تغییر متغیرهای مثلثاتی:

اگر تابع زیر انتگرال شامل عبارت های $\sqrt{a^2-u^2}$ ، $\sqrt{u^2+a^2}$ و $\sqrt{u^2-a^2}$ باشد که در آن $a>0$ و u تابعی برحسب x است. در این صورت از تغییر متغیرهای مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم:

حالت اول: هرگاه تابع زیر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{u^2+a^2}$ باشد.

$$\sqrt{u^2+a^2} \Rightarrow \begin{cases} u = a\tan\theta & \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \\ du = a\sec^2\theta\, d\theta \\ \sqrt{u^2+a^2} = a\sec\theta \end{cases}$$

$$\sqrt{u^2+a^2} = \sqrt{(a\tan\theta)^2+a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2} = \sqrt{a^2(\tan^2\theta+1)} =$$

$$\sqrt{a^2\sec^2\theta} \underset{a>0}{=} a|\sec\theta| \underset{\left(\text{با توجه به } -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)}{=} a\sec\theta$$

* لازم به ذکر است که در این حالت می‌توان از تغییر متغیر $u=a\cot\theta$ نیز به صورت به استفاده کرد.

مثال: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = ?$

حل. با در نظر گرفتن $u=x$ ، $a=1$ داریم:

$$\begin{cases} x = \tan\theta & \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \\ dx = \sec^2\theta\, d\theta \\ \sqrt{x^2+1} = \sec\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{\tan^2\theta \times \sec\theta} = \int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\, d\theta = \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta \times \sin^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

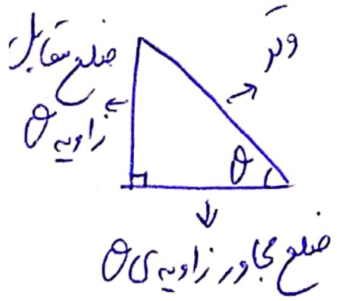
برای حل این انتگرال از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\boxed{u = \sin\theta \rightarrow du = \cos\theta \, d\theta}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta = \int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u} + C$$

$$= \frac{-1}{\sin\theta} + C$$

دقت کنید جواب نهایی شما باید برحسب x باشد. همیشه برای یافتن θ برحسب x، کافی است یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کرده و با استفاده از تغییر متغیر مثلثاتی، آن را بیابیم. به صورت زیر:

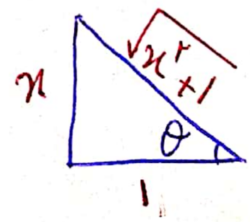


$$\frac{x}{1} = \tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{ضلع مجاور زاویه } \theta} \Rightarrow \begin{cases} \text{ضلع مقابل زاویه } \theta = x \\ \text{ضلع مجاور زاویه } \theta = 1 \end{cases}$$

از طرفی طبق قاعده‌ی مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$(\text{وتر})^2 = (\text{ضلع مقابل زاویه } \theta)^2 + (\text{ضلع مجاور زاویه } \theta)^2 \Rightarrow$$

$$(\text{وتر})^2 = x^2 + 1 \longrightarrow \text{وتر} = \sqrt{x^2+1} \rightarrow$$



$$\xrightarrow{\text{طبق شکل}} \sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{وتر}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{\sin\theta} + 1 = \frac{-1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$$

حالت دوم: هرگاه تابع زیر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{u^2-a^2}$ باشد.

$$\sqrt{u^2-a^2} \Rightarrow \begin{cases} u = a\sec\theta \qquad \theta\in[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3\pi}{2}) \\ du = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta \\ \sqrt{u^2-a^2} = a\tan\theta \end{cases}$$

* $\sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)} \underset{\text{با توجه به بازه ی } \theta}{=} a\tan\theta$

* $\sqrt{u^2-a^2} \Rightarrow u^2-a^2 \geq 0 \Rightarrow u^2 \geq a^2 \Rightarrow u \geq a$ یا $u \leq -a$

$u \geq a \Rightarrow a\sec\theta \geq a \Rightarrow \sec\theta \geq 1 \Rightarrow \boxed{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}}$

$u \leq -a \Rightarrow a\sec\theta \leq -a \Rightarrow a\sec\theta + 1 \leq 0 \Rightarrow a(\sec\theta+1) \leq 0 \xrightarrow{\boxed{a \geq 0}} \sec\theta + 1 \leq 0 \Rightarrow \sec\theta \leq -1 \Rightarrow \boxed{\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}}$

* لازم به ذکر است که در این حالت می‌توان از تغییر متغیر $u = a\csc\theta$ نیز به طور مشابه استفاده کرد.

مثال: حاصل $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ را بیابید.

حل: $u=x \ , \ a=2 \Rightarrow$

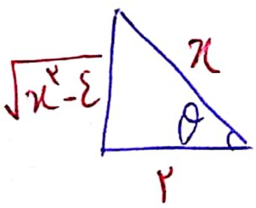
$\theta\in[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3\pi}{2})$

$$\begin{cases} x=2\sec\theta \\ dx=2\sec\theta\tan\theta\, d\theta \\ \sqrt{x^2-4}=2\tan\theta \end{cases} \Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{\cancel{2}\sec\theta\,\cancel{\tan\theta}}{\cancel{2}\,\cancel{\tan\theta}}\,d\theta$$

$$=\int\sec\theta\, d\theta$$

$= \operatorname{Ln}|\sec\theta+\tan\theta|+C$ ← توجه کنید که قبلاً این انتگرال را به طور کامل حل کرده‌ایم، به همین دلیل اینجا فقط جواب آخر را ذکر کرده‌ایم، اما شما در امتحان باید آن را به طور کامل حل کنید.

حال باید θ را برحسب x بنویسیم.



$$x=2\sec\theta \Rightarrow \frac{x}{2}=\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{2}{x}=\frac{\text{ضلع مجاور زاویه } \theta}{\text{وتر}}$$

$$\Rightarrow (\text{وتر})^2=(\text{ضلع مجاور زاویه } \theta)^2+(\text{ضلع مقابل زاویه } \theta)^2$$

$$\Rightarrow x^2=4+(\text{ضلع مقابل زاویه } \theta)^2 \Rightarrow \text{ضلع مقابل}=\sqrt{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \sec\theta=\frac{x}{2} \ , \ \tan\theta=\frac{\text{ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{ضلع مجاور زاویه } \theta}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\operatorname{Ln}|\sec\theta+\tan\theta|+C=\operatorname{Ln}\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+C$$

حالت سوم: هرگاه تابع زیر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^2-u^2}$ باشد.

$$\sqrt{a^2-u^2} \Rightarrow \begin{cases} u=a\sin\theta & (-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}) \\ du=a\cos\theta\, d\theta \\ \sqrt{a^2-u^2}=a\cos\theta \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2-u^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=a\cos\theta$$

با توجه به بازه‌ی θ

* لازم به ذکر است که در این حالت می‌توان از تغییر متغیر $u=a\cos\theta$.

مثال: حاصل $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ را بیابید.

حل: $a=1$, $u=x$.

$$\begin{cases} x=\sin\theta & -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \\ dx=\cos\theta\, d\theta \\ \sqrt{1-x^2}=\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\cos\theta\times\cos\theta\, d\theta$$

$$=\int\cos^2\theta\, d\theta$$

$$=\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int d\theta+\frac{1}{2}\int\cos 2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2\theta+c$$

$$\frac{x}{1} = \sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{وتر}} \Rightarrow \begin{cases} \text{ضلع مقابل زاویه } \theta = x \\ \text{وتر} = 1 \end{cases}$$

$$(\text{وتر})^2 = (\text{ضلع مقابل زاویه } \theta)^2 + (\text{ضلع مجاور زاویه } \theta)^2 \Rightarrow$$

$$1 = x^2 + (\text{ضلع مجاور زاویه } \theta)^2 \Rightarrow \text{ضلع مجاور زاویه } \theta = \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = x \Rightarrow \boxed{\theta = \sin^{-1} x}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta \times \cos\theta = 2 \times x \times \sqrt{1+x^2} = \boxed{2x\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2} x\sqrt{1+x^2} + C$$