حل تعدادی از تمرین های فصل اول منطق مقدماتی (۸ تمرین) مبانی ریاضی

۱- (تمرین ۱۱ بخش ۲-۱ صفحه ۱۸) قوانین جذب زیر را هم به کمک جدول ارزشی و هم به کمک استدلال قیاسی ثابت کنید:

الف) $p\wedge(p\vee r)\equiv p$ ب) $p\vee(p\wedge q)\equiv p$

حل: جدول ارزشی:

الف

p	r	$p\vee r$	$p\wedge(p\vee r)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

هم ارز هستند

ب

p	q	$(p\wedge q)$	$p\vee(p\wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

هم ارز هستند

استدلال قیاسی: الف)

$$p\wedge(p\vee r)\overset{\text{توزیع پذیری}}{\equiv}\underset{p\wedge p=p}{(p\wedge p)}\vee(p\wedge r)\underset{p\wedge r\Rightarrow p}{\overset{\text{قانون اختصار و خودتوانی}}{\Longrightarrow}}p\vee p\underset{\text{خودتوانی}}{\equiv}p \quad (1)$$

$$p\underset{\text{جمع}}{\overset{\text{قانون}}{\Longrightarrow}}p\vee(p\wedge r)\underset{\text{پذیری}}{\overset{\text{توزیع}}{\equiv}}(p\vee p)\wedge(p\vee r)\underset{p\vee p=p}{\overset{\text{خودتوانی}}{\equiv}}p\wedge(p\vee r)$$

(1) اضافه کردن $(p\wedge r)$

(1) و (2) نتیجه می دهد:

$$p\wedge(p\vee r)\equiv p$$

ب):

$$(1)\ p\wedge(p\vee q)\underset{\text{اختصار}}{\overset{\text{قانون}}{\Longrightarrow}}p$$

$$(2)\ p\underset{\text{جمع}}{\overset{\text{قانون}}{\Longrightarrow}}p\vee(p\wedge q)\equiv(p\vee p)\wedge(p\vee q)\overset{\text{خودتوانی}}{\equiv}p\wedge(p\vee q)$$

$$(1),(2)\Longrightarrow p\wedge(p\vee q)\equiv p$$

۲- (تمرین ۱۷ صفحه ۱۹) ثابت کنید که $(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)$ هم‌ارز منطقی گزاره $(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$ است.

اثبات:

$$(p\vee q)\wedge(\sim q\vee\sim p)\underset{\text{پذیری}}{\overset{\text{توزیع}}{\equiv}}[(p\vee q)\wedge\sim q]\vee[(p\vee q)\wedge\sim p]\underset{\text{جابجایی}}{\equiv}$$

$$[\sim p\wedge(p\vee q)]\vee[\sim p\wedge(p\vee q)]\underset{\text{پذیری}}{\overset{\text{توزیع}}{\equiv}}[(\sim p\wedge p)\vee(\sim p\vee q)]\vee[(\sim p\wedge p)\vee(\sim p\wedge q)]$$

$$\equiv[c\vee(\sim p\vee q)]\vee[c\vee(\sim p\wedge q)]\underset{\text{(الف)}}{\overset{\text{قضیه ۲}}{\equiv}}(\sim p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)$$

۳- (تمرین ۱۱ و ۱۲ بخش ۱.۵ صفحه ۳۴) به روش استدلال قیاسی ثابت کنید که

۱) $[(p\to q)\wedge(p\to \sim q)]\Leftrightarrow \sim p$ ‏ ‏ ۲) $[(p\to q)\vee(p\to r)]\Leftrightarrow[p\to(q\vee r)]$

حل ۱) $[(p\to q)\wedge(p\to\sim q)] \underset{\text{تعریف}}{\equiv} (q\vee\sim p)\wedge(\sim q\vee\sim p) \underset{\text{جابجایی}}{\equiv} (\sim p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)$

$\underset{\text{توزیع پذیری}}{\equiv}[\sim p\vee(q\wedge\sim q)]\equiv\sim p\vee C\equiv\sim p$

حل ۲) $[(p\to q)\vee(p\to r)] \underset{\text{تعریف}}{\equiv}[(q\vee\sim p)\vee(r\vee\sim p)] \underset{\text{جابجایی و شرکت پذیری}}{\equiv}[(\sim p\vee\sim p)\vee(q\vee r)]$

$\underset{\text{خودتوانی}}{\equiv}[\sim p\vee(q\vee r)]\underset{\text{تعریف}}{\equiv}[p\to(q\vee r)]$

۴- (تمرین ۸ صفحه ۴۶ بخش ۱.۶) ثابت کنید که

$\sim[\exists x(\sim q(x))]\equiv\forall x(q(x))$ و $\sim[\forall x(\sim q(x))]\equiv\exists x(q(x))$

حل: کافی است از نقیض سورها استفاده کنیم.

$\sim[\exists x(\sim q(x))]\equiv\forall x\sim(\sim q(x))\equiv\forall x(q(x))$

$\sim(\forall x(\sim q(x)))\equiv\exists x\sim(\sim q(x))\equiv\exists x(q(x))$

۵- (تمرین ۳ بخش ۱.۸ صفحه ۳۵) با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n

$C(n,0)+C(n,1)+\dots+C(n,n)=2^n$

حل: شروع استقرای ریاضی $n=1$ طرف راست $1=2^0=1=\frac{1}{1!}=\frac{1!}{0!(1-0)!}=C(1,0)$ طرف چپ

فرض استقرای ریاضی $n=k$ فرض کنید که برای هر عدد طبیعی کوچکتر از k داشته باشیم:

$C(k,0)+C(k,1)+\dots+C(k,k)=2^k$

حکم استقرای ریاضی: $n=k+1$ نشان میدهیم که

$C(k+1,0)+C(k+1,1)+\dots+C(k+1,k+1)=2^{k+1}$

$C(k+1,0)+C(k+1,1)+\dots+C(k+1,k+1)=[C(k,0)+\underbrace{C(k,-1)}_{0}]+[C(k,1)+C(k,0)]$

$+\dots+[\underbrace{C(k,k+1)}_{0}+C(k,k)]=[2C(k,0)]+2C(k,1)+\dots+2C(k,k)=$

$\underset{\text{طبق فرض استقرای ریاضی}}{=}2\times2^n=2^{n+1}$

پس طبق اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی n ...

داریم: $C(k,0)+C(k,1)+\dots+C(k,k)=2^n$

۶- (تمرین ۵ صفحه ۴۵) با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n

$$1\times2+2\times3+\dots+r(r+1)+\dots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: شروع استقرای ریاضی $n=1$ طرف چپ $1\times2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=1\times2$ طرف راست است

فرض استقرای ریاضی: فرض کنید که $n=k$ یعنی برای k داریم

$$1\times2+2\times3+\dots+r(r+1)+\dots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

حکم استقرای ریاضی: $n=k+1$ نشان می‌دهیم که

$$1\times2+2\times3+\dots+r(r+1)+\dots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$\underbrace{[1\times2+2\times3+\dots+r(r+1)+\dots+k(k+1)]}_{\text{طبق فرض استقرای ریاضی}}+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}\overset{\text{فاکتورگیری}}{=}\frac{(k+1)(k+2)[k+3]}{3}$$ طرف دوم حکم

پس طبق اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی n حکم برقرار است

۷- (تمرین ۱۰ صفحه ۴۵) ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

حل در روش استقرای ریاضی روی n: شروع استقرای ریاضی $n=1$

طرف چپ $\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ طرف راست

فرض استقرای ریاضی: فرض کنید که $(n=k)$ برای k داریم

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

حکم استقرای ریاضی: نشان می‌دهیم برای $n=k+1$:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+1+1}=\frac{k+1}{k+2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}}_{\text{طبق فرض استقرای ریاضی}}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$ طرف دوم

پس طبق اصل استقرای ریاضی حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است

۸- (تمرین ۱۳ صفحه ۳۶) ثابت کنید که اگر k یک عدد طبیعی ثابت باشد آنگاه برای تمام اعداد طبیعی n:

$$1\times2\times3\times\cdots\times k + 2\times3\times\cdots\times(k+1) + \cdots + n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1) = \frac{1}{k+1}\, n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)$$

حل: توجه تمرین ۵ صفحه ۳۵ حالت خاص تمرین ۸ است زیرا با فرض $k=2$ نتیجه حاصل می‌شود

شروع استقرای ریاضی $n=1$:

$$\text{طرف چپ} = 1\times2\times3\times\cdots\times k = \frac{1}{\cancel{k+1}}[1\times2\times3\times\cdots\times k\times\cancel{(k+1)}] = 1\times2\times\cdots\times k$$

طرف دوم

فرض استقرای ریاضی: $n=m$ فرض کنید حکم برای $n=m$ داشته باشیم

$$1\times2\times3\times\cdots\times k + 2\times3\times\cdots\times(k+1) + \cdots + m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1) = \frac{1}{k+1}\, m(m+1)\cdots(m+k)$$

حکم استقرای ریاضی $n=m+1$ نشان می‌دهیم

$$1\times2\times\cdots\times k + 2\times3\times\cdots\times(k+1) + \cdots + m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1) + (m+1)(m+2)\cdots(m+k) = \frac{1}{k+1}[(m+1)(m+2)\cdots(m+1+k)]$$

$$\text{طرف اول حکم} = \underbrace{1\times2\times3\times\cdots\times k + 2\times3\times4\times\cdots\times(k+1) + \cdots + m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1)}_{\text{طبق فرض استقرای ریاضی}} + (m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+k) = \frac{1}{k+1}[m(m+1)(m+2)\cdots(m+k)] +$$

$$+ (m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+k) = \frac{m(m+1)(m+2)\cdots(m+k) + (k+1)(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}{k+1}$$

$$\overset{\text{فاکتور گیری}}{=} \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)\,[m+k+1]}{k+1} = \frac{1}{k+1}[(m+1)(m+2)\cdots(m+1+k)]$$

طرف دوم

توضیح: در تمرین ۱۳ می‌توان $k=3$ و $k=4$ و $k=5$ و ... قرار داد یعنی برای مثال

$$k=3 \Rightarrow 1\times2\times3 + 2\times3\times4 + 3\times4\times5 + \cdots + n(n+1)(n+2)\cdots(n+2) = \frac{1}{4}\, n\times(n+1)\times\cdots(n+3)$$

$$k=4 \Rightarrow 1\times2\times3\times4 + 2\times3\times4\times5 + \cdots + n(n+1)(n+2)\cdots(n+3) = \frac{1}{5}\, n(n+1)\times\cdots\times(n+4)$$

$$n=5 \Rightarrow 1\times2\times3\times4\times5 + 2\times3\times4\times5\times6 + \cdots + n(n+1)(n+2)\cdots(n+4) = \frac{1}{6}\, n(n+1)\cdots(n+5)$$