Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{7}{5}c \\ x=1-2(-\frac{7}{5}c)-3c \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-\frac{1}{5}c \\ y=-\frac{7}{5}c \\ z=c \end{cases} \quad \forall c\in\mathbb{R}$$

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

حل ب)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[-3R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow 0 \neq 1$$

دستگاه ناسازگار است بنابراین جواب ندارد

حل (ج)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \underset{-3R_1+R_3 \to R_3}{\overset{-2R_1+R_2 \to R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & -7 \end{array}\right] \overset{-2R_3+R_2 \to R_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 2 & -7 & -7 \end{array}\right] \underset{R_{23}}{\overset{\frac{1}{11}R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2y-7z=-7 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 2y=-7+7z \Longrightarrow 2y=0 \Longrightarrow y=0 \Longrightarrow x=2+y-2z=2-2=0 \Longrightarrow x=0$$

دستگاه جواب منحصر به فرد دارد

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$ جواب دستگاه

مثال ۲۷: شرطی برای وجود جواب دستگاه زیر را بیابید.

حل

$$\begin{cases} x-2y+z=a \\ 2x+y+z=b \\ 5y-z=c \end{cases} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 5 & -1 & c \end{array}\right] \overset{-2R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & -2a+b \\ 0 & 5 & -1 & c \end{array}\right]$$

$$\overset{-R_2+R_3 \to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & -2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b+c \end{array}\right] \Longrightarrow 2a-b+c=0 \Longrightarrow \boxed{2a+c=b}$$

شرط وجود جواب دستگاه

تبصره ۱۰: از روش حل دستگاه $Ax=B$ می‌توان معکوس A را یافت با مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲۸: معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ در صورت وجود بیابید.

حل: دستگاه $\begin{cases} 2y+3z=a \\ x+3y+4z=b \\ x+2y+2z=c \end{cases}$ را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & a \\ 1 & 3 & 4 & b \\ 1 & 2 & 2 & c \end{array}\right] \overset{R_{13}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & c \\ 1 & 3 & 4 & b \\ 0 & 2 & 3 & a \end{array}\right] \overset{-R_1+R_2 \to R_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & c \\ 0 & 1 & 2 & -c+b \\ 0 & 2 & 3 & a \end{array}\right] \overset{-2R_2+R_3 \to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & c \\ 0 & 1 & 2 & -c+b \\ 0 & 0 & 1 & 2c-2b+a \end{array}\right] \underset{-2R_3+R_1 \to R_1}{\overset{-2R_3+R_2 \to R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3c+4b-2a \\ 0 & 1 & 0 & -5c+4b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 2c-2b+a \end{array}\right]$$

$$\overset{-2R_2+R_1 \to R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7c-4b+2a \\ 0 & 1 & 0 & -5c+4b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 2c-2b+a \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} x=2a-4b+7c \\ y=-2a+4b-5c \\ z=a-2b+2c \end{cases} \Longrightarrow$$

چون $X=A^{-1}B$ پس داریم $\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ -2 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

در انتهای این فصل چند نمونه ماتریس خاص معرفی می‌کنیم

در این فصل تا اکنون ماتریس‌های خاص زیر را معرفی کرده‌ایم: ۱- ماتریس ترانهاده ۲- ماتریس سطری و ماتریس ستونی (بردار) ۳- ماتریس مربعی ۴- ماتریس قطری - ماتریس همانی - ماتریس بالا مثلثی و ماتریس پایین مثلثی ۵- ماتریس متقارن و ماتریس پاد متقارن ۶- ماتریس ریشه چند جمله‌ای ۷- ماتریس خودتوان ۸- ماتریس خود الحاقی (هرمیتی) ۹- ماتریس وارون ۱۰- ماتریس مقدماتی ۱۱- ماتریس تحویل شده سطری و ماتریس تحویل شده سطری پلکانی ۱۲- ماتریس الحاقی $adj(A)$

۱۳- ماتریس متعامد: ماتریس مربعی A را ماتریس متعامد نامیم اگر معکوس آن با ترانهاده آن برابر باشد یعنی $A^{-1}=A^{T}$.

قضیه ۲۶. اگر A و B دو ماتریس متعامد قابل ضرب به صورت AB باشند آنگاه AB نیز متعامد است.

اثبات:

$$(AB)(AB)^T=(AB)(B^TA^T)=A(BB^T)A^T\xlongequal{B^T=B^{-1}}AIA^T\xlongequal{A^T=A^{-1}}I$$

$$(AB)^T(AB)=(B^TA^T)(AB)=B^T(A^TA)B\xlongequal{A^T=A^{-1}}B^TIB\xlongequal{B^T=B^{-1}}I$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1}=(AB)^T$$

توجه: سه دسته مهم و شناخته شده از ماتریس‌های متعامد عبارتند از ماتریس گیون، ماتریس هلمرت و ماتریس هوس هولدر.

۱۴- ماتریس گیون: ماتریس $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ به ماتریس گیون مرتبه ۲ معروف است. این ماتریس پایه‌ای برای معرفی ماتریس‌های گیون با مرتبه‌های بالاتر است. ماتریس‌های گیون مرتبه ۳ به صورت زیر هستند

$$G_{12}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad G_{13}=\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad , \quad G_{23}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

صورت کلی ماتریس گیون $G_{rs}=G_{sr}$ مرتبه n عبارت است از یک ماتریس همانی به غیر از ۴ عضو آن که به صورت $g_{rr}=g_{ss}=\cos\theta$ و برای مقادیر $r<s$ به صورت $-g_{rs}=g_{sr}=\sin\theta$ هستند. تمام این نوع ماتریس‌ها و مضرب‌های از آنها ماتریس متعامد هستند.

۱۵- ماتریس معین نامنفی: برای معرفی ماتریس‌های معین نامنفی، باید صورت درجه دوم یک ماتریس را معرفی کنیم. صورت درجه دوم یک ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ آنگاه X^TAX را صورت درجه دوم

ماتریس A به صورت زیر عبارت است از:

$$X^TAX=\sum_i\sum_j x_i x_j a_{ij}=\sum_i x_i^2 a_{ii}+\sum_i\sum_{j\neq i} x_i x_j a_{ij} \quad (1)$$

و یا $X^TAX=\sum_i x_i^2 a_{ii}+\sum_i\sum_{j>i} x_i x_j (a_{ij}+a_{ji})$ (۲) و چنانچه ماتریس A متقارن باشد آنگاه:

$$X^TAX=\sum_i x_i^2 a_{ii}+2\sum_i\sum_{j>i} x_i x_j a_{ij} \quad (3)$$

قضیه: ماتریس A منحصر به فرد نیست، یعنی ممکن است که یک ماتریس B وجود داشته باشد بطوری که $X^TAX=X^TBX$ و در بین تمام صورت های درجه دوم یکسان تنها یک ماتریس متقارن وجود دارد.

مثال ۲۹: صورت درجه دوم ماتریس های مقابل را بیابید $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&7&6\\2&-2&5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&1.5&2.5\\4.5&7&-2\\2.5&6&5\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}1&3&2.5\\3&7&2\\2.5&2&5\end{bmatrix}$

حل: با فرض $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ داریم $X^T=[x_1\ x_2\ x_3]$:

$$X^TAX=x_1^2+7x_2^2+5x_3^2+x_1x_2(4+2)+x_1x_3(2+3)+x_2x_3(-2+6)=$$
$$=x_1^2+7x_2^2+5x_3^2+6x_1x_2+5x_1x_3+4x_2x_3$$

$$X^TBX=x_1^2+7x_2^2+5x_3^2+x_1x_2(4.5+1.5)+x_1x_3(2.5+2.5)+x_2x_3(6-2)=$$
$$=x_1^2+7x_2^2+5x_3^2+6x_1x_2+5x_1x_3+4x_2x_3$$

$$X^TCX=x_1^2+7x_2^2+5x_3^2+x_1x_2(3+3)+x_1x_3(2.5+2.5)+x_2x_3(2+2)=$$
$$=x_1^2+7x_2^2+5x_3^2+6x_1x_2+5x_1x_3+4x_2x_3$$

بدیهی است که $X^TAX=X^TBX=X^TCX$، یعنی ماتریس های متعددی وجود دارند که صورت درجه دوم آنها با هم برابرند و در بین آنها ماتریس C متقارن است.

اگر برای تمام بردارهای $X\neq 0$ رابطه $X^TAX>0$ آنگاه X^TAX را صورت درجه دوم معین مثبت گویند و ماتریس $A=A^T$ را ماتریس معین مثبت می باشد.

بطور کلی اگر برای تمام بردارهای مستقل X رابطه $X^TAX\geq 0$ برقرار باشد و برای حداقل یک بردار غیر صفر X داشته باشیم $X^TAX=0$ آنگاه X^TAX را صورت درجه دوم نیمه معین نامنفی گویند و ماتریس $A=A^T$ را ماتریس نیمه معین نامنفی می نامند.

مثال ۳۰: نشان دهید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}37&-2&-24\\-2&13&-3\\-24&-3&17\end{bmatrix}$ نیمه معین نامنفی است.

حل:

$$X^TAX=37x_1^2+13x_2^2+17x_3^2-4x_1x_2-48x_1x_3-6x_2x_3=(x_1-2x_2)^2+(6x_1-4x_3)^2+(3x_2-x_3)^2$$

ملاحظه می شود که اگر $X^T=[2\ 1\ 3]$ آنگاه $X^TAX=0$ از این رو طبق تعریف، ماتریس A ماتریس نیمه معین نامنفی است.

تمرین ۱

۱. از تساوی ماتریسی $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ x+w & 3 \end{bmatrix}$ مقادیر x و y، z و w را بدست آورید.

۲. فرض کنید که B ماتریسی دلخواه باشد، در چه شرایطی BB^T تعریف شده است

۳. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید الف) ماتریس تحویل شده سطری هم ارز با A را بیابید. ب) ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم ارز A را بیابید.

۴. معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ را بیابید.

۴. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ را به صورت $A = EFR$ بنویسید که در آن E و F ماتریس های مقدماتی و R ماتریس تحویل شده سطری پلکانی باشد.

۵. دستگاه معادلات خطی زیر را با روش عملیات سطری مقدماتی حل کنید.

الف) $\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + 3y + z = 4 \\ x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x + 3y + 4z = 5 \\ 2x - y - z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = 7 \end{cases}$

۶. تحت چه شرط یا شرایطی دستگاه زیر سازگار است.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + t = a \\ x + 5y + z - 2t = b \\ -x + 2y + 2z - 3w = c \\ 3x + y - 3z + 4w = d \end{cases}$$

۷. معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ را بیابید.

۸. دستگاه های زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 4x + y + 2z = 0 \\ 3x + 4 + z = 0 \end{cases}$

۹. مقدار دترمینان های زیر را بیابید

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

بردارها در فضای n بعدی

در ریاضی عمومی ۲ با بردارها در صفحه $\mathbb{R}^2$ و فضای $\mathbb{R}^3$ و اعمال روی بردارها مثل جمع و تفریق و ضرب اسکالر و ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو بردار و ضرب خارجی (برداری) دو بردار و ضرب سه گانه حقیقی‌ای و ضرب سه گانه برداری آشنا شده‌ایم و در این فصل دیدیم که هر ماتریس سطری و هر ماتریس ستونی یک بردار است.

در این بخش با بردارها در فضای n بعدی آشنا خواهیم شد.

تعریف: مجموعه تمام n تایی مرتب را با $\mathbb{R}^n$ نمایش می‌دهیم و $\mathbb{R}^n$ را فضای n بعدی می‌نامیم. بنابراین

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n) \mid x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}\}$$

و هر عضو $\mathbb{R}^n$ (یعنی هر n تایی) به صورت $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ را یک بردار می‌نامیم.

توجه: به جای $\mathbb{R}$ می‌توان هر میدان دیگر مانند $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{C}$ و $\mathbb{Z}_p$ برای p اول در نظر گرفت.

و بردار $(0,0,0,\dots,0)=0$ که تمام مؤلفه‌های آن صفر است را بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم.

و دو بردار A و B را مساوی نامیم و می‌نویسیم $A=B$ اگر دو بردار A و B دارای تعداد مساوی مؤلفه داشته باشند و مؤلفه‌های نظیر به نظیر A و B با هم برابر باشند.

جمع و تفریق و ضرب اسکالر در $\mathbb{R}^n$:

اگر $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ و $B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ دو بردار در $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه همانند ماتریس‌ها داریم:

$$A+B=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)$$ جمع دو بردار

$$A-B=(a_1-b_1,a_2-b_2,\dots,a_n-b_n)$$ تفریق دو بردار

$$cA=(ca_1,ca_2,\dots,ca_n)$$ دلخواه $c\in\mathbb{R}$ ضرب اسکالر

قضیه ۱: فضای $\mathbb{R}^n$ همراه با عمل دوتایی جمع بردارها یک گروه آبلی است.

یعنی: جمع دو بردار خاصیت شرکت‌پذیری دارد و عضو صفر (بردار صفر) عضو خنثی گروه است و اگر $A\in\mathbb{R}^n$ آنگاه $-A\in\mathbb{R}^n$ وجود دارد که $A+(-A)=(-A)+A=0$

و جمع برداری خاصیت جابجایی دارد.

تعریف (ضرب داخلی دو بردار): اگر $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ و $B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ دو بردار از فضای $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه ضرب داخلی این دو بردار را با $A\cdot B$ نشان می‌دهیم و

$$A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

تعریف (طول و فاصله در $\mathbb{R}^n$):

اگر $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ و $B=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ دو بردار در $\mathbb{R}^n$ باشند آنگاه، فاصله بین دو نقطه A و B در $\mathbb{R}^n$ (در واقع هر بردار در $\mathbb{R}^n$ یک نقطه است) را با $d(A,B)$ نمایش می دهیم

$$d(A,B)=\|A-B\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}$$

به عبارت دیگر $\|A-B\|=d(A,B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}$

و طول (نرم) بردار A را با $\|A\|$ نمایش می دهیم $\|A\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

و برداری که طول (نرم) آن برابر با عدد ۱ باشد را بردار یکه (واحد) می نامیم.

و اگر $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ برداری ناصفر در $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه $u=\frac{1}{\|A\|}\vec{A}$ یک بردار واحد همسو (هم جهت) با A است.

قضیه ۲ (نابرابری کوشی) اگر A و B دو بردار در $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه $|A\cdot B|\leq\|A\|\|B\|$

مثال ۱: بردارهای $e_1=(1,0,0,\ldots,0)$ و $e_2=(0,1,0,\ldots,0)$ و ... و $e_n=(0,0,\ldots,0,1)$

همگی بردارهای یکه در $\mathbb{R}^n$ هستند و برای هر $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ از $\mathbb{R}^n$ داریم.

$$A=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$$

(در فصل فضای برداری مثال ۱ از اهمیت خاصی برخوردار است)

مثال ۲: اگر $A=(2,3,4,5)$ و $B=(-1,2,0,3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^4$ باشند آنگاه، $A\cdot B$ را بیابید.

حل:

$$A\cdot B=2\times(-1)+3\times2+4\times0+5\times3=19$$

تمرین ۱) اگر $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ و $B=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ دو بردار دلخواه در $\mathbb{R}^n$ باشد نشان دهید که $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$.

۲) نشان دهید که $A\cdot B=\frac{1}{4}\|A+B\|^2-\frac{1}{4}\|A-B\|^2$