انتگرال گیری از توابع مثلثاتی:

- انتگرال گیری توان های زوج $\sin x$ یا $\cos x$
- انتگرال گیری توان های فرد $\sin x$ یا $\cos x$
- انتگرال گیری از توان های زوج و فرد $\sin x$ و $\cos x$

---

① انتگرال گیری توان های زوج $\sin x$ یا $\cos x$:

برای حل انتگرال هایی که در آن $\sin x$ یا $\cos x$ با توان زوج ظاهر می شوند، کافی است از روابط مثلثاتی زیر استفاده کرده و مسئله را حل نمود.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

* توجه داشته باشید، گاهی در مسائل به مواردی برمی خوریم که کمان $\sin$ یا $\cos$، به جای x، مضربی از x باشد، یعنی مثلا ax. در این صورت داریم:

$$\sin^2(ax) = \frac{1-\cos(2ax)}{2} \quad , \quad \cos^2(ax) = \frac{1+\cos(2ax)}{2}$$

مثال: حاصل انتگرال $\int \cos^4 x\,dx$ را بیابید.

حل

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x$$

یادآوری می‌کنیم:

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$\cos^2(2x) = \frac{1+\cos 4x}{2} \Rightarrow$$

$$\int \cos^2 2x\,dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\sin 4x + C$$

$$\Rightarrow \int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

$$= \frac{12}{32}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

به عنوان تمرین و به طور مشابه حاصل $\int \sin^4 x\,dx$ را بیابید.

۲) انتگرال‌گیری از توابع فرد $\sin x$ یا $\cos x$:

در این حالت سعی می‌کنیم توان فرد را به صورت توان زوج بنویسیم و در ادامه با استفاده از تغییر متغیر، مسأله را حل می‌کنیم. به عبارت بهتر داریم:

$$* \sin^3 x = \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \times \sin^1 x = (1-\cos^2 x) \times \sin x \Rightarrow \boxed{u=\cos x \to du=-\sin x\,dx}$$

$$* \cos^3 x = \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \times \cos^1 x = (1-\sin^2 x) \times \cos x \Rightarrow \boxed{u=\sin x \to du=\cos x\,dx}$$

مثال: حاصل $\int 3\cos^3 x\,dx$ را بیابید.

حل. چون توان $\cos x$ فرد است، پس طبق بالا عمل می‌کنیم:

$$\int 3\cos^3 x\,dx = 3\int \cos^3 x\,dx = 3\int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \times \cos x\,dx$$

$$= 3\int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$u=\sin x \rightsquigarrow du=\cos x\,dx$

$$= 3\int (1-u^2)\,du$$

$$= 3\int du - 3\int u^2\,du$$

$$= 3u - u^3 + C$$

$$=3\sin x-\sin^3 x+C$$

$$\Rightarrow \int 3\cos^3 x\,dx=3\sin x-\sin^3 x+C.$$

---

③ انتگرال گیری از توان های زوج و فرد $\sin x$, $\cos x$:

در واقع در این حالت، $\sin x$ و $\cos x$ با توان های زوج یا فرد در یکدیگر ضرب شده اند. صورت کلی این انتگرال ها به صورت $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ می باشند. در این انتگرال ها دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

۱- اگر حداقل یکی از m ها یا n ها فرد باشد، در این صورت با استفاده از قاعده ای که برای انتگرال گیری توان های فرد $\sin x$ یا $\cos x$، وجود داشت، مسئله را حل می کنیم.

۲- اگر m و n هر دو زوج باشند، در این صورت با استفاده از قاعده ای که برای انتگرال گیری توان های زوج $\sin x$ یا $\cos x$ وجود داشت، مسئله را حل می کنیم.

مثال: حاصل $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$ را بیابید.

حل. با توجه به این که یکی از توان ها (یعنی $\sin x$) فرد است، طبق حالت ۱ که در بالا گفته شد، مسئله را حل می کنیم.

$$\int \underbrace{\sin^3 x}_{\sin^2 x \times \sin x} \cos^2 x \, dx = \int \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \times \sin x \times \cos^2 x \, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x) \sin x \times \cos^2 x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \cos x \\ \downarrow \\ du = -\sin x \, dx \end{array}}$$

$$= \int -(1-u^2) \times u^2 \, du$$

$$= -\int (u^2 - u^4) \, du$$

$$= -\int u^2 \, du + \int u^4 \, du$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

مثال: حاصل $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ را بیابید.

حل با توجه به این که هم توان $\sin x$ و هم توان $\cos x$ زوج هستند، بنابراین طبق حالت ۲ مسئله را حل می‌کنیم.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1-\cos^2 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{٤}\int dx - \frac{1}{٤}\int \cos^{٢} ٢x \, dx$$

$$= \frac{1}{٤}x - \frac{1}{٤}\int \cos^{٢} ٢x$$

$$= \frac{1}{٤}x - \frac{1}{٤}\int \frac{1+\cos ٤x}{٢} \, dx$$

$$= \frac{1}{٤}x - \frac{1}{٤} \times \frac{1}{٢}\int (1+\cos ٤x) \, dx$$

$$= \frac{1}{٤}x - \frac{1}{٨}\int dx - \frac{1}{٨}\int \cos ٤x \, dx$$

$$= \frac{1}{٤}x - \frac{1}{٨}x - \frac{1}{٨} \times \frac{1}{٤}\sin ٤x + C$$

$$= \frac{1}{٨}x - \frac{1}{٣٢}\sin ٤x + C$$