صفحه ۱ — ریاضی ۲ — «به نام خدا»

انحنا و مؤلفه های مماسی و قائم شتاب و دایره بوسان (دایره انحنا بر یک منحنی)

تعریف: منحنی C با معادله برداری $\vec{R}(t)$ را روی I هموار نامیم هرگاه $\vec{R'}(t)$ پیوسته باشد و $\vec{R'}(t) \neq 0$.
به عبارت دیگر وقتی که بردار مماس (بردار واحد مماس $\vec{T}$) روی منحنی C همواره بطور پیوسته بچرخد.

یادآوری: $\vec{V}(t) = \vec{R'}(t)$ بردار سرعت می باشد و $\vec{T}(t) = \frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|}$ بردار واحد مماس بر منحنی C در نقطه دلخواه است و $\vec{a}(t) = \vec{V'}(t) = \vec{R''}(t)$ شتاب می باشد و $s(t) = \int_0^t |\vec{V}(\theta)|\, d\theta$ تابع طول قوس منحنی C است.

تعریف: انحنای منحنی C در نقطه P از منحنی C را با κ (کاپا) نمایش می دهیم و عبارت است از

$$\boxed{\kappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|} \quad (1)$$

برای محاسبه انحنای یک منحنی فرمول های دیگری هم وجود دارد که استفاده از آن آسان تر است

محاسبه κ برحسب پارامتر زمان t

$$\boxed{\kappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \left|\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right| = \frac{|\vec{T'}(t)|}{|\vec{V}(t)|}} \quad (2)$$

مثال ۱: انحنای دایره ای با شعاع a را بیابید.

حل: اگر معادله دایره را $x^2+y^2=a^2$ در نظر بگیریم معادله برداری آن به صورت $\vec{R}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$

$$\vec{V}(t) = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} \Longrightarrow |\vec{V}(t)| = \sqrt{a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} = \sqrt{a^2} = a$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} \longrightarrow \vec{T'}(t) = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \kappa(t) = \frac{|\vec{T'}(t)|}{|\vec{V}(t)|} = \frac{1}{a}$$

بنابراین انحنای دایره ای با شعاع a عکس شعاع دایره است

دیگر فرمول های انحنای یک منحنی

قضیه: انحنای منحنی ای که معادله برداری آن $\vec{R}(t)$ است برابر با

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|\vec{V}(t) \times \vec{a}(t)|}{|\vec{V}(t)|^3}} \quad (3)$$

که معادل آن

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|\vec{R'}(t) \times \vec{R''}(t)|}{|\vec{R'}(t)|^3}} \quad (3)$$

تبصره (I): اگر C یک منحنی در صفحه باشد و معادله آن به صورت $y=f(x)$ باشد آنگاه

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad (4)$$

(II) اگر معادله C در صفحه به صورت $x=f(y)$ باشد آنگاه

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|x''|}{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad (5)$$

(III) اگر معادله C در صفحه به صورت پارامتری $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ باشد آنگاه

$$\boxed{\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad (6)$$

که در آن $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ و $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ و $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ و $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ است.

مثال ۲: انحنای منحنی C با معادله برداری $\vec{R}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$ انحنای این منحنی در $t=0$ را بیابید

حل: از فرمول (3) استفاده می کنیم

$$\vec{V}(t) = \vec{R'}(t) = \vec{i} + 2t\,\vec{j} + 3t^2\,\vec{k} \Longrightarrow |\vec{V}(t)| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{R''}(t) = 2\,\vec{j} + 6t\,\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) \times \vec{R''}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\vec{i} - 6t\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{V}(t) \times \vec{a}(t)|}{|\vec{V}(t)|^3} = \frac{\sqrt{36t^4+36t^2+4}}{(1+4t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow \kappa(0) = \frac{\sqrt{4}}{1} = 2$$

مثال ۳: الف) انحنای منحنی $y=x^2$ در نقطه (۱و۱) را بیابید

ب) انحنای بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ در نقطه $(0,b)$ را بیابید

حل: برای الف از فرمول شماره ④ یعنی $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ استفاده می‌کنیم

$y'=2x$, $y''=2$

$y'(1)=2$, $y''(1)=2$

$$K(1)=\frac{|2|}{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{5^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

برای ب از فرمول شماره ۶ استفاده می‌کنیم زیرا معادله برداری بیضی به صورت $\vec{R}(t)=a\cos t\,\vec{i}+b\sin t\,\vec{j}$ است یعنی معادله پارامتری بیضی عبارت است از: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t\end{cases}$ پس $\begin{cases} x'=-a\sin t \\ y'=b\cos t\end{cases}$ و $\begin{cases} x''=-a\cos t \\ y''=-b\sin t\end{cases}$

در نقطه $(0,b)$ مقدار t برابر $t=\frac{\pi}{2}$ است پس

$$K\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|ab|}{(a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|b|}{a^2}$$

$\begin{cases} x'(\frac{\pi}{2})=-a \quad \text{و} \quad x''(\frac{\pi}{2})=0 \\ y'(\frac{\pi}{2})=0 \quad \text{و} \quad y''(\frac{\pi}{2})=-b\end{cases}$

مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب:

می‌دانیم که $\vec{T}=\frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|}$ و $\frac{ds}{dt}=|\vec{V}(t)|$ بنابراین $\vec{V}(t)=\left(\frac{ds}{dt}\right)\cdot\vec{T}$

بنابراین بردار سرعت برحسب $\vec{T}$ نوشته می‌شود. بردار شتاب هم به صورت زیر برحسب $\vec{T}$ و $\vec{N}$ می‌نویسیم.

$$a=\vec{V}'(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{T}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}+\frac{ds}{dt}\vec{T}'(t)\xrightarrow[(3)]{\text{طبق فرمول}}\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}+K\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N}$$

زیرا $K=\frac{|\vec{T}'|}{ds/dt}$ و $\vec{N}=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$

بنابراین

$$\boxed{\vec{a}(t)=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}+K\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N}}$$

تعریف: ضریب $\vec{T}$ و ضریب $\vec{N}$ در بردار شتاب را به ترتیب مؤلفه مماسی شتاب و مؤلفه قائم شتاب می‌نامیم و با a_T و a_N نمایش می‌دهیم پس

$$\boxed{a_T=\frac{d^2s}{dt^2}} \quad \text{و} \quad \boxed{a_N=K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}$$

و $K=\frac{a_N}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}$ یا $\boxed{K=\frac{a_N}{|\vec{V}|^2}}$ (۷) فرمول دیگری برای محاسبه انحنا است.

مثال ۴: در مثال ۲ یعنی $\vec{R}(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$ مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب را بدست آورید.

حل: می‌دانیم که $\frac{ds}{dt}=|\vec{V}(t)|=\sqrt{1+4t^2+9t^4}$ پس

$$a_T=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{8t+36t^3}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$$

چون $K(t) = \frac{\sqrt{36t^4+36t^2+4}}{(1+4t^2+9t^4)^{\frac32}}$ بنابراین $a_N = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot K = (1+4t^2+9t^4) \times \frac{\sqrt{36t^4+36t^2+4}}{(1+4t^2+9t^4)^{\frac32}}$

و بنابراین

$$a_N = \sqrt{\frac{36t^4+36t^2+4}{1+4t^2+9t^4}}$$

مثال ۵: مؤلفه های مماسی و قائم منحنی C که معادله برداری $\vec{R}(t) = t^2\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{K}$ را بیابید.

حل:

$\vec{V}(t) = 2t\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{K} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = |\vec{V}(t)| = \sqrt{8t^2+9t^4} \Rightarrow a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{16t+36t^3}{2\sqrt{8t^2+9t^4}} = \frac{8t+18t^3}{\sqrt{8t^2+9t^4}}$

$\vec{a}(t) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 6t\vec{K} \Rightarrow |\vec{a}(t)| = \sqrt{8+36t^2}$

چون محاسبه K طولانی است از نکته زیر برای محاسبه a_N استفاده می‌کنیم

نکته: $|\vec{a}|^2 = |a_T|^2 + |a_N|^2$ بنابراین $a_N = \sqrt{|a|^2 - |a_T|^2}$

پس

$$a_N = \sqrt{8+36t^2 - \frac{(8t+18t^3)^2}{8t^2+9t^4}} = \dots = \frac{6\sqrt{2}\, t^2}{\sqrt{8t^2+9t^4}}$$

معادله دایره بوسان (دایره انحنا)

تعریف: بر هر منحنی هموار C در نقطه P روی منحنی C همواره دو دایره به شعاع $\rho = \frac{1}{K}$ مماس است.
دایره‌ای که مرکزش در طرف تقعر منحنی C قرار دارد و بر منحنی C در نقطه P مماس است و شعاع آن $\rho = \frac{1}{K}$ است
را دایره بوسان (دایره انحنا) بر منحنی C در نقطه P می‌نامیم.

یافتن معادله دایره بوسان: فرض کنید که مرکز دایره بوسان (x_c, y_c) باشد در این صورت معادله دایره بوسان

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = \left(\frac{1}{K}\right)^2$$

پس کافی است که انحنای منحنی C در نقطه داده شده را پیدا کنیم و مرکز دایره انحنا که در طرف تقعر منحنی C قرار دارد (یعنی
روی خط قائم بر منحنی C در نقطه P قرار دارد) را پیدا کنیم.

مثال ۶: معادله دایره بوسان بر منحنی $y=x^2$ در نقطه $(1,1)$ را بیابید.

حل: در مثال ۳ دیدیم که $K = \frac{2}{5\sqrt{5}}$ پس شعاع دایره انحنا $\rho = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ است و چون $y'(1) = 2$
پس خط قائم در نقطه $(1,1)$ عبارت است از $y-1 = -\frac{1}{2}(x-1)$ حال مرکز دایره انحنا روی این خط
قرار دارد پس $y_c - 1 = -\frac{1}{2}(x_c-1)$ (1) از طرفی $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2 = \frac{125}{4}$ پس $(1-x_c)^2+(1-y_c)^2 = \frac{125}{4}$ (2)

دو معادله (1) و (2) را باهم حل می‌کنیم بنابراین داریم (با جایگذاری (1) در (2))

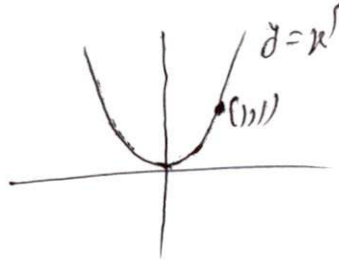
$(1-x_c)^2 + \frac{1}{4}(1-x_c)^2 = \frac{125}{4}$

$\frac{5}{4}(1-x_c)^2 = \frac{125}{4} \Rightarrow (1-x_c)^2 = 25$

$1-x_c = 5 \to x_c = -4 \to y_c = 1+\frac{5}{2} = \frac{7}{2}$

$1-x_c = -5 \to x_c = 6 \to y_c = 1-\frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$

نقطه $(6, -\frac{3}{2})$ به عنوان مرکز دایره قابل قبول نیست چون در طرف تقعر منحنی $y=x^2$ در $(1,1)$ نیست پس مرکز $(-4, \frac{7}{2})$



است یعنی معادله دایره بوسان عبارت است از

$$(x+4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$$

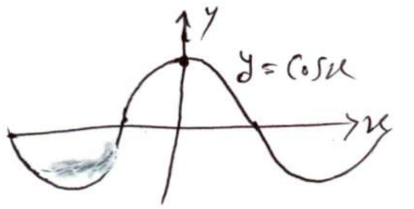
مثال ۷: معادله دایره بوسان بر منحنی $y=\cos x$ در $x=0$ را بیابید.

حل: اول انحنای $y=\cos x$ را در نقطه $(1,0)$ ما حساب می‌کنیم.

$y'=-\sin x$ و $y''=-\cos x$

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow K(0,1)=\frac{|-1|}{(1+0^2)}=1 \rightarrow \rho=\frac{1}{K}=1$$ شعاع دایره بوسان

حال چون $y'(0)=0$ پس خط قائم بر منحنی $y=\cos x$ در نقطه $(0,1)$ خط $x=0$ (یعنی محور yها) است.



پس مرکز دایره انحنا (بوسان) $(0,0)$ است زیرا روی محور yها از نقطه $(0,1)$ یک واحد به سمت تقعر (پایین می‌آییم) پس معادله دایره بوسان عبارت است از

$$(x-0)^2+(y-0)^2=1$$

$$\boxed{x^2+y^2=1}$$

توجه: در کتاب استوارت صفحه ۱۱۰۰ برای a_T و a_N فرمول زیر آمده است می‌توان از آن برای محاسبه a_T و a_N از آن استفاده کرد ($v=\frac{ds}{dt}=|\vec{r}'(t)|$ = اندازه سرعت = تندی)

$$\boxed{a_T=\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}=\frac{r'(t)\cdot r''(t)}{|r'(t)|}} \quad \text{و} \quad \boxed{a_N=Kv^2=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|}}$$

در a_T از ضرب داخلی و در a_N از ضرب خارجی استفاده شده است