صفحه ۲

۴) $D_{\ln x}=(0,+\infty)$

۵) برای هر دو عدد a و b مثبت: الف) $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

ب) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ ج) $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln b$

۶) برای $x>0$ و عدد گویای r داریم: $\ln(x^r)=r\ln x$

توجه: طبق ۳، تابع $\ln x$ صعودی است زیرا $y'=\frac{1}{x}>0$ پس یک به یک و بنابراین تابع وارون دارد و وارون تابع $y=\ln x$ را با $y=\exp(x)=e^x$ نمایش می دهیم و در جلسه بعدیه آن می پردازیم.

مثال ۵) طبق خاصیت ۵ و ۶ الف) $\ln\left(\frac{(x^2+5)^4\sin x}{x^3+1}\right)$ را بسط دهید.

ب) $\ln a+\frac{1}{2}\ln b$ را به شکل یک لگاریتم بنویسید.

حل الف) $\ln\left(\frac{(x^2+5)^4\sin x}{x^3+1}\right)=\ln(x^2+5)^4+\ln\sin x-\ln(x^3+1)=4\ln(x^2+5)+\ln\sin x-\ln(x^3+1)$

ب) $\ln a+\frac{1}{2}\ln b=\ln a+\ln b^{\frac{1}{2}}=\ln(ab^{\frac{1}{2}})$

توجه: خواص های دیگر تابع لگاریتم طبیعی x

۷) الف) $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ب) $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

۸) اگر $y=\ln(u)$ (u تابعی از x است) آنگاه $y'=\frac{u'}{u}$

مثال ۶) از توابع الف) $y=\ln(\sin x)$ و ب) $y=\sqrt{\ln x}$ مشتق بگیرید.

حل: الف) $y'=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot g\, x$ ب) $y'=\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

تبصره: یکی از کاربردهای تابع $\ln x$ گرفتن مشتق از توابع جدید و توابعی است که مشتق آنها طولانی و محاسبه آن سخت است. که مراحل آن به صورت زیر است

۱) از دو طرف تابع $y=f(x)$ لگاریتم طبیعی بگیریم (با فرض $f(x)>0$) یعنی $\ln y=\ln f(x)$

۲) از $\ln y=\ln f(x)$ نسبت به x مشتق ضمنی میگیریم

۳) از تساوی بدست آمده y' را حساب می کنیم.

مثال ۷: (مثال ۱۴ صفحه ۲۳۵) اگر $y=\frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ آنگاه y' را حساب کنید.

« پایان جلسه اول »

حل ۲: الف) چون $f(x) = 2-\sin x > 0$ (زیرا $-1 \le \sin x \le 1$) پس تابع f صعودی اکید است و بنابراین معکوس دارد. طبق دستور * داریم

$f(0)=1 \Rightarrow f^{-1}(1)=0$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2-\sin 0} = \frac{1}{2}$$

ب) در مثال ۲ دیدیم که $f'(x)=3x^2 \geq 0$ پس تابع f دارای تابع وارون است.

بنابراین طبق دستور * داریم

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x-2})^2}$$

یا به عبارت دیگر

(توجه) $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}}$

($y=\sqrt[3]{x-2}$ زیرا نقش x و y عوض شدند)

مثال ۴: (تمرین ۴۱ صفحه ۴۹۰) فرض کنید که f^{-1} تابع وارون تابع f باشد و $f(4)=5$ و $f'(4)=\frac{2}{3}$ آنگاه $(f^{-1})'(5)$ را پیدا کنید.

جواب: طبق دستور * داریم

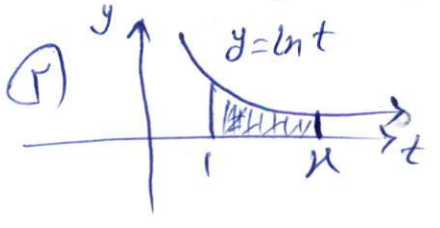
$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))} = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

توجه: در این فصل برای توابع ای که (جدید) تعریف می‌کنیم سعی می‌کنیم تمام نکات آنها هم یکجا بررسی و رعایت کنیم.

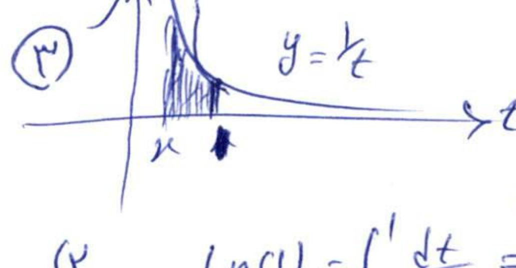
تعریف (تابع لگاریتم طبیعی) تابع لگاریتم طبیعی تابعی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$y=\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad , x>0$$

توجه: اگر $x>1$ آنگاه $\ln x$ مساحت ناحیه محصور بین محور t ها و $t=1$ و $y=\frac{1}{t}$ را نشان می‌دهد شکل (۲)



و اگر $0<x<1$ آنگاه $\ln x = -$ مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y=\frac{1}{t}$ و محور t و خطوط $t=1$ و $t=x$ شکل شماره (۳)



خواص تابع $y=\ln x$

۱) $\ln(1) = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$

۲) $y' = \frac{1}{x}$ و $y''=\frac{-1}{x^2}$

حل ۱: چون $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ پس تابع f صعودی و بنابراین یک‌به‌یک است (گام اول)

گام دوم: $y = f(x) = x^3 + 2 \Longrightarrow x^3 = y - 2 \Longrightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-2}$

گام سوم: تعویض نقش x و y یعنی $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ تابع وارون $f(x)$ است

نکته ۳: اگر تابع f دارای تابع وارون باشد و f^{-1} تابع وارون f باشد آنگاه خواص زیر برقرار است

الف) $y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$

ب) $D_f = R_{f^{-1}}$ و $R_f = D_{f^{-1}}$

ج) نمودار تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن است (یعنی نمودار f^{-1} را با قرینه کردن نمودار f نسبت به خط $y=x$ بدست می‌آید)

د) $\begin{cases} f\circ f^{-1}(x) = x \\ \forall x \in D_{f^{-1}} \end{cases}$ و $\begin{cases} f^{-1}\circ f(x) = x \\ x \in D_f \end{cases}$

۱) هر تابع صعودی دارای معکوس صعودی است و هر تابع نزولی دارای معکوس نزولی است.

۲) اگر تابع f روی بازه I یک‌به‌یک و پیوسته باشد. آنگاه تابع وارونش یعنی f^{-1} هم روی بازه I پیوسته است

۳) اگر f تابعی ~~یک~~ یک‌به‌یک و مشتق‌پذیر با تابع وارون f^{-1} باشد و $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$

آنگاه این تابع وارون یعنی f^{-1} در a مشتق‌پذیر است و

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))} \qquad (*)$$

در دستور $*$ می‌توان به جای a متغیر x قرار داد و

در این صورت $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)}$$

توجه: اگر از مشتق‌پذیری f با اطلاع باشیم با کمک مشتق ضمنی می‌توان به سادگی $(f^{-1})'(x)$ را به صورت زیر بدست آورد. از معادله $x = f(y)$ نسبت به x مشتق ضمنی می‌گیریم (y تابعی از x است) یعنی

$$f'(y)\,\frac{dy}{dx} = 1 \,.$$

بنابراین $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \,.$$

مثال ۳: الف) اگر $f(x) = 2x + \cos x$ آنگاه $(f^{-1})'(1)$ را پیدا کنید

ب) بدون محاسبه تابع وارون $f(x) = x^3 + 2$ مطلوب است محاسبه $(f^{-1})'(x)$.

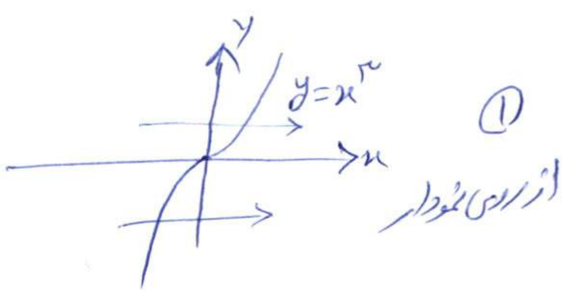
«به نام خدا»

فصل تابع وارون و نمایی و لگاریتمی و تابع‌های وارون مثلثاتی

تعریف: تابع f را یک به یک نامیم هرگاه اگر $f(x_1)=f(x_2)$ آنگاه $x_1=x_2$ یا به عبارت دیگر، اگر $x_1\neq x_2$ آنگاه $f(x_1)\neq f(x_2)$

نکته ۱: (آزمون خط افقی) تابع f یک به یک است اگر و فقط اگر هیچ خط افقی (موازی با محور xها) نمودار f را بیش از یک بار قطع نکند

نکته ۲: هر تابع یکنوا (صعودی یا نزولی) یک به یک است بنابراین اگر همواره $f'(x)>0$ یا $f'(x)<0$ آنگاه تابع f یکنوا است پس یک به یک است.



مثال ۱) تابع $f(x)=x^3$ یک به یک است

حل: چون $f'(x)=3x^2>0$ پس یک به یک است

همچنین طبق شکل ① تابع $f(x)=x^3$ یک به یک است

همچنین طبق تعریف

$$f(x_1)=x_1^3=f(x_2)=x_2^3 \Longrightarrow x_1=x_2$$

یا $x_1\neq x_2 \Longrightarrow x_1^3\neq x_2^3 \Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

تعریف: تابع یک به یک $f: A\longrightarrow B$ که A دامنه تابع f و B برد تابع f است دارای تابع وارون است و این تابع وارون را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و $f^{-1}: B\longrightarrow A$.

همچنین برای هر عضو y در B داریم $f(x)=y \Longleftrightarrow f^{-1}(y)=x$

توجه: در مثال (۱) تابع وارون $f(x)=x^3$ عبارت است از $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ زیرا

$$f^{-1}(y)=f^{-1}(x^3)=(x^3)^{\frac{1}{3}}=x$$

نکته ۳: (هشدار) $f^{-1}(x)\neq \frac{1}{f(x)}$ زیرا $\frac{1}{f(x)}=(f(x))^{-1}$ که با تابع وارون متفاوت است

نکته ۴: چگونه تابع وارون f را پیدا کنیم:

گام اول: از یک به یک بودن f مطمئن شویم. گام دوم: از معادله $y=f(x)$ مقدار x را برحسب y را پیدا می‌کنیم و با $x=f^{-1}(y)$ نشان می‌دهیم. گام سوم: در $x=f^{-1}(y)$ نقش x و y را با هم عوض می‌کنیم یعنی $y=f^{-1}(x)$

مثال ۲ تابع وارون $f(x)=x^3+2$ را پیدا کنید.