نمایش تابع ها به شکل سری های توانی

در این بخش می خواهیم برخی تابع ها را با استفاده از عملیات مشتق گیری یا انتگرال گیری به شکل مجموع سری توانی بنویسیم
سوالی که اینجا مطرح می شود این است که چرا می خواهیم تابعی معروف را به شکل مجموعی از بی نهایت جمله بنویسیم؟ برای اینکه این استراتژی برای انتگرال گیری از تابع هایی که پاد مشتق مقدماتی ندارند ما برای حل کردن معادلات دیفرانسیل و برای تقریب زدن تابع ها با چند جمله ای ها کارسازی باشد. (مانند $\int e^{x^2}dx$)

کار را با سری هندسی زیر آغاز خواهیم کرد:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1 \qquad \boxed{1}$$

($\boxed{1}$ سری هندسی است که $a=1$ و $r=x$ که مجموع سری هندسی $\frac{a}{1-r}$)

توانستیم تابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ را به فرم سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ بنویسیم

* از روی $\boxed{1}$ می توان خیلی از تابع های دیگر را به فرم سری توانی نوشت که با ذکر مثال های زیر به آنها خواهیم پرداخت:

مثال 2. توابع زیر را به شکل سری توانی بنویسید. شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری ها را بیابید.

1) $\frac{1}{1+x^2}$

حل:

بنابراین $\frac{1}{1-x}$ قرار میدهیم. پس

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \xrightarrow[x\to -x^2]{\text{در } \boxed{1}} 1+(-x^2)+(-x^2)^2+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n} \quad x \to -x^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

توجه: 1- در مخرج باید بین عدد ثابت یک و تابع x یا (توانی از x) علامت منفی باشد

2- عدد ثابت حتماً یک باشد

بازه همگرایی بدون استفاده از آزمون نسبت (از روی تابع $\frac{1}{1-x}$)

در سری $\boxed{1}$ $|x|<1$ است در اینجا $x\to -x^2$

$\Rightarrow |-x^2|<1 \to x^2<1 \to |x|<1$

$\to -1<x<1 \Rightarrow R=\frac{1-(-1)}{2}=1$

2) $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+x} \xrightarrow[\text{مرحله 1}]{\text{عدد ثابت باید یک باشد}} \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})} \xrightarrow[\text{مرحله 2}]{\text{علامت بین منفی باید باشد}} \frac{1}{2(1-(-\frac{x}{2}))}$$

بنابر سری $\boxed{1}$ $x\to(-\frac{x}{2})$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$$

طریقه یافتن بازه همگرایی بدون استفاده از آزمون نسبت (از روی تابع $\frac{1}{1-x}$)

در $\boxed{1}$ شرط همگرایی $|x|<1$

در اینجا به جای x ← $-\frac{x}{2}$ قرار دادیم پس شرط همگرایی در اینجا $|-\frac{x}{2}|<1$ که

$|x|<2$ پس $-2<x<2$ و بازه همگرایی $(-2,2)$ است و $R=\frac{2-(-2)}{2}=2$

3) $\frac{x^3}{x+2} = x^3\times\frac{1}{x+2}$

گام 1: $\frac{1}{x+2}$ را در نظر می‌گیریم که مانند مثال 2 است

$$\frac{1}{x+2}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} \xrightarrow[\text{گام 2}]{\times x^3} \frac{x^3}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n \times x^3}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+3}}{2^{n+1}}$$

(در امتحان با ذکر جزئیات سری توانی برای $\frac{1}{2+x}$ را پیدا کنید)

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری‌های توانی

اگر بخواهیم از سری توانی به شکل $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ مشتق و انتگرال بگیریم، از هر یک از جملات سری (تک تک جملات) مشتق و انتگرال می‌گیریم.

قضیه ۲: اگر شعاع همگرایی سری توانی $\sum c_n(x-a)^n$ برابر R باشد و $R>0$، آنگاه تابع f که به شکل

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

تعریف شده است روی بازه $(a-R,a+R)$ مشتق‌پذیر (و در نتیجه پیوسته) است و

$$(i)\quad f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\dots=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

(اگر $n=0$ ← جمله عمومی سری صفر می‌شود، برای همین از یک شروع می‌شود)

$$(ii)\quad \int f(x)\,dx=C+c_0(x-a)+c_1\frac{(x-a)^2}{2}+c_2\frac{(x-a)^3}{3}+\dots=C+\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

شعاع همگرایی سری‌های توانی در (i) و (ii) هر دو R است.

توجه: وقتی از سری توانی مشتق یا انتگرال می‌گیریم شعاع همگرایی تغییری نمی‌کند اما ممکن است بازه همگرایی تغییر کند. ممکن است سری اصلی در نقطه انتهایی همگرا باشد درحالیکه سری مشتق گرفته شده در آنجا واگرا باشد.

مثال ۲۱: نمایشی برای توابع زیر به فرم سری توانی بیابید و شعاع همگرایی را بیابید.

۱) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

حل: ابتدا سری توانی تابع معروف $\dfrac{1}{1-x}$ را می‌نویسیم.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ارتباط بین $\dfrac{1}{1-x} \xrightarrow{?} \dfrac{1}{(1-x)^2}$ ← مشتق

از طرفین مشتق می‌گیریم

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\underset{n=0}{0}+\underset{n=1}{1}+2x+3x^2+\dots=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

توجه: اگر بخواهیم سری از $n=0$ شروع شود ←

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

یادآوری *

$$\sum_{k=i}^{m} a_k=\sum_{k=i+1}^{m+1} a_{k-1}$$

چون شعاع همگرایی سری $\frac{1}{1-x}$ ، $R=1$ است پس بنابر قضیه (قبل) شعاع همگرایی سری مشتق گرفته شده نیز 1 است.

2) $\ln(1-x)$

حل:

ارتباط $\ln(1-x)$ با $\frac{1}{1-x}$ ؟

از طریق مشتق امتحان می کنیم تا ارتباط بین $\ln(1-x)$ با $(1-x)$ بیابیم.

گام 1: $(\ln(1-x))' = \frac{-1}{1-x}$

سری هندسی

$$\Rightarrow (\ln(1-x))' = \frac{-1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (1)$$

مشتق باید از بین بره

انتگرال مشتق را خنثی می کند

گام 2: $\xrightarrow[\text{از طرفین رابطه فوق}]{\int}$

$$\underbrace{\int (\ln(1-x))'\,dx}_{\ln(1-x)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \boxed{1}$$

گام 3: C را باید بیابیم.

در $\boxed{1}$ $x=0$ قرار می دهیم

$$\rightarrow \underbrace{\ln(1-0)}_{\ln 1 = 0} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n+1} + C \Rightarrow \boxed{C=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$|x|<1$

$$\boxed{\begin{array}{c} -1<x<1 \\ R = \frac{1-(-1)}{2} = 1 \end{array}}$$

توجه: با توجه به حل قسمت 1 و 2 نباید به اشتباه تصور کنیم که برای هر تابعی ارتباط آن را با $\frac{1}{1-x}$ برقرار می کنیم به نکات زیر دقت کنید (قسمت های 3 و 4)

3) $\ln(1+x)$ ⟶ مشتق می گیریم

گام 1: $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

به این فرم می نویسیم

تست 14 / 95

$$\boxed{\begin{array}{l} |-x|<1 \\ \rightarrow |x|<1 \\ -1<x<1 \\ \Rightarrow R = \frac{1-(-1)}{2} = 1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \end{array}}$$

گام 2: $\xrightarrow{\text{انتگرال } \int}$

$$\int (\ln(1+x))'\,dx = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right] dx$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + C$$

گام ③ ثابت C را می‌یابیم (معمولا با $x=0$ ← $C=0$ حاصل می‌شود)

$$x=0 \rightarrow \underbrace{\ln(1+0)}_{0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (0)^{n+1}}{n+1} + C \longrightarrow \boxed{C=0}$$

$$\boxed{\Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}}$$

4) $\tan^{-1} x$

گام ۱: مشتق می‌گیریم

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

همیشه باید علامت منفی باشد $\left(\frac{1}{1-x} \right)$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x|<1$$

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \quad |-x^2|<1$$

$x^2<1$ یا $\boxed{-1<x<1}$

گام 2 $\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\int}$ $\tan^{-1} x = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right] dx$

$$\Rightarrow \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

گام 3 $\xrightarrow[x=0]{\text{یافتن } c}$ $\underbrace{\tan^{-1}(0)}_{0} = 0 + C \Rightarrow C=0$

$$\boxed{\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

شعاع همگرایی

$$R = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

یادآوری: برای برخی توابع فقط با مشتق‌گیری می‌توان به سری تابع $\frac{1}{1-x}$ و یا مشابه آن ($\frac{1}{1+x}$ ، $\frac{1}{1+x^2}$ و ...) رسید (مثال 1 قسمت اول) امّا در برخی توابع دیگر علاوه بر مشتق‌گیری، نیاز به انتگرال هم هست (مثال 2، 3، 4).

مثال $\boxed{22}$ نشان دادیم که $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (مثال 18) به ازای هر x همگراست و داریم

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n x^{n-1}}{\underbrace{n!}_{n(n-1)!}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\xrightarrow[\text{اندیس}]{\text{تغییر}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1-1}}{(n+1-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$\Leftarrow$ $f'(x)=f(x)$ (تنها تابعی که مشتقش با خودش برابر است تابع $f(x)=e^x$ است)

پس

$$\boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots}$$

* تمرین به عهده دانشجو ص 957 : 6, 7, 16, 17

سری‌های تیلور و مکلورن

در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم که کدام تابع‌ها نمایشی به شکل سری توانی دارند؟ چگونه می‌توانیم چنین نمایشی را پیدا کنیم.

قضیه: اگر f در a نمایشی (بسطی) به شکل سری توانی داشته باشد، یعنی اگر

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ $\boxed{1}$ $|x-a|<R$

آنگاه ضرایبش از دستور $c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ مشخص می‌شود

با توجه به دستور c_n می‌توان $\boxed{1}$ را به فرم زیر بازنویسی کرد که آن را سری تیلور f در a (یا حول a) می‌نامند

سری تیلور

$$\boxed{\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\\&=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots\end{aligned}}$$

توجه: اگر در سری تیلور $a=0$ آنگاه سری را سری مکلورن گوئیم یعنی

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\cdots}$$

توجه: اگر بتوان f را به شکل سری توانی حول a نمایش داد آنگاه f برابر با مجموع سری تیلورش است.

مثال[23]) سری مکلورن تابع $f(x)=e^x$ و شعاع همگرایی آن را پیدا کنید.

حل: اگر $f(x)=e^x$ مشتق از هر مرتبه‌ای برابر با e^x است یعنی $f^{(n)}(x)=e^x$

$f^{(n)}(0)=e^0=1 \Leftarrow$ برای هر n

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x \\ \Rightarrow f''(x)=e^x \cdots \Rightarrow f^{(n)}(x)=e^x \end{array}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad \text{سری مکلورن } (a=0)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^0}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

شعاع همگرایی: جمله عمومی $a_n=\frac{x^n}{n!}$ ← بنابر آزمون نسبت

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1$$

$(n+1)n!$

سری مورد نظر به ازای هر x همگرا است؛ $(-\infty,\infty)$ بازه همگرایی

و شعاع همگرایی ∞ است $(R=\infty)$

سوال: چگونه می‌توان تشخیص داد که e^x نمایشی به شکل سری توانی دارد یا خیر؟

کلی‌تر: تحت چه شرایطی تابعی برابر با مجموع سری تیلورش است؟

با قضیه زیر به سوال فوق پاسخ می‌دهیم.

> قضیه[8]: اگر $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$ که T_n چندجمله‌ای تیلور مرتبه (درجه) n ام f در a است
>
> و به ازای $|x-a|<R$ ، $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$
>
> آنگاه f روی بازه $|x-a|<R$ برابر با مجموع سری تیلورش است.

که $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1}$ همواره $0 \leq t \leq x$.

مثال 24) ثابت کنید e^x برابر با مجموع سری مک‌لورنش است.

راه‌حل: باید نشان دهیم که $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ که با قضیه فشردگی ثابت می‌کنیم

می‌دانیم که $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1}$ و $f^{(n+1)}(t) = e^t$

$$\Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^t x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\to 0 \leq |R_n(x)| \leq M \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \qquad M = \max_{0 \leq t \leq x} e^t$$

$$0 \leq \lim |R_n(x)| \leq \lim M \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

از طرفی $\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ پس بنابر قضیه فشردگی

$$\lim_{n \to \infty} |R_n(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

پس بنابر قضیه 8 $\Leftarrow$ $\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ e^x برابر است با مجموع سری مک‌لورنش

مثال 25) سری تیلور $f(x) = e^x$ در $a=2$ را پیدا کنید

حل: $f(x)$ سری تیلور = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

$f(x) = e^x$ و $f^{(n)}(x) = e^x$

پس $f^{(n)}(2) = e^2$ $\Leftarrow$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 (x-2)^n}{n!}$

مثال 26) سری مک‌لورن توابع زیر را بیابید.

1) $f(x) = e^{2x}$ و e^{x^2}

می‌دانیم که سری مک‌لورن تابع e^x برابر است با $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

اکنون برای e^{2x} $\Leftarrow$ کافی است در سری فوق به جای $x \leftarrow 2x$ بنویسیم

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} \quad \text{و} \quad e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$x \to x^2$ در سری مک‌لورن e^x

محاسبه مشتق f | محاسبه مقادیر تابع و مشتقات

2) $f(x) = \sin x$

$f(x) = \sin x$	$f(0) = \sin(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = \cos(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = -\sin(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -\cos(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$

سری مکلورن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \cdots$$

$$= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

ملاحظه می‌کنید که جملات زوج صفر هستند و جملات فرد به شکل $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ و علامت جملات فرد مثبت و منفی می‌شود ← $(-1)^n$ قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow \boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

تمرین. بازه همگرایی و شعاع همگرایی سری فوق را بیابید.

3) $f(x) = \cos x$

محاسبه مشتق | محاسبه مقدار f و مشتقات f

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = +\sin x$	$f'''(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x$	$f^{(4)}(0) = 1$

راه حل اول (مستقیم) ← از تعریف سری مکلورن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

جملات فرد صفر هستند.

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

چون جملات زوج یکی در میان مثبت و منفی هستند ← $(-1)^n$

راه‌حل دوم:

$$(\cos x) = (\sin x)' = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cancel{(2n+1)}\,x^{2n}}{\underbrace{(2n+1)!}_{\cancel{(2n+1)}\,2n!}} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

4) $f(x) = x\cos x$

حل: ابتدا سری مکلورن $\cos x$ را می‌نویسیم...

$$= x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

5) $f(x) = \sin^2 x$

با استفاده از فرمول توان‌کاهش $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

به کمک ی توان سری مکلورن تابع داده شده را یافت

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

x → $2x$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\cdots\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(+\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}-\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$$

6) $f(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ به عهده دانشجو

سری دوجمله‌ای

اگر k عدد حقیقی باشد و $|x|<1$ ، آنگاه

$$(1+x)^k=\sum_{n}^{\infty}\binom{k}{n}x^n=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\cdots$$

توجه: اگر $-1<k<0$ این سری در $x=1$ همگراست، $(-1,1]$ بازه همگرایی است و اگر $k\geq 0$ در هر دو نقطه $x=1$ و $x=-1$ همگراست و بازه همگرایی $[-1,1]$ است.

کاربرد و استفاده سری دوجمله‌ای

$\boxed{1}$ در توابع رادیکالی به فرم $\frac{1}{\sqrt{a-x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{a+x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{a-x^2}}$ ، ... $(k=\frac{-1}{2})$

$\boxed{2}$ توابع وارون مثلثاتی $\arcsin x$ و $\arccos x$ (کمان مثلثاتی الزاماً x نیست) چون $(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

توجه: در $\boxed{1}$ صورت کسر می‌تواند x ، x^2 ، ... نیز باشد مانند: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ ، $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{2+x}}$

مثال 27) سری مکلورن $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ و شعاع همگرایی اش را پیدا کنید.

حل: $f(x)$ را به شکلی می‌نویسیم که بتوانیم از سری دوجمله‌ای استفاده کنیم (یعنی k را تشخیص دهیم) که $k=\frac{-1}{2}$

* باید عدد ثابت یک باشد. پس از 4 فاکتور می‌گیریم

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}}=\frac{1}{\sqrt{4(1-\frac{x}{4})}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{4})}}$$

در سری دوجمله‌ای $(k=-\frac{1}{2}$ و $x\longrightarrow -\frac{x}{4})$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n=\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3+\cdots\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{8}x+\frac{1\times3}{2!\,8^2}x^2+\frac{1\times3\times5}{3!\,8^3}x^3+\cdots+\frac{1\times3\times5\times\cdots(2n-1)}{n!\,8^n}x^n+\cdots\right)$$

همگرایی: در سری دوجمله ای $|x|<1$ پس در اینجا $\left|-\frac{x}{4}\right|<1$ یعنی $|x|<4$

پس $-4<x<4$

شعاع همگرایی $R=\frac{4-(-4)}{2}=4$

تمرین به عهده دانشجو ص $\underline{974}$. 31 , 34 , 36 ,

ص $\underline{992}$ 13 , 26 , 40 , 42 , 44

تمرینات حل شده

۱- شعاع همگرایی و دامنه همگرایی سری توانی زیر را بیابید. (دی ۹۶)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n^2+1)}$$

گام اول آزمون نسبت $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2+1}\times\frac{n^2+1}{(x-2)^n}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1 \Rightarrow 1<x<3$$

شرط همگرایی بنا بر آزمون نسبت

$$\boxed{R=\frac{3-1}{2}=1}$$

گام دوم بررسی در نقطه $x=1$ $\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-2)^n}{n^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1} \rightarrow$ آزمون سری متناوب

$(n\geq 0)$ $b_n=\frac{1}{n^2+1}$ $b_n>0$ -1

$b_n=f(n) \rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}<0$ -2 $(x\geq0)$

>0

$\Rightarrow$ سری همگراست

پس در $x=1$ بازه بسته است.

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$ -3

$$\xrightarrow{\text{بررسی در } x=3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \longrightarrow$$ (آزمون انتگرال همگراست)

(مثال ۹ ص 12 ببینید)

در $x=3$ بازه بسته است

بازه همگرایی $[1,3]$

2- یک بسط سری توانی برای زیر حول نقطه داده شده به دست آورید (دی 98) ص 42 ص 975

1) $f(x)=\ln(1+x^2)\ ,\ \underset{\sim}{x_0}=0$ $\qquad$ 2) $g(x)=x^2 e^{-2x}\ ,\ \underset{\sim}{x_0}=0$

حل 1)

گام اول مشتق $\left(\ln(1+x^2)\right)' = \dfrac{2x}{1+x^2}$ $\boxed{1}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{x \to -x^2} \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

* ابتدا سری توانی را می نویسیم

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

علامت باید منفی باشد

$$\xrightarrow{\times 2x} \frac{2x}{1+x^2} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$$

گام دوم انتگرال از $\boxed{1}$

$$\ln(1+x^2) = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = 2\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}\right] dx$$

$$\boxed{\Rightarrow \ln(1+x^2) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}}$$

2) $g(x)=x^2 e^{-2x}$

حل: سری توانی e^x را می نویسیم

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n!}$$

$$\xrightarrow{\times x^2} x^2 e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n!} \times x^2$$

$$\boxed{\Rightarrow x^2 e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^{n+1}}$$

ت 45 سری مکلورن $\sin^{-1}x$ را بیابید

حل:

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ را می‌توان به فرم سری دوجمله‌ای نوشت

$$\xrightarrow[\text{مشتق}]{\text{گام ۱}} (\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \boxed{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$(K=-\frac{1}{2})$ در سری دوجمله‌ای به جای

$x \longrightarrow x^2$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + (-1/2)(-x^2) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}(-x^2)^2 + \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!}(-x^2)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\times 3}{2^2\, 2!}x^4 + \frac{1\times3\times5}{2^3\, 3!}x^6 + \cdots + \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\, n!}x^{2n}$$

$$\Rightarrow (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\, n!}x^{2n}$$

$$\xrightarrow[\text{انتگرال از } \boxed{1}]{\text{گام ۲}} \sin^{-1}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\, n!}x^{2n}\right]dx$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{(2n+1)2^n\, n!}x^{2n+1} + C$$

$C=?$ ($x=0$ در رابطه بالا قرار می‌دهیم)

$$\underbrace{\sin^{-1}(0)}_{0} = 0 + 0 + C \Longrightarrow C = 0$$

$$\sin^{-1}x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{(2n+1)\,2^n\, n!}x^{2n+1}$$