تابع نمایی طبیعی

با توجه به اینکه تابع $\ln x$ یک تابع صعودی است پس یک به یک است و تابع وارون دارد که آن را تابع نمایی می نامند و فعلاً با $\exp x$ نمایش می دهیم. بنابر تعریف تابع وارون:

$$\boxed{\exp(x)=y \iff \ln y = x} \qquad \boxed{1}$$

تساوی خنثی کننده $\boxed{2}$

$$\boxed{\exp(\ln x)=x\ ,\ \ln(\exp(x))=x}$$

توجه 1:

$$\exp(0)=1 \longleftrightarrow \ln 1=0$$
$$\exp(1)=e \longleftrightarrow \ln e=1$$

توجه 2: برای هر عدد گویای r

$$\exp(r)=e^r$$

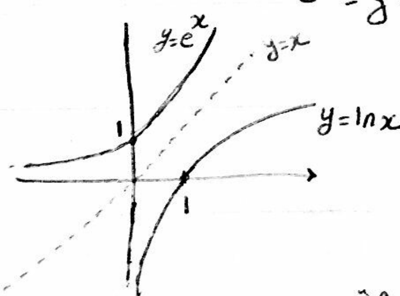
توجه 3: اگر $f, g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابعی پیوسته باشند در این صورت اگر f و g روی $\mathbb{Q}$ (اعداد گویا) با هم برابر باشند آنگاه f و g روی $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) هم برابرند.

بنابر توجه 3 می توان تعریف کرد $\boxed{e^x=\exp(x)}$

از هم اکنون به جای نماد $\exp(x)$ از e^x استفاده می کنیم لذا رابطه $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$e^x=y \iff \ln y = x \qquad \boxed{3}$$

نمودار تابع e^x



ویژگی های تابع نمایی با توجه به نمودار: تابع نمایی $f(x)=e^x$ تابعی پیوسته با دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(0,+\infty)$ است.

$$\boxed{\begin{array}{ll} i)\ e^x>0 & \forall x \text{ برای هر} \\ ii)\ \lim_{x\to -\infty} e^x = 0\ , & \lim_{x\to +\infty} e^x=+\infty \end{array}}$$

در نتیجه محور x مجانب افقی $f(x)=e^x$ است

تساوی خنثی کننده

به دلیل اینکه دامنه $\ln$

$$e^{\ln x}=x \qquad x>0 \qquad \boxed{4}$$

$$\ln(e^x)=x \quad \text{به دلیل دامنه } e^x \quad \forall x \text{ برای هر} \qquad \boxed{5}$$

قاعده های نماها (x و y اعداد حقیقی و r عدد گویا)

$$\boxed{\text{i)}\ e^{x+y}=e^x e^y \qquad \text{ii)}\ e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y} \qquad \text{iii)}\ (e^x)^r=e^{rx}}$$

مثال - معادله $e^{5-3x}=10$ را حل کنید

حل: باید x را بیابیم پس از دو طرف معادله ln می گیریم بنابر $\boxed{5}$ عمل می کنیم

$$e^{5-3x}=10 \xrightarrow{\ln} \ln(e^{5-3x})=\ln 10$$

$$5-3x=\ln 10 \Rightarrow -3x=\ln 10-5 \xrightarrow{\div(-3)}$$

$$\boxed{x=\frac{1}{3}(5-\ln 10)}$$

توجه: در حل معادله (نامعادله) از تساوی های خنثی کننده $\boxed{4}$ و $\boxed{5}$ استفاده می کنیم. اگر ln بود از طرفین e می گیریم و اگر e بود از طرفین ln می گیریم

$$\ln x=5 \xrightarrow{e} e^{\ln x}=e^5 \Rightarrow x=e^5$$

مشتق گیری از تابع نمایی طبیعی

$$\boxed{(e^x)'=e^x \quad \text{یا} \quad \frac{d}{dx}(e^x)=e^x}$$

توجه: ویژگی جالب تابع e^x این است که هر چند بار مشتق گیری اثری بر آن ندارد، در واقع مشتق از هر مرتبه ای با خودش برابر است.

مشتق e^u اگر u تابعی از x باشد

$$\boxed{(e^u)'=u'e^u}$$

مثال مشتق $y=e^{-4x}\sin 5x$ را بیابید.

حل: بنابر قاعده ضرب $(fg)'=f'g+g'f$

مشتق

$$(e^{-4x}\sin 5x)'=(e^{-4x})'\sin 5x+(\sin 5x)'(e^{-4x})$$

$$=-4e^{-4x}\sin 5x+5\cos 5x\, e^{-4x}$$

$$=e^{-4x}(-4\sin 5x+5\cos 5x)$$

$(e^u)'=u'e^u$

$(e^{-4x})'=-4e^{-4x}$

فاکتور از e^{-4x}

مثال: ماکسیمم مطلق تابع $f(x)=xe^{-x}$ را بیابید.

حل: ابتدا نقاط بحرانی را یابیم پس مشتق می گیریم

$$f'(x)=(xe^{-x})'=(x)'e^{-x}+(e^{-x})'x$$

$$=e^{-x}-xe^{-x}=\underbrace{e^{-x}}_{>0}(1-x) \rightarrow f'(x)=0$$

اگر $1-x=0 \Leftarrow x=1$ (اگر $1-x=0$ آنگاه $x=1$)

$x=1$ تنها نقطه بحرانی تابع است.

	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		+		−	

بنابر آزمون مشتق اول برای اکسترمم مطلق

در $x=1$ اکسترمم مطلق دارد $f(1)=1\times e^{-1}=\frac{1}{e}$ (وقتی تابع یک نقطه بحرانی دارد اکسترمم نسبی استفاده دارد اکسترمم مطلق است)

مثال $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ را پیدا کنید

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{+\infty}{+\infty} \qquad (e^{+\infty} = +\infty)$$

صورت و مخرج را در e^{-2x} ضرب می‌کنیم

یا تقسیم بر e^{2x}

$$\frac{\times e^{-2x}}{e^{-2x}} = \lim \frac{e^{2x} \times e^{-2x}}{e^{-2x}e^{2x} + e^{-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-2x}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\boxed{e^{-2x} e^{2x} = e^{-2x+2x} = e^{0} = 1}$$

$$\boxed{\lim e^{-\infty} = 0}$$

مثال (تمرین 26 کتاب) وارون $y = \frac{e^x}{1+2e^x}$ را پیدا کنید

حل: ابتدا یک به یک بودن را بررسی می‌کنیم (صعودی) پس مشتق می‌گیریم

① یک به یک بودن (بررسی)

$$y' = \frac{(e^x)'(1+2e^x) - (1+2e^x)'e^x}{(1+2e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(1+2e^x) - 2e^x(e^x)}{(1+2e^x)^2} = \frac{\overset{>0}{e^x}}{\underbrace{(1+2e^x)^2}_{>0}} > 0 \Rightarrow$$

تابع صعودی است (صعودی) پس یک به یک است بنابراین وارون دارد.

{ 1- ضابطه $y = f(x)$ می‌نویسیم

ضابطه وارون

② $y = \frac{e^x}{1+2e^x} \Rightarrow y(1+2e^x) = e^x \to y + 2e^x y = e^x$

جملات شامل x سمت چپ و جملاتی که تنها y دارد و ثابت هستند سمت راست می‌نویسیم

2- x را برحسب y می‌نویسیم

$$2e^x y - e^x = -y \xrightarrow[e^x]{\text{فاکتور از}} e^x(2y-1) = -y$$

$$\to e^x = \frac{-y}{2y-1} \overset{\times(-1)}{=} \frac{y}{1-2y} \xrightarrow{\text{از طرفین } \ln} \ln(e^x) = \ln\left(\frac{y}{1-2y}\right)$$

$$\to x = \ln\left(\frac{y}{1-2y}\right)$$

3- جای x و y را عوض می‌کنیم

$$\underbrace{y = \ln\left(\frac{x}{1-2x}\right)}_{f^{-1}(x)}$$

تابع نمایی کلی

1 اگر $a>0$، $a \neq 1$ و x عدد گویا (حقیقی) آنگاه

$$\boxed{a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}}$$

تابع $f(x) = a^x$ را تابع نمایی با پایه a می‌نامند. a^x به ازای هر x مثبت است زیرا e^x به ازای هر x مثبت است.

قاعده نماها اگر x و y اعداد حقیقی و $a, b > 0$ آنگاه

1) $a^{x+y} = a^x a^y$

2) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

3) $(a^x)^y = a^{xy}$

4) $(ab)^x = a^x b^x$

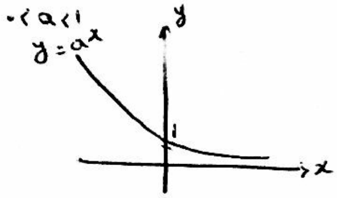
$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \quad \text{یا} \quad (a^x)' = a^x \ln a$$
$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad \text{در حالت کلی}$$

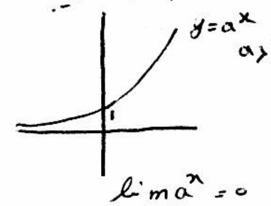
(*) دستور مشتق گیری

نمودار توابع نمایی

با توجه به (*) اگر $a>1$ آنگاه $\ln a>0$ در نتیجه $(a^x)' = \underbrace{a^x}_{>0} \underbrace{\ln a}_{>0} > 0$ پس تابع $y=a^x$ صعودی است

اگر $0<a<1$ آنگاه $\ln a<0$ در نتیجه $y=a^x$ نزولی است.





$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} a^x = +\infty$

$0<a<1$ $a^x = \frac{1}{a^x}$

مثال) مشتق عبارات زیر را بیابید.

1) $y = 10^{x^2} \to y' = (x^2)' 10^{x^2} \ln 10 = (2\ln 10) x 10^{x^2}$

2) $y = x^4 4^x \to y' = (x^4)' 4^x + (4^x)' x^4 = 4x^3 4^x + x^4 (4^x \ln 4)$

مشتق گیری برای $y = f(x)^{g(x)}$

از مشتق گیری لگاریتمی می توان استفاده کرد

1) $y = f(x)^{g(x)}$

از طرفین $\ln$ می گیریم 2) $\ln y = g(x) \ln(f(x))$

از طرفین مشتق می گیریم 3) $\frac{y'}{y} = \underbrace{(g(x))' \ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}}_{h(x)} \to y' = y \times h(x)$

مثال) مشتق $y = x^{\sqrt{x}}$ را بیابید

حل:

1) $y = x^{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{از طرفین } \ln}$

2) $\ln y = \ln(x^{\sqrt{x}}) = \sqrt{x}\ln(x) \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می گیریم}}$

3) $\frac{y'}{y} = (\sqrt{x}\ln x)' = \underbrace{(\sqrt{x})'}_{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \ln x + \sqrt{x} \underbrace{(\ln x)'}_{\frac{1}{x}} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \overset{\text{ساده تر}}{=} \frac{(\ln x + 2)}{2\sqrt{x}}$ ($\frac{1}{\sqrt{x}}$)

$\to \frac{y'}{y} = \frac{(\ln x+2)}{2\sqrt{x}} \to y' = \underbrace{y}_{x^{\sqrt{x}}} \times \left(\frac{x+\ln 2}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}} \frac{(\ln x + 2)}{2\sqrt{x}}$

تابع های لگاریتمی کلی

اگر $a>0$ و $a \neq 1$ آنگاه تابع $f(x) = a^x$ یک به یک است پس وارون پذیر است

وارون آن را تابع لگاریتمی در پایه a می نامند و با $\log_a$ نشان می دهند

$$\boxed{\log_a^x = y \Leftrightarrow a^y = x}$$

[2]

توجه: $\log_e^x = \ln x$

تساوی های خنثی کننده

$$\boxed{a^{\log_a^x} = x \quad x>0 \quad , \quad \log_a^{a^x} = x \quad \forall x}$$

دستور تغییر پایه. به ازای هر عدد مثبت مانند a $(a \neq 1)$

$$\boxed{\log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

اثبات: فرض کنید $y=\log_a^x$ در این صورت $a^y = x$. اگر از طرفین لگاریتم طبیعی

$$\boxed{a^y = a^{\log_a^x} = x}$$

$$a^y = x \xrightarrow{\ln} \ln(a^y) = \ln x \rightarrow y\ln a = \ln x \Rightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

مشتق لگاریتم

1) $\frac{d}{dx}(\log_a^x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{x\ln a}$

2) $(\log_a^u)' = \frac{u'}{u\ln a}$

مثال: مشتق $y = 2x\log_{10}^{\sqrt{x}}$ را بیابید.

تمرین های این جلسه

ص 543: 68 ، 44, 31 ، 26 , 24 ، 16 , 14 ، 3

ص 554: 38 , 33 ، 29