قضیه ۹ (تعمیم قانون‌های توزیع‌پذیری) : فرض کنید که A یک مجموعه و $\mathcal{C} = \{B_\gamma \mid \gamma \in \mu\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد آنگاه

الف) $$A \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\mu} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\mu}(A\cap B_\gamma)$$

ب) $$A \cup \left(\bigcap_{\gamma\in\mu} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\mu}(A\cup B_\gamma)$$

اثبات: قسمت الف) در کتاب ثابت شده است بنابراین قسمت ب) را ثابت می‌کنیم.

$$x \in A\cup\left(\bigcap_{\gamma\in\mu} B_\gamma\right) \overset{\text{تعریف}}{\equiv} x\in A \ \text{یا}\ x \in \bigcap_{\gamma\in\mu} B_\gamma \overset{\text{تعریف}}{\equiv} x\in A \ \text{یا}\ (\forall \gamma\in\mu\ \ x\in B_\gamma) \overset{\text{توزیع‌پذیری}}{\equiv}$$

$$\equiv \forall\gamma\in\mu\ (x\in A \ \text{یا}\ x \in B_\gamma) \underset{\text{اشتراک خانواده}}{\overset{\text{تعریف}}{\equiv}} x \in \bigcap_{\gamma\in\mu}(A\cup B_\gamma)$$

مثال (حل تمرین ۷ کتاب) الف) مجموعه‌های زیر را به صورت اجتماع چند اشتراک بنویسید

$$(A_1\cup A_2)\cap(B_1\cup B_2\cup B_3)$$

حل: با استفاده از توزیع‌پذیری داریم:

$$(A_1\cup A_2)\cap(B_1\cup B_2\cup B_3) = [(A_1\cup A_2)\cap B_1]\cup[(A_1\cup A_2)\cap B_2]\cup[(A_1\cup A_2)\cap B_3] \overset{\text{جابجایی}}{=} [B_1\cap(A_1\cup A_2)]\cup[B_2\cap(A_1\cup A_2)]\cup[B_3\cap(A_1\cup A_2)] \overset{\text{توزیع‌پذیری}}{=}$$

$$=[(B_1\cap A_1)\cup(B_1\cap A_2)]\cup[(B_2\cap A_1)\cup(B_2\cap A_2)]\cup[(B_3\cap A_1)\cup(B_3\cap A_2)]$$

ب) مجموعه‌های $(A_1\cap A_2)\cup[B_1\cap B_2\cap B_3]$ را به صورت اشتراک چند اجتماع بنویسید.

حل:

$$(A_1\cap A_2)\cup[B_1\cap B_2\cap B_3] \overset{\text{توزیع‌پذیری}}{=} [(A_1\cap A_2)\cup B_1]\cap[(A_1\cap A_2)\cup B_2]\cap[(A_1\cap A_2)\cup B_3]$$

$$\overset{\text{جابجایی}}{=}[B_1\cup(A_1\cap A_2)]\cap[B_2\cup(A_1\cap A_2)]\cap[B_3\cup(A_1\cap A_2)] \overset{\text{توزیع‌پذیری}}{=}$$

$$[(B_1\cup A_1)\cap(B_1\cup A_2)]\cap[(B_2\cup A_1)\cap(B_2\cup A_2)]\cap[(B_3\cup A_1)\cap(B_3\cup A_2)]$$

مثال (حل تمرین ۸ کتاب) مجموعه‌های زیر را به صورت اشتراک اجتماع‌ها و اجتماع اشتراک‌ها بنویسید

الف) حل:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcup_{i=1}^{m}\left[A_i\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)\right] = \bigcup_{i=1}^{m}\left[\bigcup_{j=1}^{n}(A_i\cap B_j)\right]$$

حل ب)

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right)\cup\left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcap_{i=1}^{m}\left[A_i\cup\left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\right)\right] = \bigcap_{i=1}^{m}\left[\bigcap_{j=1}^{n}(A_i\cup B_j)\right]$$

پارادوکس راسل

در ابتدای فصل گفته شد که مجموعه یکی از مفاهیم تعریف نشده است و برای راحتی و پیشبرد کار یک تعریف از مجموعه که از کانتور بود ارائه کردیم. کانتور بعد از آنکه کارش پیرامون مجموعه‌ها به پایان رسید دید چنین پارادوکس (ضد و نقیض) در آن وجود دارد. ولی خود کتاب و مطالب آن پایه و مبانی ریاضی محسوب می‌گردد و کل کتاب زیر سوال نرفته است بلکه تعریف مجموعه نادرست بوده و با عبارت دیگر بیان مجموعه را تعریف می‌کند. یکی از این پارادوکس‌ها، پارادوکس راسل است

پارادوکس راسل می‌گوید که مجموعه همه مجموعه‌ها یا همان مجموعه جهانی وجود ندارد که در اینجا که پایان فصل مجموعه‌ها است به آن می‌پردازیم. این پارادوکس را با صورت دو لم ظاهراً متناقض بیان می‌کنیم و از آن یک قضیه نتیجه می‌گیریم.

لم ۱: فرض کنید که U مجموعه جهانی (مجموعه همه مجموعه‌ها) باشد (وجود داشته باشد) قرار می‌دهیم $R=\{S\in U \mid S\notin S\}$ آنگاه $R\notin R$.

اثبات: طبق اصل تصریح مجموعه‌ها (نوشتن مجموعه با صورت نماد ریاضی) مجموعه $R=\{S\in U \mid S\notin S\}$ وجود دارد
از برهان خلف استفاده می‌کنیم.
فرض کنید که $R\in R$؛ آنگاه طبق تعریف مجموعه R چون فرض کردیم که $R\in R$ پس R نمی‌تواند عضو مجموعه R باشد یعنی $R\notin R$ که یک تناقض با فرض خلف است پس فرض خلف باطل و حکم یعنی $R\notin R$ نتیجه می‌شود

لم ۲: فرض کنید که U مجموعه جهانی وجود داشته باشد قرار می‌دهیم $R=\{S\in U \mid S\notin S\}$ آنگاه $R\in R$.

اثبات: طبق فرض خلف، فرض کنید که $R\notin R$ بنابراین طبق تعریف مجموعه R داریم $R\in R$ که یک تناقض با فرض خلف است بنابراین $R\in R$.

قضیه ۱۰: مجموعه جهانی (مجموعه تمام مجموعه‌ها) وجود ندارد

اثبات: فرض خلف: فرض کنید که U مجموعه جهانی وجود داشته باشد بنابراین طبق لم ۱ و ۲ داریم $R\notin R$ و $R\in R$ که یک تناقض است. پس فرض خلف باطل و مجموعه جهانی وجود ندارد.

هالموس این قضیه را چنین بیان می‌کند که «هیچ چیز شامل همه چیز نیست.»

در ادامه چند تمرین از فصل مجموعه‌ها را حل می‌کنیم بخش (۲.۲) صفحه ۴۴

تمرین $\frac{6}{44}$) آیا مجموعه توانی مجموعه تهی، تهی است؟ چرا؟

حل: مجموعه توانی مجموعه ϕ یعنی $P(\phi)$ پس آن را حساب می‌کنیم:

$$P(\phi)=\{\phi\}$$

بنابراین $\phi\neq P(\phi)$ و $P(\phi)$ یک عضو دارد.

تمرین $\frac{7}{44}$) مجموعه توانی مجموعه توانی مجموعه تهی چند عضو دارد؟

حل: مجموعه توانی مجموعه توانی مجموعه تهی یعنی $P(P(\phi))$ پس آن را بدست می آوریم:

در تمرین ۶ دیدیم که $P(\phi)=\{\phi\}$ بنابراین $P(P(\phi))=\{\phi, \{\phi\}\}$

بنابراین $P(P(\phi))$ دارای ۲ عضو است.

تمرین $\frac{8}{44}$) $P(P(P(\phi)))$ را بنویسید آیا این مجموعه بیش از مجموعه $P(P(\phi))$ عضو دارد؟

حل: طبق تمرین ۷ دیدیم که $P(P(\phi))=\{\phi,\{\phi\}\}$ بنابراین مجموعه $P(P(P(\phi)))$ باید $2^2=4$ عضو داشته باشد پس تعداد اعضایش از $P(P(\phi))$ بیشتر است.

$$P(P(P(\phi)))=\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi,\{\phi\}\}\}$$

نتیجه: این سه تمرین شبیه کارتنی است که داخل آن چند کارتن خالی قرار دارد شبیه ظروف آشپزخانه (ظروف هایی که به صورت سری هستند و داخل هم قرار می گیرند)

تمرین $\frac{11}{44}$) فرض کنید که B زیرمجموعه A باشد و $P(A:B)=\{X\in P(A) \mid B\subseteq X\}$.

الف) اگر $B=\{a,b\}$ و $A=\{a,b,c,d,e\}$ آنگاه عضوهای مجموعه $P(A:B)$ را بدست آورید و تعداد آنها را تعیین کنید.

حل: روش اول:

$$P(A:B)=\{\{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,e\}, \{a,b,d,e\}, \{a,b,c,d,e\}\}$$

روش دوم: اول $P(A)$ را می نویسیم و از بین آنها عضوهای از $P(A)$ انتخاب می کنیم که شامل B باشند (یا B زیرمجموعه آنها باشند) چون $P(A)$ به تعداد $2^5=32$ عضو دارد نوشتن آن طولانی است این عضوهای $P(A)$ (که خود زیرمجموعه های A هستند) و شامل B هستند مقدار آنها $\underline{8}$ است

روش سوم: اول $P(A-B)$ بدست می آوریم چون $A-B=\{c,d,e\}$ پس

$$P(A-B)=\{\phi, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{c,d\}, \{c,e\}, \{d,e\}, \{c,d,e\}\}$$

سپس به B را به هر عضو $P(A-B)$ اضافه (گرفتن اجتماع) می کنیم تا به مجموعه $P(A:B)$ برسیم

ب) نشان دهید که $P(A)=P(A:\phi)$ (صفحه بعد)

حل (ب) با عضوگیری ثابت می‌کنیم $\forall X \in P(A) \equiv X \subseteq A \equiv \underbrace{\phi \subseteq X \subseteq A}_{*} \equiv X \in P(A:\phi)$

*) ϕ زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است پس $\phi \subseteq X \subseteq A$.

تمرین ۱۲ (ص ۳۴) A را مجموعه n عضوی و B را زیرمجموعه m عضوی از A فرض کنید ($m \leq n$)

الف) تعداد عضوهای مجموعه $P(A:B)$ را پیدا کنید.

حل: تعداد عضوهای مجموعه توانی $P(A)$ برابر با 2^n است و حال چون عضوهای $P(A:B)$ عضوهای از $P(A)$ هستند که شامل B هستند پس اگر ما تمام اعضای $P(A-B)$ را بیابیم و سپس B را با عضوهای $P(A-B)$ اضافه کنیم (یعنی اعضای B را بریزیم روی اعضای $P(A-B)$) در این صورت اعضای $P(A:B)$ بدست می‌آید (در تمرین ۱۱ قسمت الف دیدیم) بنابراین تعداد اعضای $P(A-B)$ با تعداد اعضای $P(A:B)$ بدست می‌آید یعنی تعداد اعضای $P(A:B)$ برابر 2^{n-m} است.

ب) با فرض $B=\phi$ در این صورت چون ϕ زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است پس ϕ زیرمجموعه تمام زیرمجموعه‌های A هم است یعنی ϕ زیرمجموعه اعضای $P(A)$ که خودشان زیرمجموعه A هستند هم هست پس تعداد اعضای $P(A:\phi)$ برابر با $2^{n-0}=2^n$ است زیرا تعداد اعضای $P(A)$ با $P(A)=P(A-\phi)$ برابر است.

نتیجه: از تمرین ۱۱ و ۱۲ می‌توان نتیجه گرفت که تعداد اعضای $P(A-B)$ و $P(A:B)$ با هم برابر هستند.

تمرین $\frac{5}{44}$) عضوهای مجموعه توانی مجموعه $A=\{x,\{y,z\}\}$ چه هستند آنها را بیابید.

حل

$P(A)=\{\phi,\{x\},\{\{y,z\}\},\{x,\{y,z\}\}\}$
